برقناطیسیت

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

میں نے تقریباً چودہ برس قبل اس کتاب کو لکھنے کی پہلی مرتبہ ناکام کوشش کی۔ کئی برس گزرنے کے بعد آج میں ایسا کرنے میں کامیاب ہوا ہوں۔ یہ کتاب اس امید کے ساتھ لکھی گئی ہے کہ یہ ایک دن برقی انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر پڑھائی جائے گی۔امید کی جاتی ہے کہ اب بھی طلبہ و طالبات اس سے استفادہ کر سکیں گے۔ برقناطیسیت کا شعبہ انتہائی دلچسپ ہے۔ میں نے پوری کوشش کی ہے کہ یہ کتاب بھی پر کشش ہو۔

اس کتاب میں تقریباً 121 حل شدہ مثال اور 245 اشکال پائے جاتے ہیں۔اس کے علاوہ 370 سوالات دئے گئے ہیں۔ تمام کے تمام سوالات کے جوابات بھی دئے گئے ہیں۔

برقناطیسیت کو خطی الجبرا اور سمتیات کی مدد سے سمجھنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔اس کتاب کے پہلے باب میں درکار خطی الجبرا اور سمتیات پر غور کیا گیا ہے۔ کارتیسی محدد کے علاوہ نلکی محدد اور کروی محدد متعارف کیے گئے ہیں۔ عمومی محدد پر بھی تبصرہ کیا گیا ہے۔اس باب کو مکمل طور پر سمجھنا نہایت ضروری ہے۔ دوسرے باب میں کولمب کے قانون پر غور کے بعد تیسرے باب میں پھیلاو متعارف کرایا گیا ہے۔ چوتھے باب میں برقی دباو اور ڈھلوان پر غور کیا گیا ہے۔ پانچویں باب میں برق گیر جبکہ آٹھویں باب میں امالہ پر غور کیا گیا ہے۔ ساتویں باب میں گردش، مسئلہ سٹوکس اور ایمپیئر کے دوری قانون پر بحث کی گئی ہے۔

میکس ویل مساوات کے بعد حرکت کرتے میدان پر تبصرہ کیا گیا ہے۔ حرکت کرتا میدان انتہائی دلچسپ موضوع ہے جسے پڑھ کر ایسے حقائق جیسے آئینے میں عکس کیوں بنتا ہے یا پھر شیشے میں آر پار کیوں نظر آتا ہے کی سمجھ پیدا ہوتی ہے۔اس کے علاوہ خلاء میں برقناطیسی امواج کی رفتار، خالصتاً میکس ویل مساوات سے حاصل کی جاتی ہے۔ خلاء کی قدرتی رکاوٹ بھی انہیں مساوات سے حاصل کی جاتی ہے۔

میکس ویل مساوات کے بعد پوئنٹنگ سمتیہ متعارف کیا گیا ہے جو منطق کے بالکل برعکس بتلاتا ہے کہ برقی طاقت، منبع سے برقی بوجھ تک، ہر گز موصل تار کے ذریعہ نہیں پہنچتا بلکہ تار کے گرد خلاء میں برقناطیسی میدان کے ذریعہ پہنچتا ہے۔موصل تار صرف اور صرف ان امواج کو منبع سے مزاحمت تک کی راہ دکھاتی ہے۔ترسیلی تار کے ذریعہ ساکن موج پر بھرپور تبصرہ کیا گیا ہے جسے آپ ضرور پسند کریں گے۔

برقی ادوار پڑھنے سے ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو عدد موصل تاروں کا ہونا ضروری ہے۔مویج کا باب اس حقیقت کے بالکل برعکس ہے جہاں صرف ایک عدد تار ہی برقناطیسی امواج کو منبع سے بوجھ تک راہ دکھاتی ہے۔

کتاب کے آخر میں اینٹینا پر تبصرہ کیا گیا ہے جہاں منبع سے بوجھ تک طاقت بغیر کسی راہ دکھاتے موصل تار کے پہنچتی ہے۔

مجھے طلباء و طالبات کی طرف سے بھرپور حوصلہ ملا ہے جو آئے دن مجھ تک کتاب کی غلطیاں پہنچاتے ہیں۔اس سے بھی زیادہ پُر امید میں اس وقت ہوا جب مجھے معلوم ہوا کہ کئی طلباء اور طالبات میری کتاب سے پڑھ رہے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ برقناطیسیت کی کتاب کو بھی درست کرنے میں آپ مدد کریں گے۔

میں انیلا تبسم کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے پوری کتاب کی اردو درست کی۔اب میں پورے اطمینان کے ساتھ کہہ سکتا ہوں کہ اس کتاب میں اردو کی تمام غلطیوں کی ذمہ دار انیلا تبسم ہے۔

میں رانا لیاقت، حرا خان، اور ماجد بلال خان کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے کتاب کے دیگر حصے پڑھ کر درست کئے۔میں عابد حسن مجتبٰے کا بھی شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جو XeLatex کے معاملات سنبھالے ہوئے ہیں۔

یہ کتاب Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دی گئی جبکہ سوالات کے جوابات کے حصول میں wxMaxima کا سہارا لیا گیا۔

یہ کتاب لکھتے ہوئے مندرجہ ذیل کتابوں سے مدد لی گئی

- Engineering Electromagnetics by William H. Hayt, Jr
- Electromagnetics by John D. Kraus
- Antennas And Radiowave Propagation by R.E. Collin

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ حاصل کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے ای میل پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔

خالد خان یوسفزئی

8 جنوری 2017

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کے چناؤ کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا ہے کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی گئی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں موجود تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

سمتیات

1.1 سمتی اور غیر سمتی مقداریں

وہ طبعی مقدار جس کے مکمل اظہار کے لئے سمت کی ضرورت نہیں ہوتی غیر سمتی[1] مقدار کہلاتا ہے۔کسی چیز کی کمیت m یا اس کا درجہ حرارت T غیر سمتی مقدار کی مثالیں ہیں۔غیر سمتی مقدار کی قیمت اٹل یا متغیر ممکن ہے۔کمیت اٹل غیر سمتی مقدار کی مثال ہے۔متغیر غیر سمتی مقدار کی قیمت مختلف اوقات اور نقاط پر مختلف ہو سکتی ہے۔یوں کسی بھی نقطے پر درجہ حرارت کی قیمت وقت t کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔اسی طرح کسی بھی وقت مختلف نقاط پر درجہ حرارت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔یوں اگر صبح کے وقت اسلام آباد میں کسی مقام پر درجہ حرارت[2] بارہ ڈگری سیلسیئس ($12\,^\circ\mathrm{C}$) ہو تو دوپہر کو اسی مقام پر درجہ حرارت $30\,^\circ\mathrm{C}$ ہو سکتا ہے۔درجہ حرارت T، وقت t، **کارتیسی محدد**[3] کے متغیرات x، y اور z تمام غیر سمتی متغیرات ہیں۔

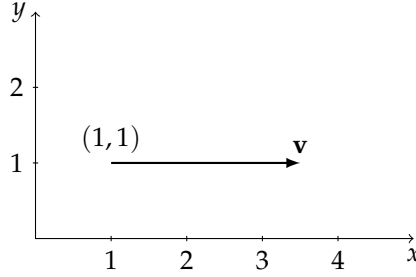
ایسی طبعی مقدار جسے بیان کرنے کے لئے سمت درکار ہو سمتیہ[4] کہلاتا ہے۔اس کتاب میں سمتیہ کی قیمت (یا طول) کو مثبت تصور کیا جائے گا۔یوں سمتیہ کی مطلق قیمت ہی اس کی مقدار ہو گی۔سمتیہ کی مثالیں قوت، سمتی رفتار اور اسراع ہیں۔

---

[1] scalar

[2] درجہ حرارت کو ڈگری سنٹی گریڈ میں ناپا جاتا ہے۔اس اکائی کا نیا نام ڈگری سیلسیئس ہے۔

[3] Cartesian coordinates

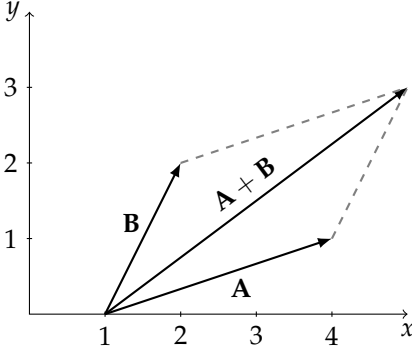
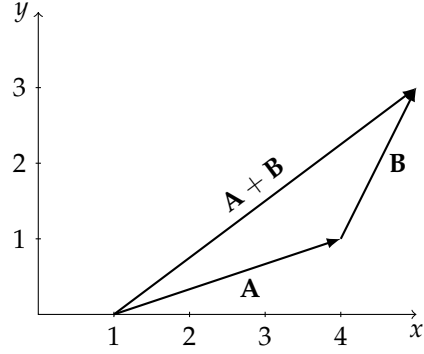
[4] vector

شکل 1.1: سمتیہ

اس کتاب میں غیر سمتی متغیرات کو سادہ طرز کی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے حروف مثلاً a، b، c،α،β،γ، . . . یا بڑے حروف مثلاً A، B، Ψ، . . . سے ظاہر کیا جائے گا۔ سمتی متغیرات کو موٹی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے یا بڑے حروف سے ظاہر کیا جائے گا۔یوں قوت کو $\mathbf{F}$ جبکہ سمتی رفتار کو $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں قوت کو $\vec{F}$ یا $\overrightharpoon{F}$ لکھا جاتا ہے۔سمتیہ کو تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں تیر کی لمبائی سمتیہ کی مطلق قیمت $|\mathbf{F}|$ ظاہر کرتی ہے جبکہ سمتیہ کی سمت تیر کی سمت سے ظاہر کی جاتی ہے۔سمتیہ کی مطلق قیمت کو سمتیہ ظاہر کرنے والے حرف کو سادہ لکھائی میں لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں قوت $\mathbf{F}$ کی مطلق قیمت کو F لکھا جائے گا۔

شکل 1.1 میں نقطہ $(1,1)$ پر پانی کی رفتار کو سمتیہ $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس نقطے پر مثبت افقی محور کی سمت میں پانی کی رفتار دو اشاریہ پانچ میٹر فی سیکنڈ ($2.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$) ہے۔سمتیہ کی دُم اس مقام پر رکھی جاتی ہے جہاں سمتیہ کی قیمت بیان کی جا رہی ہو۔یوں شکل میں سمتیہ کی دُم $(1,1)$ پر رکھی گئی ہے۔اس شکل میں $1\,\text{cm}$ کی لمبائی $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ کی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔

1.2 سمتی الجبرا

دو سمتیوں کا ترسیمی مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر ایک سمتیہ کے سر کو دوسرے سمتیہ کی دُم کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔پہلی سمتیہ کی دُم سے دوسرے سمتیہ کے سر تک سمتیہ حاصل جمع ہو گا۔اس عمل کو شکل 1.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔شکل میں $\mathbf{A}$ کے سر کے ساتھ $\mathbf{B}$ کی دُم ملائی گئی ہے۔دو سے زیادہ سمتیوں کا مجموعہ بھی اسی عمل کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس اصول کو سر سے دُم جوڑنے [5] کا اصول کہتے ہیں۔شکل 1.2-ب میں دو

[5] head to tail rule

(ب) متوازی الاضلاع سے بھی مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

(ا) سر کے ساتھ دُم جوڑ کر مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2: سمتیوں کے مجموعے کا حصول

سمتیوں کے دُم ملا کر ان کا مجموعہ **قانونِ متوازی الاضلاع** سے حاصل کرنا دکھایا گیا ہے جسے دیکھ کر صاف ظاہر ہے کہ $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ ہے یعنی سمتیوں کا مجموعہ قانون تبادل[6] پر پورا اترتا ہے۔اسی طرح سمتیوں کا مجموعہ قانون تلازمی[7] کے استعمال سے درج ذیل طریقے سے لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \tag{1.1}$$

سمتیوں کے تفریق کا اصول جمع کے اصول سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ہم $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ کو $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ لکھ سکتے ہیں جہاں $-\mathbf{B}$ سے مراد یہ ہے کہ سمتیہ $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کر دی گئی ہے۔یوں $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ حاصل کرنے کی خاطر $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کرتے ہوئے اس نئے سمتیہ کو $\mathbf{A}$ کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے۔

سمتیہ $\mathbf{A}$ کو مثبت غیر سمتی مقدار k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا جبکہ اس کی لمبائی k گنا ہو جاتی ہے۔اس کے برعکس سمتیہ $\mathbf{A}$ کو منفی غیر سمتی مقدار $-k$ سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت الٹ ہو جاتی ہے اور اس کی لمبائی $|k|$ گنا ہو جاتی ہے۔

دو سمتیے اُس صورت میں برابر ہوتے ہیں جب ان کا تفریق صفر کے برابر ہو یعنی $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ تب ہو گا جب $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=0$ ہو۔

---

[6] commutative law
[7] associative law

سمتی میدان کے متغیرات کو ہم آپس میں جمع یا منفی صرف اُس صورت کریں گے جب یہ متغیرات ایک ہی نقطے پر بیان کئے گئے ہوں۔یوں کسی بھی نقطے پر دو یا دو سے زیادہ مقناطیسوں کا مجموعی مقناطیسی میدان حاصل کرتے ہوئے اس نقطے پر تمام مقناطیسوں کا علیحدہ علیحدہ مقناطیسی میدان لیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

اگر سمتی میدان کی بات نہ ہو رہی ہو تب مختلف مقامات پر پائے جانے والے سمتیوں کا بھی مجموعہ یا فرق لیا جا سکتا ہے۔یوں سمندر کے پانی میں ڈوبے ہوئے آب دوز کی بالائی اور نچلی سطح پر قوتوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مزید ڈوبے گا یا نہیں۔

1.3 کارتیسی محدد

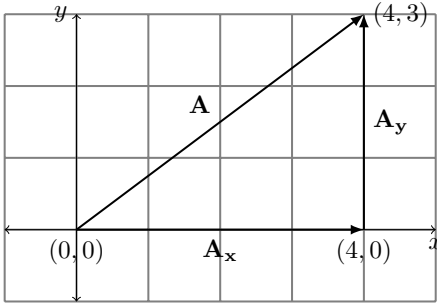
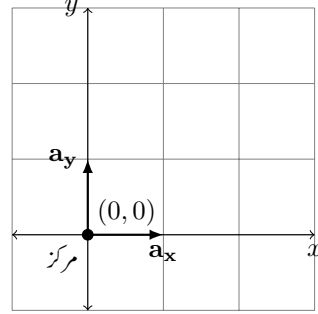
ایسا طریقہ جس سے کسی نقطے کا مقام بیان کیا جائے محدد[8] کہلاتا ہے۔سیدھی سطح پر کسی بھی نقطے کو دو محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔خلاء تین طرفہ[9] ہے لہٰذا خلاء میں کسی بھی نقطے کو تین محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔شکل 1.3-الف میں دو طرفہ کارتیسی محدد پر اکائی لمبائی کے دو سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی سمت مثبت x جانب کو ہے جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت مثبت y جانب کو ہے۔شکل-ب میں $\mathbf{A}$ دکھایا گیا ہے۔کسی بھی سمتیہ کو دو یا دو سے زیادہ سمتیوں کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔شکل میں $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{A}_x$ اور $\boldsymbol{A}_y$ کے مجموعے کی شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_x + \boldsymbol{A}_y \tag{1.2}$$

زمین کی سطح کو لامحدود سیدھی سطح تصور کرتے ہوئے، اس کے ہم سطحی[10] دو عمودی لکیریں کھینچتے ہوئے ایک لکیر کو x محدد اور دوسری لکیر کو y محدد تصور کیا جا سکتا ہے۔زمین کے ہم سطحی لکیر سے مراد ایسی لکیر ہے جس پر ہر نقطہ اس سطح کو چھوتا ہے۔x محدد کے مثبت حصے سے گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ گھومتے ہوئے نوے درجے پر y محدد کا مثبت حصہ رکھتے ہوئے اونچائی کو z محدد کے مثبت حصے سے ظاہر کیا جائے گا۔ اب اگر اونچائی صفر رکھتے ہوئے x اور y کو تبدیل کیا جائے تو ہم زمین کی سطح پر حرکت کریں گے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح پر $z = 0$ جبکہ اس پر x اور y آزاد متغیرات ہیں۔یوں زمین کی سطح کو $z = 0$ سطح کہتے ہیں جسے

$$z = 0, \quad x \leq |\mp\infty|, \quad y \leq |\mp\infty|$$

---

[8] coordinates
[9] three dimensional
[10] coplanar

(ب) اکائی سمتیات سے عمومی سمتیہ کا اظہار۔

(ا) اکائی سمتیہ

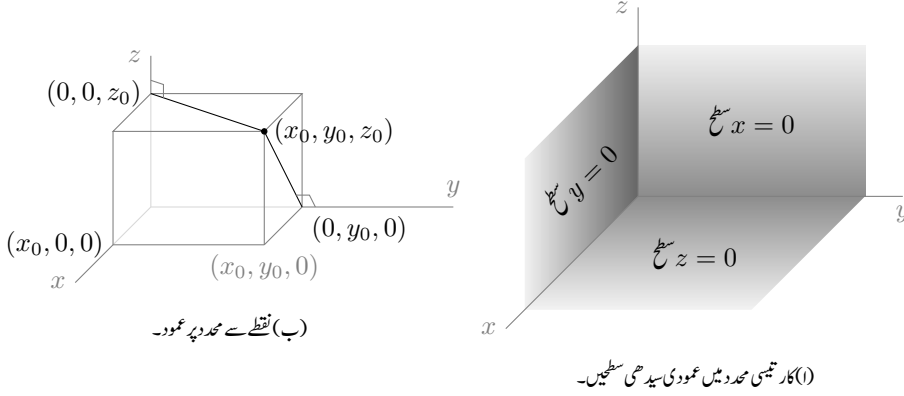
شکل 1.3: اکائی سمتیات اور ان کا استعمال

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.4-الف میں اس سطح کی نشاندہی کی گئی ہے۔اسی شکل میں $y = 0$ سطح اور $x = 0$ سطح کی بھی نشاندہی کی گئی ہے۔

شکل 1.4-ب کو دیکھئیے۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطے کو (x_0, y_0, z_0) لکھا جا سکتا ہے۔اس نقطے تک پہنچنے کی خاطر کارتیسی محدد کے مبدا سے پہلے x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ تک پہنچیں۔اس کے بعد y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, y_0, 0)$ تک پہنچیں اور آخرکار z محدد کے متوازی z_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے درکار نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک پہنچیں۔اس عمل میں یہ ضروری نہیں کہ پہلے x محدد کے متوازی ہی چلا جائے۔آپ مبدا سے پہلے y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرنے کے بعد z محدد کے متوازی z_0 اور آخرکار x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے بھی اسی نقطے تک پہنچ سکتے ہیں۔تینوں فاصلوں کو کسی بھی ترتیب سے طے کیا جا سکتا ہے۔

نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے نقطہ $(x_0, 0, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح اسی نقطے سے y محدد پر عمود بناتے ہوئے نقطہ $(0, y_0, 0)$ اور z محدد پر عمود بناتے ہوئے نقطہ $(0, 0, z_0)$ حاصل ہوتا ہے۔نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے y محدد اور z محدد پر عمودی لکیریں گہری سیاہی سے دکھائی گئی ہیں جبکہ شکل کو صاف ستھرا رکھنے کی خاطر (x_0, y_0, z_0) سے x محدد پر عمودی لکیر نہیں دکھائی گئی۔ اگر (x_0, y_0, z_0) سے شروع ہوتے ہوئے z محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخرکار $z = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(x_0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔ اب اگر نقطہ $(x_0, y_0, 0)$ سے x محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخرکار $x = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔یہ وہی نقطہ ہے جو (x_0, y_0, z_0) سے y محدد پر عمودی لکیر بناتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔اس عمل میں ہم پہلے x محدد کے متوازی چلتے ہوئے $x = 0$ کرنے کے بعد z محدد کے متوازی چلتے ہوئے $z = 0$ کرتے ہوئے بھی نقطہ $(0, y_0, 0)$ تک پہنچ سکتے تھے۔

(ب) نقطے سے محدد پر عمود۔

(ا) کارتیسی محدد میں عمودی سیدھی سطحیں۔

شکل 1.4: کارتیسی نظام میں نقطہ اور تین عمودی سطحیں۔

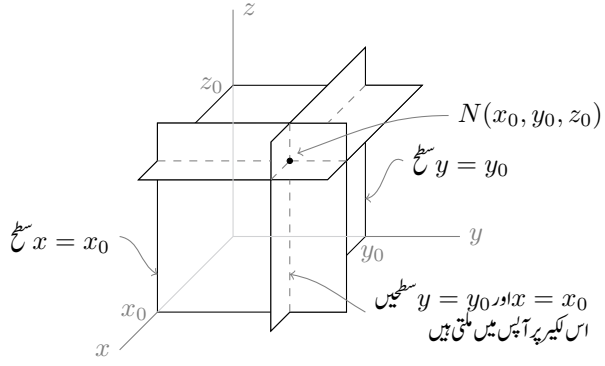
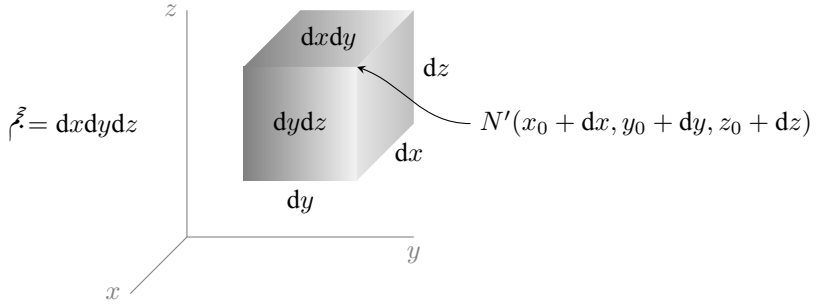
نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک قدر مختلف انداز سے بھی پہنچا جا سکتا ہے جسے کارتیسی محدد میں سمجھنا زیادہ آسان ہے۔ شکل 1.5 کو دیکھئیے۔ فرض کریں کہ $x = x_0$ پر لامحدود وسعت کی yz سیدھی سطح بنائی جائے۔ ایسی سطح کو $x = x_0$ سطح کہتے ہیں۔ اس سطح کو

$$x = x_0, \quad y \le |\mp\infty|, \quad z \le |\mp\infty|$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں x_0 مستقل ہے جبکہ y اور z متغیرات ہیں۔ دو متغیرات کی مساوات سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر $y = y_0$ پر لامحدود وسعت کی xz سیدھی سطح بنائی جائے تو یہ دو سطحیں آپس میں سیدھی لکیر پر ملیں گی۔ یہ لکیر

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z \le |\mp\infty|$$

لکھی جا سکتی ہے۔ اس مساوات میں x_0 اور y_0 مستقل ہیں جبکہ z متغیر ہے۔ ایک متغیر کی مساوات لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔ اب اگر $z = z_0$ پر لامحدود xy سیدھی سطح بھی بنائی جائے تب یہ تینوں سطحے ایک نقطے $N(x_0, y_0, z_0)$ پر ایک دونوں کو چھوئنگے۔ شکل 1.5 میں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ نقطے تک پہنچنے کا یہ طریقہ دیگر محدد میں استعمال کرنا لازمی ثابت ہو گا۔

اگر سطح $x = x_0$ کے متوازی $x = x_0 + \mathrm{d}x$ پر اور اسی طرح $y = y_0$ کے متوازی $y = y_0 + \mathrm{d}y$ اور $z = z_0$ کے متوازی $z = z_0 + \mathrm{d}z$ سطحیں رکھے جائیں تو یہ چھ سطحے ایک چھوٹی مکعب نما حجم کو گھیریں گی جسے شکل 1.6 میں دکھایا گیا ہے جبکہ یہ تین نئی سطحیں آپس میں نقطہ N' پر ملیں گی۔ اس مکعب نما کے اطراف $\mathrm{d}x$، $\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}z$ ہیں۔ اس

شکل 1.5: تین عمودی سطحوں سے نقطے کا حصول۔

شکل 1.6: چھ سطحی مکعب نما گھیرتی ہیں۔

کی اوپر والی سطح کا رقبہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔اسی طرح اس کی نچلی سطح کا رقبہ بھی $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔سامنے سطح اور پچھلی سطح دونوں $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ رقبے رکھتے ہیں جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ کے برابر ہیں۔اس مکعب نما کی حجم $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ہے۔نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ شکل میں دکھایا گیا ہے جبکہ نقطہ $N'(x_0+\mathrm{d}x, y_0+\mathrm{d}y, z_0+\mathrm{d}z)$ مکعب نما کا وہ واحد کونا ہے جسے شکل میں نہیں دکھایا گیا۔ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ $NN' = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}$ ہے۔

کارتیسی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرنے سے ہم N سے N' پہنچتے ہیں۔N سے N' تک کی سمتیہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.3}$$

لکھی جاتی ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی لمبائی دیتی ہے۔

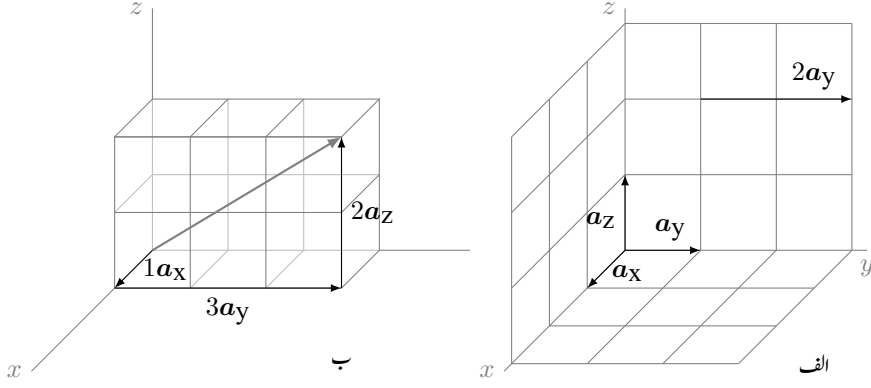
1.4 اکائی سمتیات

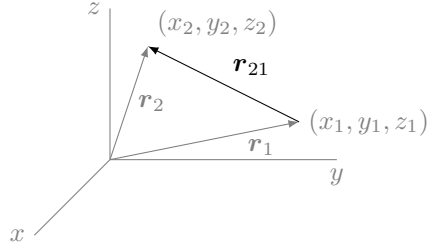
حصہ 1.3 کے شروع میں دو طرفہ کارتیسی نظام میں سیدھی سطح پر کسی بھی سمتیہ کو دو سمتیات کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا۔یہی طریقہ تین طرفہ کارتیسی نظام کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ تین طرفہ کارتیسی نظام کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھے جاتے ہیں۔یہ تینوں سمتیات آپس میں عمودی ہیں۔کسی بھی اکائی سمتیہ کی طرح یہ تین اکائی سمتیات اکائی لمبائی رکھتے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی سمت x محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت y محدد کے بڑھتے جانب کو اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سمت z محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔شکل 1.7-الف میں یہ تینوں اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔اسی شکل میں نقطہ $(0,1,2)$ پر سمتیہ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ یہ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت میں ہے۔اس سمتیہ کو $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یاد رہے کہ ایسے دو سمتیات برابر ہوتے ہیں جن کا طول برابر ہو اور جو ایک ہی سمت میں ہوں۔ یوں سمت تبدیل کئے بغیر سمتیہ کو کارتیسی محدد کے مبدا منتقل کرتے ہوئے اس کی قیمت نسبتاً آسانی سے لکھی جا سکتی ہے۔

شکل 1.8 میں مبدا سے (x_1, y_1, z_1) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور مبدا سے (x_2, y_2, z_2) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دکھائے گئے ہیں۔شکل میں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ بھی دکھائی گئی ہے جس کی دُم (x_1, y_1, z_1) اور نوک (x_2, y_2, z_2) پر ہے۔ سر سے دُم جوڑنے کے اصول کے استعمال سے $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_{21} + \boldsymbol{r}_1$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

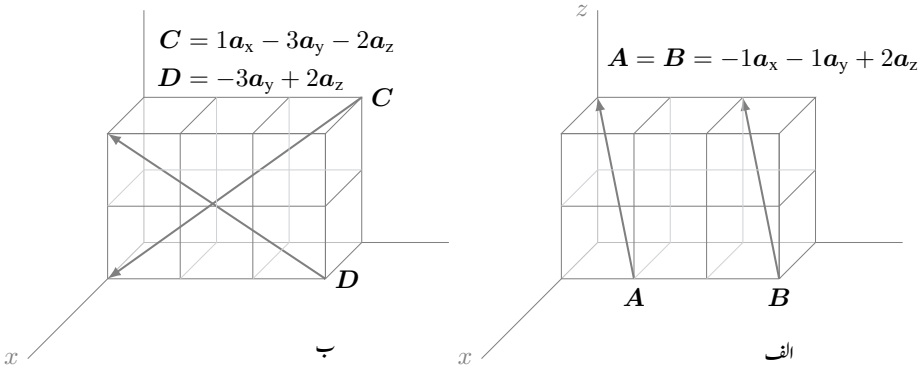
$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{21} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

z $2\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ y x الف

z $2\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ $1\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ $3\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ x ب

شکل 1.7: کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات اور ان کا استعمال

z (x_2, y_2, z_2) $\boldsymbol{r}_{21}$ $\boldsymbol{r}_2$ (x_1, y_1, z_1) $\boldsymbol{r}_1$ y x

شکل 1.8: کارتیسی نظام میں سمتیہ کی مساوات کا حصول

z $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = -1\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{B}$ x الف

$\boldsymbol{C} = 1\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{z}}$
$\boldsymbol{D} = -3\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ $\boldsymbol{C}$ $\boldsymbol{D}$ x ب

شکل 1.9: کارتیسی نظام میں چند سمتیات۔

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے استعمال سے سمتیہ کی مساوات باآسانی حاصل ہوتی ہے۔سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ لکھتے ہوئے زیرنوشت میں سمتیہ کی نوک کو 2 اور اس کی دُم کو 1 سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کتاب میں سمتیہ لکھتے ہوئے نوک اور دُم کو اسی ترتیب سے زیرنوشت میں لکھا جائے گا۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کو تین اجزاء $(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $(y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $(z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.7-ب میں مبدا سے $(1,3,2)$ تک سمتیہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کو تین سمتیات کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے یعنی $1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جہاں اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے تینوں اجزاء کو لکھا گیا ہے۔ سمتیہ کی دُم $(0,0,0)$ اور اس کی نوک $(1,3,2)$ پر لیتے ہوئے یہی جواب مساوات 1.4 سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

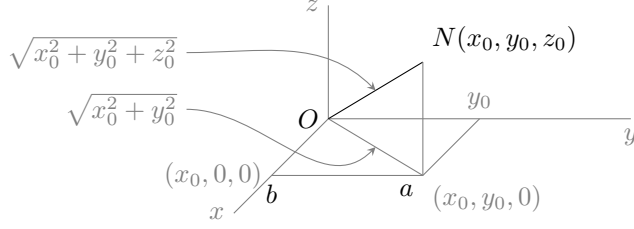
شکل 1.9-الف میں دو متوازی سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دکھائے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔ چونکہ ان کی لمبائی برابر ہے اور یہ دونوں ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جائے گا۔شکل 1.9-ب میں $\boldsymbol{C}$ کی دُم سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جانب ایک قدم اور یہاں سے $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب تین قدم اور آخرکار $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب دو قدم چلنے سے اس کی نوک تک پہنچا جا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{C} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جائے گا۔ اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کی دُم سے $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب تین قدم اور پھر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب دو قدم چلتے ہوئے سمتیہ کی نوک تک پہنچا جایا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{D} = -3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جائے گا۔سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کو دو اجزاء کی شکل میں لکھا گیا ہے چونکہ اس کے تیسرے جزو کی لمبائی صفر کے برابر ہے۔

مشق 1.1: مساوات 1.4 کے استعمال سے شکل 1.9 میں تمام سمتیات لکھیں۔

جوابات: تمام جوابات شکل میں دئے گئے ہیں۔

شکل 1.10 میں مبدا سے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ تک کا فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث[11] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس نقطے سے $z = 0$ سطح پر عمود سے نقطہ a حاصل ہوتا ہے۔نقطہ a سے x محدد پر عمود نقطہ b دیتا ہے۔ تکون Oba میں O سے b کا فاصلہ x_0 ہے جبکہ b سے a کا فاصلہ y_0 ہے۔یوں فاصلہ Oa مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

[11] Pythagoras theorem

$\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$ $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ $(x_0,0,0)$ x z O b a $(x_0,y_0,0)$ $N(x_0,y_0,z_0)$ y_0 y

شکل 1.10: کارتیسی نظام میں سمتیہ کا طول۔

کے برابر ہو گا۔ تکون OaN میں a پر $90°$ کا زاویہ پایا جاتا ہے۔یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے ON کا فاصلہ $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 1.4 سمتیہ کی عمومی مساوات ہے۔اس میں دئے سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کی دُم محدد کے مبدا پر رکھنے سے صاف ظاہر ہے کہ سمتیہ کی مقدار

$$|\boldsymbol{r}_{21}| = r_{21} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.5}$$

کے برابر ہے۔اگر سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کیا جائے تو حاصل جواب کی مقدار اکائی ہو گی جبکہ اس کی سمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی۔یوں $\boldsymbol{r}_{21}$ کو $|\boldsymbol{r}_{21}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{r21}$ حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{r21} = \frac{\boldsymbol{r}_{21}}{|\boldsymbol{r}_{21}|} = \frac{(x_2-x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(y_2-y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(z_2-z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \tag{1.6}$$

یاد رہے کہ سمتیہ کی سمت اور طول تبدیل کئے بغیر اسے ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جا سکتا ہے۔البتہ وہ سمتیہ جو کسی نقطے کی مقام تعین کرتا ہو کو اگر کہیں اور منتقل کیا جائے تو ایسی صورت میں سمتیہ کی نوک درکار نقطے پر نہیں رہے گی۔اسی حقیقت کی بنا پر میدان ظاہر کرنے والے سمتیہ کو اپنی جگہ سے نہیں ہٹایا جا سکتا۔میدانی سمتیہ کی دُم اس مقام پر پائی جاتی ہے جہاں میدان بیان کی جا رہی ہو۔

سمتیات کے استعمال سے نقطہ (x,y,z) کے مقام کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے۔کسی بھی سمتیہ مثلاً قوت $\boldsymbol{F}$ کو بالکل اسی طرح $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے جہاں $F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اس کے تین اجزاء اور $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$ قوت کی مقدار ہے۔

مثال 1.1: نقطہ $(-5, 2, -1)$ کا مقام ظاہر کرنے والا سمتیہ اور اس سمتیہ کا طول حاصل کریں۔اسی سمتیہ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

حل:مبدا سے اس نقطے تک کا سمتیہ

$$\boldsymbol{r} = -5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہے جبکہ اس سمتیہ کا طول

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^1} = \sqrt{30}$$

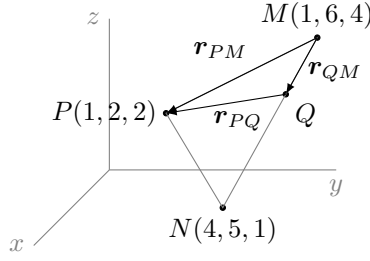
ہے۔یوں اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}_r = \frac{-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{30}}$$

مثال 1.2: شکل 1.11 میں تین نقطے $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ دئے گئے ہیں۔M اور N کے درمیان سیدھی لکیر پر M سے کل فاصلے کے $\frac{1}{3}$ پر نقطہ Q پایا جاتا ہے۔Q سے P تک سمتیہ حاصل کرتے ہوئے ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ حل:M سے N تک سمتیہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{NM} &= (4-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (5-6)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (1-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ &= 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

ہے۔M سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{QM}$ اور $\boldsymbol{r}_{NM}$ ایک ہی سمت میں ہیں جبکہ $|\boldsymbol{r}_{QM}| = \frac{1}{3}|\boldsymbol{r}_{NM}|$ کے برابر ہے۔یوں

$$\boldsymbol{r}_{QM} = \frac{1}{3}\boldsymbol{r}_{NM} = \frac{1}{3}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

شکل 1.11: سمتیوں کا استعمال

ہو گا۔ M سے P تک سمتیہ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{PM} &= (1-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (2-6)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

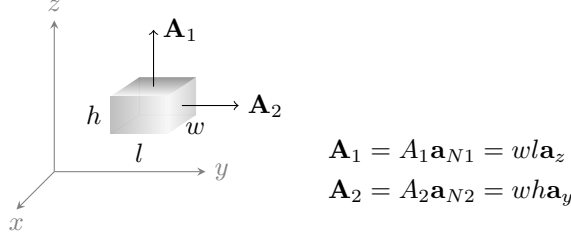
ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں $\boldsymbol{r}_{QM} + \boldsymbol{r}_{PQ} = \boldsymbol{r}_{PM}$ لہٰذا

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{PQ} &= \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{QM} \\
&= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) - (1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\
&= -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \frac{11}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

ہو گا۔ Q سے P تک فاصلہ $\sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{11}{3}\right)^2 + (-1)^2} = 3.93$ ہے۔

مشق 1.2: مثال 1.2 میں دئے نقطوں کو استعمال کرتے ہوئے M سے P تک سمتیہ حاصل کریں۔ اسی طرح P سے N تک سمتیہ اور M سے N تک سمتیہ حاصل کریں۔ پہلے دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے سر سے دم جوڑنے کے اصول سے تیسرا سمتیہ دوبارہ حاصل کریں۔

جوابات: $-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$، $-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

$$\mathbf{A}_1 = A_1\mathbf{a}_{N1} = wl\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{A}_2 = A_2\mathbf{a}_{N2} = wh\mathbf{a}_y$$

شکل 1.12: سمتی رقبہ

1.5 سمتی رقبہ

کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں۔یوں سطح کے کسی بھی نقطے پر دو آپس میں الٹ سمتوں میں عمود بنائے جا سکتے ہیں۔سیدھی سطح جس کا رقبہ S ہو کے ایک طرف پر اکائی عمود $\boldsymbol{a}_N$ اور دوسری طرف پر اکائی عمود $-\boldsymbol{a}_N$ بنائے جا سکتے ہیں۔اگر ان دو عمود میں سے ایک عمود مثلاً $\boldsymbol{a}_N$ کو سطح کی سمت[12] تصور کیا جائے تب اس سطح کا سمتی رقبہ[13] $S\boldsymbol{a}_N$ ہو گا۔بند سطح کے بیرونی اکائی عمود کو سطح کی سمت تصور کیا جاتا ہے۔شکل 1.12 میں سمتی رقبے $\boldsymbol{A}_1$ اور $\boldsymbol{A}_2$ دکھائے گئے ہیں جہاں بند سطح کے بیرونی عمود کو ہی سطح کی سمت دکھایا گیا ہے۔

1.6 غیر سمتی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی ضرب[14] سے مراد $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کا کوسائن ہے۔غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب غیر سمتی مقدار ہوتی ہے۔

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta_{AB} \tag{1.7}$$

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔غیر سمتی ضرب دو سمتیوں کے مابین کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب غیر سمتی مقدار ہوتا ہے جس کی وجہ سے اسے غیر سمتی ضرب بھی کہا جاتا ہے۔غیر سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی وجہ سے اسے ضرب نقطہ[15] بھی کہا جاتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ کو

[12] عمود سطح کے ساتھ نوے درجہ زاویہ بناتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_N$ کے زیر نوشت میں N، لفظ نوے کے پہلے حرف کی آواز کو ظاہر کرتا ہے۔
[13] vector area
[14] scalar product
[15] dot product

"$\boldsymbol{A}$ نقطہ $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔ بالکل سادہ ضرب کی طرح $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ کو $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی غیر سمتی ضرب میں متغیرات کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی۔

کارتیسی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیات کے درمیان 90 زاویہ پایا جاتا ہے۔ چونکہ $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیوں کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0 \tag{1.8}$$

ایک ہی سمت میں دو سمتیوں کے درمیان صفر زاویہ ہوتا ہے اور $\cos 0 = 1$ کے برابر ہے۔ اکائی سمتیہ کا طول بھی ایک کے برابر ہے لہٰذا مساوات 1.7 کے تحت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = (|\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}|)(|\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}|)(\cos 0) = (1)(1)(1) = 1$$

ہو گا۔ بقایا دو کارتیسی اکائی سمتیات کا خود غیر سمتی ضرب بھی ایک کے برابر ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 1 \tag{1.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کو کرونیکر ڈیلٹا[16] δ_{ij} کی مدد سے ایک ہی مساوات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.10}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.11}$$

کے برابر ہے یعنی $i = j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت ایک جبکہ $i \neq j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت صفر کے برابر لی جاتی ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جبکہ $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کے برابر ہیں۔ یوں i اور j برابر نہیں ہیں لہٰذا حاصل جواب صفر کے برابر ہو گا۔ اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہیں لہٰذا $i = j$ ہے اور یوں حاصل جواب ایک کے برابر ہے۔

کارتیسی تین عمودی اکائیوں کی مدد سے سمتیات کا غیر سمتی ضرب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ یوں اگر $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ دو سمتیات ہوں تب ان کا غیر سمتی ضرب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot (B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\
&= A_xB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_xB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_xB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&\quad + A_yB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_yB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_yB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&\quad + A_zB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_zB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_zB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

[16] یہ لیوپولڈ کرونیکر کے نام سے منسوب ہے۔

ہو گا۔مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کا سہارا لیتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{1.12}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا خود غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A_x^2+A_y^2+A_z^2=|\boldsymbol{A}|^2 \tag{1.13}$$

اس کے طول کے مربع کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جسے عموماً استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کا طول حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.7 اور مساوات 1.12 کی مدد سے دو سمتیوں کے مابین زاویہ معلوم کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\theta_{AB}=\cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}\right) \tag{1.14}$$

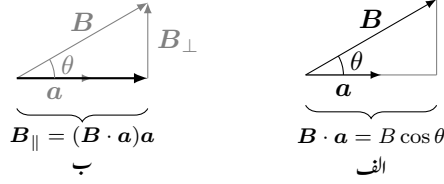
مثال 1.3: شکل 1.11 میں تکون دکھایا گیا ہے جس کے نوک $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ ہیں۔M پر زاویہ حاصل کریں۔

حل:مثال 1.2 میں $\boldsymbol{r}_{NM}=3\boldsymbol{a}_{\text{x}}-1\boldsymbol{a}_{\text{y}}-3\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ اور $\boldsymbol{r}_{PM}=0\boldsymbol{a}_{\text{x}}-4\boldsymbol{a}_{\text{y}}-2\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ حاصل کئے گئے۔$|\boldsymbol{r}_{NM}|=\sqrt{3^2+1^2+3^2}=\sqrt{19}$ اور $|\boldsymbol{r}_{PM}|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$ ہیں جبکہ

$$\boldsymbol{r}_{NM}\cdot\boldsymbol{r}_{PM}=0+4+6=10$$

کے برابر ہے۔یوں ان سمتیوں کے مابین زاویہ

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{19}\sqrt{20}}\right)=1.0321 \quad \text{rad}$$

یا $59.137°$ ہے۔

شکل 1.13: کسی بھی سمت میں سمتیہ کے جزو کا حصول۔

شکل 1.13-الف میں سمتیہ $\boldsymbol{B}$ اور اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ دکھائے گئے ہیں۔ان کا غیر سمتی ضرب

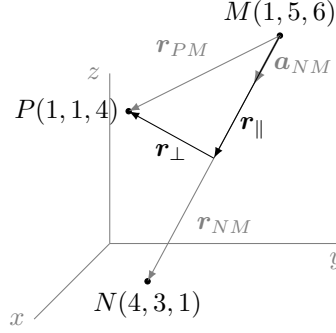
$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{a}|\cos\theta = B\cos\theta$$

کے برابر ہے۔شکل سے واضح ہے کہ یہی $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول $B_\parallel$[17] ہے۔یوں کسی بھی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{B}$ اور اس سمت کی اکائی سمتیہ کا غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔یوں حاصل طول کا اکائی سمتیہ کے ساتھ ضرب یعنی $(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ سے اکائی سمتیہ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.13-ب میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو $\boldsymbol{B}_\parallel$ دکھایا گیا ہے۔شکل سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{B}$ سے $B_\parallel \boldsymbol{a}$ منفی کرنے سے $B_\perp$ حاصل ہوتا ہے جو $\boldsymbol{B}$ کا وہ جزو ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے عمودی ہے۔

غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب دو صورتوں میں صفر کے برابر ہوتا ہے۔پہلی صورت وہ ہے جب دونوں سمتیوں میں سے کم از کم ایک سمتیہ کا طول صفر کے برابر ہو۔دوسری صورت وہ ہے جب دونوں سمتیات آپس میں عمودی ہوں۔عمودی ہونے کی صورت میں ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہو گا اور $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔یوں دو سمتیوں کے نقطہ ضرب صفر کے برابر ہونے سے اخذ کیا جاتا ہے کہ یہ آپس میں عمودی ہیں۔

مثال 1.4: شکل 1.14 میں تین نقطے $M(1,5,6)$، $N(4,3,1)$ اور $P(1,1,4)$ دئے گئے ہیں۔M اور N سے گزرتی سیدھی لکیر سے P کا عمودی فاصلہ حاصل کریں۔

حل: M سے N تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_\text{x} - 2\boldsymbol{a}_\text{y} - 5\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہے جس کا طول $|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{38}$ ہے۔یوں اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{3\boldsymbol{a}_\text{x} - 2\boldsymbol{a}_\text{y} - 5\boldsymbol{a}_\text{z}}{\sqrt{38}}$ ہو گا۔اسی طرح M سے P تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{PM} = -4\boldsymbol{a}_\text{y} - 2\boldsymbol{a}_\text{z}$

[17] $B_\parallel$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں دو متوازی لکیریں یہ بتلاتی ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا یہ وہ حصہ ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے متوازی ہے۔اسی طرح عمودی مقدار کو عموماً $\perp$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

شکل 1.14: متوازی اور عمودی اجزاء۔

ہے۔ $\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا طول

$$
\begin{aligned}
r_{\parallel} = \boldsymbol{r}_{PM} \cdot \boldsymbol{a}_{NM} &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}} \right) \\
&= \frac{0 + 8 + 10}{\sqrt{38}} = \frac{18}{\sqrt{38}}
\end{aligned}
$$

ہے یوں $\boldsymbol{a}_{NM}$ سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا سمتی جزو

$$
\boldsymbol{r}_{\parallel} = r_{\parallel}\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{18}{\sqrt{38}} \left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}} \right) = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})
$$

ہے۔ $\boldsymbol{r}_{PM}$ سے $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ منفی کرنے سے لکیر سے P تک عمودی سمتیہ $\boldsymbol{r}_{\perp}$ حاصل ہوتا ہے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{\parallel} &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) - \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \\
&= \frac{-27\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 58\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{19}
\end{aligned}
$$

جس کا طول $\frac{\sqrt{27^2+58^2+7^2}}{19} = 3.3873$ ہے۔یوں P کا لکیر سے عمودی فاصلہ 3.3873 ہے۔

$\boldsymbol{r}_{\parallel}$ اور $\boldsymbol{r}_{\perp}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان کا نقطہ ضرب

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{r}_{\perp} &= \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \left(\frac{-27\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 58\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{19} \right) \\
&= \frac{18}{722}(-81 + 116 - 35) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

صفر کے برابر ہے۔

شکل 1.14 میں اگر M پر $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی دُم رکھی جائے تب $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی نوک N کا مقام تعین کرتا ہے۔عموماً کسی بھی نقطے کا مقام محدد کے مبدا $(0,0,0)$ کی نسبت سے طے کیا جاتا ہے۔ایسا سمتیہ جس کی دُم مبدا پر رکھتے ہوئے اس کی نوک نقطے کا مقام طے کرے ہٹاو سمتیہ سمتیہ[18] کہلاتا ہے۔اگر ہٹاو سمتیہ کو مبدا سے ہٹایا جائے تب ظاہر ہے اس کی نوک اصل مقام طے کرنے سے قاصر ہو گی۔

مثال 1.5: شکل 1.14 میں M سے شروع ہوتے اور N جانب بڑھتی سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطے کا مقام تعین کرنے والا ہٹاو سمتیہ حاصل کریں۔

حل:مبدا $(0,0,0)$ سے نقطہ M تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_M = 1\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے جبکہ M سے N جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں M سے s فاصلے پر نقطہ Q تک کا سمتیہ $s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہے۔یوں مبدا سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_M + s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_Q = (1\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\text{z}}) + s\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\text{z}}}{\sqrt{38}}\right)$$

اس مساوات میں s متغیرہ ہے جسے تبدیل کرتے ہوئے سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطہ Q تک پہنچا جا سکتا ہے۔

مثال 1.6: $z = z_0$ پر $1\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کے عمودی سیدھی سطح کی مساوات حاصل کریں جہاں z_0 مستقل ہے۔

[18] displacement vector

حل:نقطہ $N_1(0,0,z_0)$ سے کسی بھی نقطہ $N_2(x,y,z)$ تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (z - z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے۔ سطح پر کسی بھی سمتیہ اور سطح کے عمودی سمتیہ آپس میں نوے درجے زاویہ پر پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔یوں اگر N_2 اسی عمودی سطح پر پایا جائے تب

$$1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot [x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (z - z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}] = z - z_0 = 0$$

ہو گا جس سے اس سطح کی مساوات $z = z_0$ حاصل ہوتی ہے۔

اس قیمت کو $\boldsymbol{r}_{21}$ میں پُر کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ حاصل ہوتا ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں۔چونکہ مبدا سے N_1 کا ہٹاو سمتیہ $\boldsymbol{r}_{10} = z_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے لہٰذا $z = z_0$ سطح پر کسی بھی نقطہ N_2 کا ہٹاو سمتیہ یعنی سطح کی سمتی مساوات $\boldsymbol{r}_{20} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + z_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو گی۔

مشق 1.3: مبدا سے $(2,1,3)$ تک کی سمتیہ ایک سیدھی سطح کی عمودی سمتیہ ہے۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $2x + y + 3z = 14$

1.7 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سمتی ضرب[19] کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جس کا طول $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کے سائن کے برابر ہے۔حاصل سمتیہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سمتیات کی عمودی سمت میں ہوتا ہے جسے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ سے ظاہر کیا جائیگا۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta_{AB}\boldsymbol{a}_N \tag{1.15}$$

---

[19] vector product

جس سیدھی سطح پر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں پائے جائیں، $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کے دو عمودی سمتیات میں سے ایک ہے۔ $\boldsymbol{a}_N$ کو **دائیں ہاتھ کے قانون**[20] سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کی ہتھیلی سیدھی اور انگوٹھے کو بقایا چار انگلیوں کے عمود میں رکھتے ہوئے پہلی انگلی کو $\boldsymbol{A}$ اور دوسری انگلی کو $\boldsymbol{B}$ کی سمت میں رکھیں۔اس صورت میں انگوٹھا $\boldsymbol{a}_N$ کی سمت میں ہو گا۔

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان صلیبی نشان $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی وجہ سے اسے **صلیبی ضرب**[21] بھی کہا جاتا ہے اور $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$ صلیب $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب نہایت اہم ہے اور انہیں الٹانے سے حاصل جواب کی سمت الٹی ہو جاتی ہے۔

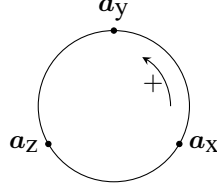
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{1.16}$$

اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Y}}$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\sin 90 = 1$ کے برابر ہے جبکہ دائیں ہاتھ کے قانون سے ان کے صلیبی ضرب کی سمت $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ حاصل ہوتی ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\text{X}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Y}}=\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے برابر ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\text{Y}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\times\boldsymbol{a}_{\text{X}}=\boldsymbol{a}_{\text{Y}}$ کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 1.16 کے تحت یوں $\boldsymbol{a}_{\text{Y}}\times\boldsymbol{a}_{\text{X}}=-\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$، $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Y}}=-\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{X}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=-\boldsymbol{a}_{\text{Y}}$ لکھے جا سکتے ہیں۔دو متوازی سمتیوں کے درمیان صفر درجے کا زاویہ ہوتا ہے اور $\sin 0=0$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_{\text{X}}\times\boldsymbol{a}_{\text{X}}=0$ کے برابر ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\text{Y}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Y}}=0$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=0$ کے برابر ہیں۔ان تمام جوابات کو ایک جگہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_{\text{X}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Y}}=\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \quad \boldsymbol{a}_{\text{Y}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=\boldsymbol{a}_{\text{X}} \quad \boldsymbol{a}_{\text{Z}}\times\boldsymbol{a}_{\text{X}}=\boldsymbol{a}_{\text{Y}}\\ &\boldsymbol{a}_{\text{X}}\times\boldsymbol{a}_{\text{X}}=0 \quad\;\; \boldsymbol{a}_{\text{Y}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Y}}=0 \quad\;\; \boldsymbol{a}_{\text{Z}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

یہی جوابات شکل 1.15 کی مدد سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔اس شکل میں گھڑی کی الٹ سمت مثبت سمت ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{a}_{\text{X}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Y}}$ حاصل کرنا ہو تو شکل میں $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ سے شروع ہو کر $\boldsymbol{a}_{\text{Y}}$ کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ حاصل ہوتا ہے۔ساتھ ہی ساتھ چونکہ $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\text{Y}}$ جانے کی خاطر مثبت راستہ اختیار کیا گیا لہٰذا جواب مثبت یعنی $+\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہو گا۔اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\times\boldsymbol{a}_{\text{Y}}$ حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\text{Y}}$ جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ حاصل ہوتا ہے البتہ یہ راستہ گھڑی کے الٹ سمت یعنی منفی سمت میں ہے لہٰذا جواب $-\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ہو گا۔

---

[20] right hand rule
[21] cross product

شکل 1.15: صلیبی ضرب کا حصول۔

مساوات 1.17 کی مدد سے $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + B_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کی صلیبی ضرب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\text{z}}) \times (B_x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + B_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\text{z}})\\
&= A_xB_x\boldsymbol{a}_{\text{x}}\times\boldsymbol{a}_{\text{x}} + A_xB_y\boldsymbol{a}_{\text{x}}\times\boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_xB_z\boldsymbol{a}_{\text{x}}\times\boldsymbol{a}_{\text{z}}\\
&\quad + A_yB_x\boldsymbol{a}_{\text{y}}\times\boldsymbol{a}_{\text{x}} + A_yB_y\boldsymbol{a}_{\text{y}}\times\boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_yB_z\boldsymbol{a}_{\text{y}}\times\boldsymbol{a}_{\text{z}}\\
&\quad + A_zB_x\boldsymbol{a}_{\text{z}}\times\boldsymbol{a}_{\text{x}} + A_zB_y\boldsymbol{a}_{\text{z}}\times\boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_zB_z\boldsymbol{a}_{\text{z}}\times\boldsymbol{a}_{\text{z}}
\end{aligned}$$

کو

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{a}_{\text{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{a}_{\text{z}} \tag{1.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس جواب کو قالب کے مطلق قیمت کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\text{x}} & \boldsymbol{a}_{\text{y}} & \boldsymbol{a}_{\text{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.19}$$

مندرجہ بالا قالب کو کتاب کے آخر میں صفحہ 837 پر ضمیمے میں آپ کے آسانی کے لئے دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔اس ضمیمے کو ایک مرتبہ دیکھ لیں۔ یوں اگر $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 4\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہوں تب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\text{x}} & \boldsymbol{a}_{\text{y}} & \boldsymbol{a}_{\text{z}}\\ 2 & -3 & 1\\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix}\\
&= [(-3)(-4) - (1)(5)]\boldsymbol{a}_{\text{x}} - [(2)(-4) - (1)(6)]\boldsymbol{a}_{\text{y}} + [(2)(5) - (-3)(6)]\boldsymbol{a}_{\text{z}}\\
&= 7\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 14\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 28\boldsymbol{a}_{\text{z}}
\end{aligned}$$

ہو گا۔

مثال 1.7: $N_1(2,3,1)$، $N_2(1,6,5)$ اور $N_3(-2,-3,2)$ سیدھی سطح پر پائے جاتے ہیں۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{21} &= (1-2)\boldsymbol{a}_\text{X} + (6-3)\boldsymbol{a}_\text{y} + (5-1)\boldsymbol{a}_\text{Z} = -1\boldsymbol{a}_\text{X} + 3\boldsymbol{a}_\text{y} + 4\boldsymbol{a}_\text{Z} \\
\boldsymbol{r}_{31} &= (-2-2)\boldsymbol{a}_\text{X} + (-3-3)\boldsymbol{a}_\text{y} + (2-1)\boldsymbol{a}_\text{Z} = -4\boldsymbol{a}_\text{X} - 6\boldsymbol{a}_\text{y} + 1\boldsymbol{a}_\text{Z}
\end{aligned}$$

کے سمتی ضرب سے ان کا عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_N &= (-1\boldsymbol{a}_\text{X} + 3\boldsymbol{a}_\text{y} + 4\boldsymbol{a}_\text{Z}) \times (-4\boldsymbol{a}_\text{X} - 6\boldsymbol{a}_\text{y} + 1\boldsymbol{a}_\text{Z}) \\
&= 6\boldsymbol{a}_\text{Z} + 1\boldsymbol{a}_\text{y} + 12\boldsymbol{a}_\text{Z} + 3\boldsymbol{a}_\text{X} - 16\boldsymbol{a}_\text{y} + 24\boldsymbol{a}_\text{X} \\
&= 27\boldsymbol{a}_\text{X} - 15\boldsymbol{a}_\text{y} + 18\boldsymbol{a}_\text{Z}
\end{aligned}$$

سطح پر دئے گئے تین نقطوں سے سطح پر کسی بھی نقطہ $N_4(x,y,z)$ تک کا سمتیہ اس عمودی سمتیہ کے نوے درجے زاویہ پر ہو گا اور یوں ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔N_1 سے N_4 تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{41} = (x-2)\boldsymbol{a}_\text{X} + (y-3)\boldsymbol{a}_\text{y} + (z-1)\boldsymbol{a}_\text{Z}$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{r}_{41} \cdot \boldsymbol{r}_N = [(x-2)\boldsymbol{a}_\text{X} + (y-3)\boldsymbol{a}_\text{y} + (z-1)\boldsymbol{a}_\text{Z}] \cdot (27\boldsymbol{a}_\text{X} - 15\boldsymbol{a}_\text{y} + 18\boldsymbol{a}_\text{Z}) = 0$$

لکھ کر

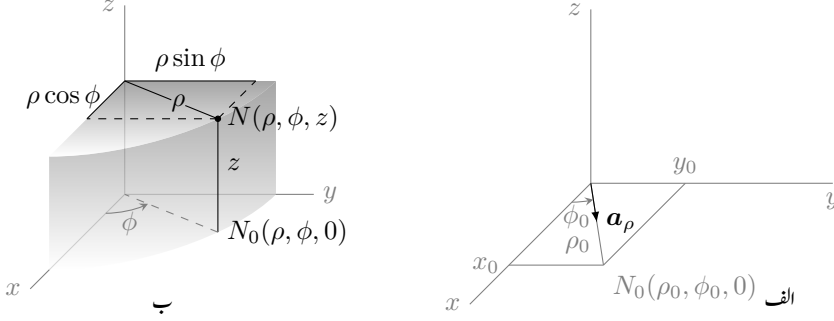
$$27(x-2) - 15(y-3) + 18(z-1) = 0$$

سے

$$27x - 15y + 18z = 27$$

سیدھی سطح کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ایسی مساوات میں x، y اور z کے عددی سر عمودی سمتیہ میں $\boldsymbol{a}_\text{X}$، $\boldsymbol{a}_\text{y}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{Z}$ کے عددی سر ہوتے ہیں۔موجودہ مساوات میں عددی سر 27، 15− اور 18 ہیں۔

سطح کی مساوات سے $z = \frac{9-9x+5y}{6}$ لکھا جا سکتا ہے۔ سطح پر N_4 کی تعین کنندہ مساوات $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_\text{X} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + z\boldsymbol{a}_\text{Z}$ میں z کی قیمت پُر کرتے ہوئے سطح کی سمتی مساوات

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_\text{X} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + \left(\frac{9-9x+5y}{6}\right)\boldsymbol{a}_\text{Z}$$

شکل 1.16: نلکی محدد

لکھی جا سکتی ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں جبکہ z کو بطور تابع متغیرہ لکھا گیا ہے۔

مشق 1.4: $\boldsymbol{A} = 1\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{a}_B\times\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\times(\boldsymbol{a}_{\text{y}}\times\boldsymbol{B})$ حاصل کریں۔

خلاء میں کسی بھی نقطے کا مقام کارتیسی محدد کے علاوہ دیگر طرز کے محدد سے بھی تعین کیا جا سکتا ہے۔ماہرین طبیعیات تقریباً ایک درجن اقسام کے محددی نظام استعمال کرتے ہیں۔ہم اس کتاب میں کارتیسی نظام کے علاوہ دو مزید اقسام کے محددی نظام استعمال کریں گے۔آئیں انہیں پر غور کریں۔

1.8 گول نلکی محدد

کارتیسی نظام میں کسی بھی نقطے کا مقام مبدا سے x، y اور z سمتوں میں فاصلوں سے طے کیا جاتا ہے۔آئیں اب ایسا نظام دیکھیں جس میں ایک عدد زاویہ اور دو عدد فاصلے استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے کا مقام طے ہو۔

شکل 1.16-الف میں $z = 0$ سطح پر نقطہ N_0 دکھایا گیا ہے جسے کارتیسی محدد میں $N_0(x_0, y_0, 0)$ لکھا جائے گا۔اگر مبدا سے N_0 تک سیدھی لکیر کی لمبائی ρ_0 اور x محدد سے اس لکیر کا زاویہ ϕ_0 ہو تب اسی نقطے کو **گول نلکی محدد**[22] کے نظام میں $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$ لکھا جاتا ہے۔اس کتاب میں گول نلکی محدد کا نام چھوٹا کر کے اسے **نلکی محدد** پکارا جائے گا۔ اگر $z = 0$ سطح پر مبدا سے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ ہو تب مبدا سے نقطے تک سمتیہ کو

$$\boldsymbol{\rho} = \rho_0 \boldsymbol{a}_\rho \qquad (\phi = \phi_0, \quad z = 0) \tag{1.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ نلکی اور کارتیسی نظام میں z محدد یکساں ہیں۔

شکل 1.16 سے کارتیسی اور نلکی محدد کے تعلق اخذ کئے جا سکتے ہیں۔یوں نلکی محدد کے متغیرات (ρ, ϕ, z) سے کارتیسی متغیرات (x, y, z) یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{1.21}$$

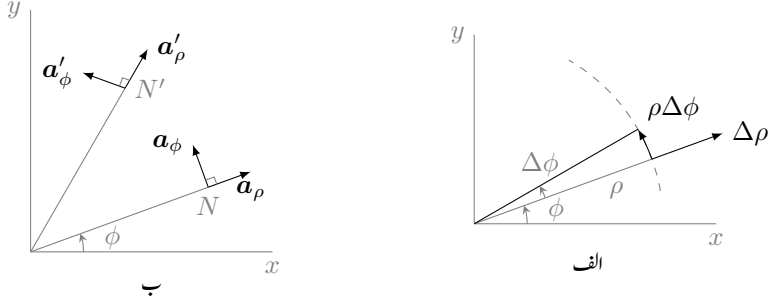
اسی طرح (x, y, z) سے (ρ, ϕ, z) یوں حاصل کئے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (\rho \geq 0) \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \tag{1.22}$$

درج بالا دونوں تعلقات کو کتاب کے آخر میں صفحہ 839 پر ضمیمے میں دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں رداس کی صرف مثبت قیمت لی گئی۔ہم رداس کی قیمت مثبت ہی لیتے ہیں۔

شکل 1.17-الف میں ϕ زاویہ پر ρ رداس کا ہلکی سیاہی میں دکھایا سمتیہ نقطہ N ہے۔ اس شکل میں ϕ اور z تبدیل کئے بغیر ρ کو $\Delta\rho$ بڑھتا دکھایا گیا ہے۔اس صورت میں سمتیہ کی نوک $\Delta\rho$ فاصلہ طے کرتی ہے۔نقطہ N سے $\Delta\rho$ کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_\rho$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.17-الف میں ρ اور z تبدیل کئے بغیر ϕ کو $\Delta\phi$ بڑھا کر اسی سمتیہ کو گاڑھی سیاہی میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سمتیہ کی نوک نے ρ رداس کے گول دائرے پر حرکت کرتے ہوئے $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے

[22] cylindrical coordinate system

شکل 1.17: نلکی محدد میں متغیرات کے تبدیلی سے فاصلے کا حصول اور اکائی سمتیات۔

کیا۔یوں اگر زاویہ کو 0 تا 2π ریڈیئن تبدیل کیا جائے تو سمتیہ کی نوک گول دائرے پر ایک مکمل چکر کاٹے گی۔ جیسے جیسے $\Delta\phi$ کو کم سے کم کیا جائے ویسے ویسے $\rho\Delta\phi$ گول دائرے کے مماس کی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ $\mathrm{d}\phi$ کی صورت میں $\rho\,\mathrm{d}\phi$ گول دائرے کا مماس ہو گا۔نقطہ N پر بڑھتے ϕ جانب مماس کی سمت میں اکائی سمتیہ کو $\boldsymbol{a}_\phi$ لکھا جاتا ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

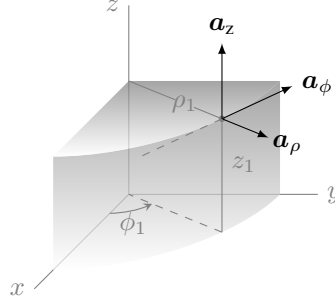
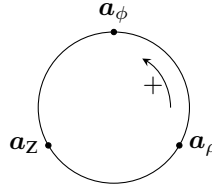
اسی طرح اگر نقطہ N پر صرف z کو Δz تبدیل کیا جائے تب سمتیہ کی نوک Δz فاصلہ طے کرے گی۔ Δz کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی تیسری اور آخری بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ نلکی محدد کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ مل کر دائیں ہاتھ کا عمودی نظام دیتے ہیں۔نقطہ (ρ_1, ϕ_1, z_1) پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔$\boldsymbol{a}_\rho$ گول سطح $\rho = \rho_1$ کے عمودی ہے۔یہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ سیدھی سطح $\phi = \phi_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $z = z_1$ سطح پر پایا جاتا ہے اور $\rho = \rho_1$ نلکی سطح کا مماس ہے۔$\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ اکائی سمتیہ $z = z_1$ سطح کے عمودی ہے۔یہ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔

دائیں ہاتھ کے عمودی نظام میں سمتی ضرب کا حاصل جواب صفحہ 21 پر دئے گئے دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے ۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_\mathrm{z}, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_\mathrm{z} = \boldsymbol{a}_\rho, \quad \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi \tag{1.23}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہی جوابات شکل 1.19 سے بھی اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

کسی سمتیہ کا خود سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\rho = 0, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_\phi = 0, \quad \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{z} = 0 \tag{1.24}$$

شکل 1.18: نلکی محدد کے اکائی سمتیات۔

شکل 1.19: صلیبی ضرب کی حاصل اکائی سمتیہ۔

لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی اکائی سمتیہ کا خود غیر سمتی ضرب ایک کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{Z}} = 1 \tag{1.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح کسی بھی دو عمودی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{Z}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = 0 \tag{1.26}$$

غیر سمتی ضرب کو کرونیکر ڈیلٹا کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.27}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.28}$$

کے برابر ہے۔

آپ دیکھتے ہیں کہ کسی بھی نقطہ $N(\rho, \phi, z)$ پر اکائی سمتیات حاصل کرنے کی خاطر محدد کے متغیرات ρ، ϕ اور z کو باری باری انتہائی کم بڑھایا جاتا ہے۔ جس سمت میں نقطہ حرکت کرے، اسی سمت میں اکائی سمتیہ ہو گی۔ شکل 1.17-ب میں دو مختلف نقاط N اور N' پر نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات کی سمت کا دارومدار اس نقطے پر ہے جہاں انہیں حاصل کیا جائے۔ آپ جانتے ہیں کہ کارتیسی نظام میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے کارتیسی اکائی سمتیات تبدیل نہیں ہوتے۔ یوں نلکی محدد کے اکائی سمتیات اٹل نہیں ہیں۔ یہ ایک انتہائی اہم حقیقت ہے جو تکمل لیتے وقت پیچیدگیاں پیدا کرتا ہے۔ تکمل لیتے وقت کارتیسی اکائی سمتیات اٹل ہونے کی بنا پر تکمل کے باہر لے جائے جا سکتے ہیں جبکہ نلکی محدد کے $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ اکائی سمتیات کو تکمل کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ N پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\text{z}$ آپس میں عمودی ہوں گے جبکہ کسی اور نقطہ N' پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}'_\rho$، $\boldsymbol{a}'_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\text{z}$ آپس میں عمودی ہوں گے۔

1.8.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب

شکل 1.20-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\text{x}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{y}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\text{x}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے جبکہ اکائی سمتیات کی لمبائی ایک ہوتی ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\text{x} = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.29}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\text{y}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ - \phi)$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\text{y} = (1)(1)[\cos(90^\circ - \phi)] = \sin\phi \tag{1.30}$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات میں

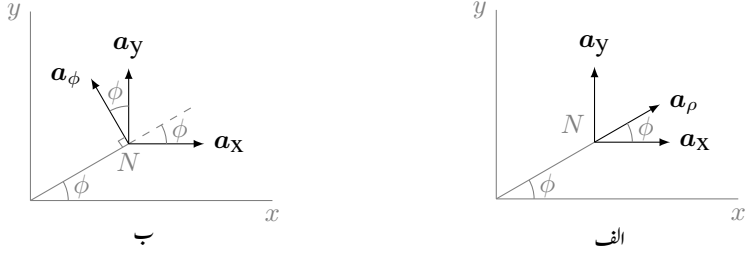
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

کو استعمال کرتے ہوئے $\cos(90^\circ - \phi) = \sin\phi$ لکھا گیا ہے۔ شکل 1.20-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\phi$، $\boldsymbol{a}_\text{x}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{y}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\text{x}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ + \phi)$ ہے لہٰذا

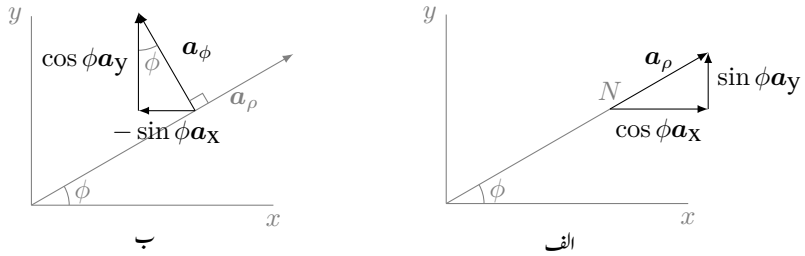
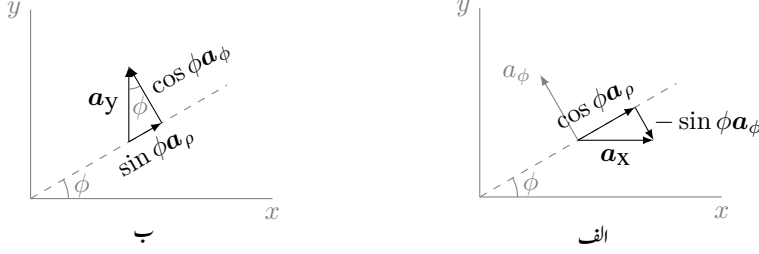
$$\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\text{x} = (1)(1)[\cos(90^\circ + \phi)] = -\sin\phi \tag{1.31}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\text{y}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\text{y} = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.32}$$

کے برابر ہے۔ $\boldsymbol{a}_\text{z}$ کا $\boldsymbol{a}_\text{x}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{y}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے۔ ان تمام غیر سمتی ضرب کو جدول 1.1 میں یکجا کیا گیا ہے۔

شکل 1.20: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

جدول 1.1: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\text{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\text{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\text{x}}$	
0	$\sin\phi$	$\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\rho}$
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$
1	0	0	$\boldsymbol{a}_{\text{z}}$

شکل 1.21: $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

شکل 1.22: $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ۔

1.8.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق

شکل 1.21-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔$\boldsymbol{a}_\rho$ کی لمبائی ایک کے برابر ہے۔یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_\rho &= \cos\phi\,\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \sin\phi\,\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\end{aligned} \tag{1.33}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔شکل 1.21-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_\phi &= -\sin\phi\,\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \cos\phi\,\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\end{aligned} \tag{1.34}$$

جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔

شکل 1.22-الف میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔جس نقطے پر ایسا درکار ہو، اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ کی دُم رکھیں۔مبدا سے نقطے تک نقطہ دار سیدھی لکیر کھینچتے ہوئے اسے مزید آگے بڑھائیں۔اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اسی لکیر کی سمت میں ہو گا جبکہ $\boldsymbol{a}_\phi$ لکیر کے ساتھ نوے درجے کا زاویہ بنائے گا۔شکل میں $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھایا گیا ہے۔جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود بنائیں۔صاف ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ان میں سے ایک سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں اور دوسرا سمتیہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کی الٹ جانب کو ہو گا۔یوں

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{x} = \cos\phi\,\boldsymbol{a}_\rho - \sin\phi\,\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.22-ب میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں نقطہ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی دُم رکھتے ہوئے اس کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود کھینچا گیا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \sin\phi \boldsymbol{a}_{\rho} + \cos\phi \boldsymbol{a}_{\phi} \tag{1.36}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں مساوات 1.33 تا مساوات 1.36 کو جدول 1.1 کی مدد سے حاصل کریں۔ کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی یا نلکی محدد میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ &= A_\rho \boldsymbol{a}_{\rho} + A_\phi \boldsymbol{a}_{\phi} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \end{aligned} \tag{1.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان میں پہلی مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_x \\ \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_y \\ \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_z \end{aligned} \tag{1.38}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر A_x، A_y اور A_z درکار ہوتے ہیں جنہیں مندرجہ بالا مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.37 کے نچلے حصے کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} + A_\phi \boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} + A_z \boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_\rho \\ \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} + A_\phi \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} + A_z \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_\phi \\ \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} + A_\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_z \end{aligned} \tag{1.39}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{A}$ کو نلکی نظام میں لکھنے کی خاطر A_ρ، A_ϕ اور A_z کو مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

آئیں $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کو کارتیسی نظام میں لکھیں۔ یوں $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\rho}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنا مطلوب ہے۔ مساوات 1.38 کے مطابق A_x حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{A}$ لینا ہو گا۔ جدول 1.1 کے استعمال سے

$$A_x = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = \cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح جدول کو استعمال کرتے ہوئے

$$A_y = \boldsymbol{a}_\text{y} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\text{y} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \sin\phi$$

اور

$$A_z = \boldsymbol{a}_\text{z} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\text{z} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_\text{x} + A_y\boldsymbol{a}_\text{y} + A_z\boldsymbol{a}_\text{z}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi\boldsymbol{a}_\text{x} + \sin\phi\boldsymbol{a}_\text{y}$$

لکھا جائے گا۔ یہی جواب مساوات 1.33 میں بھی حاصل کیا گیا تھا۔

$\boldsymbol{a}_\phi$ کو بھی اسی طرح کارتیسی نظام میں لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے اس سمتیہ کا باری باری $\boldsymbol{a}_\text{x}$، $\boldsymbol{a}_\text{y}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{z}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}A_x &= \boldsymbol{a}_\text{x} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = -\sin\phi\\ A_y &= \boldsymbol{a}_\text{y} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = \cos\phi\\ A_z &= \boldsymbol{a}_\text{z} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0\end{aligned}$$

یوں

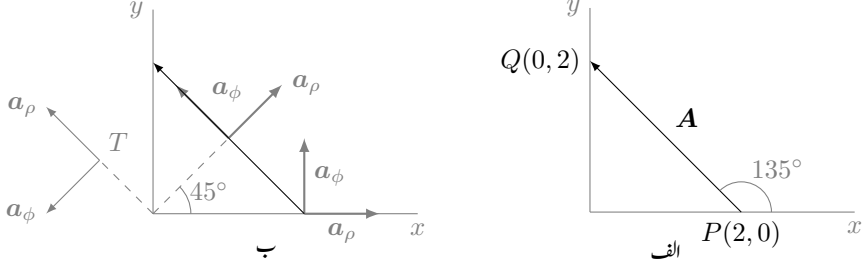
$$\boldsymbol{a}_\phi = A_x\boldsymbol{a}_\text{x} + A_y\boldsymbol{a}_\text{y} + A_z\boldsymbol{a}_\text{z} = -\sin\phi\boldsymbol{a}_\text{x} + \cos\phi\boldsymbol{a}_\text{y}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب مساوات 1.34 بھی دیتا ہے۔

آپ سے گزارش ہے کہ جدول 1.34 کو یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔اپنے آپ میں یہ صلاحیت پیدا کریں کہ ان جوابات کو آپ جلد اخذ کر سکیں۔

مشق 1.5: $\boldsymbol{a}_\text{x}$، $\boldsymbol{a}_\text{y}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{z}$ کو جدول 1.1 کی مدد سے نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_\text{x} &= \cos\phi\boldsymbol{a}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{a}_\phi\\ \boldsymbol{a}_\text{y} &= \sin\phi\boldsymbol{a}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{a}_\phi\\ \boldsymbol{a}_\text{z} &= \boldsymbol{a}_\text{z}\end{aligned}$$

شکل 1.23: کارتیسی اور نلکی محدد میں سمتیہ۔

شکل 1.23 میں $P(2,0)$ سے $Q(0,2)$ تک سمتیہ $\boldsymbol{A}$ دکھایا گیا ہے۔ کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} \tag{1.40}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس سمتیہ کی مطلق قیمت

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} = \sqrt{(-2\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{y}}) \cdot (-2\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{y}})} = \sqrt{8}$$

ہے۔ آئیں اسی سمتیہ کو نلکی محدد میں لکھیں۔ ایسا کرنے کی خاطر A_ρ اور A_ϕ درکار ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{A}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} A_\rho &= \boldsymbol{a}_\rho \cdot (-2\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{y}}) = -2\cos\phi + 2\sin\phi \\ A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi \cdot (-2\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{y}}) = 2\sin\phi + 2\cos\phi \end{aligned}$$

یوں

$$\boldsymbol{A} = 2(-\cos\phi + \sin\phi)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin\phi + \cos\phi)\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ اس کی مطلق قیمت کیا حاصل ہوتی ہے۔ اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho =$

$\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 1$ ،1 اور $\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0$ استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} \\
&= \sqrt{2^2(-\cos\phi + \sin\phi)^2 + 2^2(\sin\phi + \cos\phi)^2} \\
&= \sqrt{4(\cos^2\phi + \sin^2\phi - 2\cos\phi\sin\phi) + 4(\cos^2\phi + \sin^2\phi + 2\cos\phi\sin\phi)} \\
&= \sqrt{8(\cos^2\phi + \sin^2\phi)} \\
&= \sqrt{8}
\end{aligned}
$$

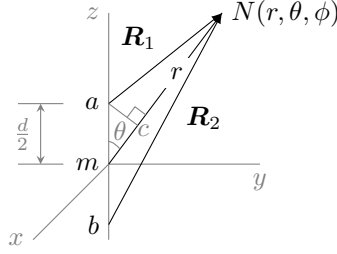
حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یقیناً سمتیہ کی مطلق قیمت محدد کے نظام پر منحصر نہیں۔

مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 ایک ہی سمتیہ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔یہاں کارتیسی نظام کا استعمال نہایت آسان ثابت ہوا۔ آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کہیں مسئلوں میں نلکی محدد کا استعمال زیادہ آسان ہو گا۔آئیں مساوات 1.40 پر مزید غور کریں۔اس مساوات میں اکائی سمتیات از خود اٹل نہیں ہیں۔ان کی سمتوں کا دارومدار زاویہ ϕ پر ہے۔شکل 1.23-ب میں $\phi = 0°$، $\phi = 45°$ اور $\phi = 135°$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔نقطہ P یعنی $\phi = 0°$ پر مساوات 1.41

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=0°} &= 2(-\cos 0° + \sin 0°)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 0° + \cos 0°)\boldsymbol{a}_\phi \\
&= -2\boldsymbol{a}_\rho + 2\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 0°$ پر $\boldsymbol{A}$ کو دو عدد سمتیات کے مجموعہ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جن میں پہلی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کے الٹ سمت میں ہے اور اس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ دوسری سمتیہ کی مقدار دو اور اس کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہی ہے۔1.23-ب میں نقطہ P پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت واقع بڑھتی $\boldsymbol{a}_\phi$ اور گھٹتی $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi = 0°$ پر حاصل کیا گیا ہے۔$\phi = 0°$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ برابر ہوتے ہیں اور اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ برابر ہوتے ہیں۔یہی وجہ ہے کہ مساوات 1.40 میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پُر کرنے سے مندرجہ بالا مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$\phi = 45°$ پر مساوات 1.41

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=45°} &= 2(-\cos 45° + \sin 45°)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 45° + \cos 45°)\boldsymbol{a}_\phi \\
&= 2(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho + 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi \\
&= \sqrt{8}\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
$$

شکل 1.24: جفت قطب کے برقی بار سے دور نقطے تک فاصلے۔

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 45^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہے اور اس کی لمبائی $\sqrt{8}$ ہے۔ شکل 1.23-ب میں یہ حقیقت واضح ہے کہ $\phi = 45^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ ہی ہے۔ یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi = 45^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔ شکل میں اکائی سمتیات کو عین $\boldsymbol{A}$ کے اوپر کھینچا گیا ہے تا کہ سمتیات کی سمتوں کا موازنہ آسانی سے کیا جا سکے۔

آپ نے دیکھا کہ نلکی محدد میں سمتیہ کی مساوات کا دارومدار اس نقطے پر ہے جس نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کئے جائیں۔آئیں دیکھیں کہ $\phi = 135^\circ$ پر پائے جانے والے نقطہ T کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کیسا لکھا جائے گا۔ مساوات 1.41 میں $\phi = 135^\circ$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=135^\circ} &= 2(-\cos 135^\circ + \sin 135^\circ)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 135^\circ + \cos 135^\circ)\boldsymbol{a}_\phi \\
&= 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho + 2(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi \\
&= \sqrt{8}\boldsymbol{a}_\rho
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 135^\circ$ کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں $\sqrt{8}$ لمبائی کا سمتیہ لکھا جا سکتا ہے۔ شکل سے یہ حقیقت واضح ہے۔

مثال 1.8: شکل 1.24 میں z محدد پر نقطہ $a(0,0,\frac{d}{2})$ پر مثبت برقی بار[23] $+Q$ اور نقطہ $b(0,0,-\frac{d}{2})$ پر منفی برقی بار $-Q$ پائے جاتے ہیں۔ایسے دو برابر لیکن الٹ علامت کے دو قریب قریب پائے جانے والے برقی باروں کے جوڑی کو جفت قطب[24] کہتے ہیں۔ دکھائے گئے سمتی فاصلوں $\boldsymbol{R}_1$ اور $\boldsymbol{R}_2$ کو کروی محدد میں لکھیں۔

[23] electric charge
[24] dipole

حل: m سے N تک فاصلہ r ہے اور اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔نقطہ a سے r پر عمودی لکیر لگائی گئی ہے جو اسے c پر ملتی ہے۔یوں ac کی سمت کروی محدد کے اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی سمت میں ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے $mc = \frac{d}{2}\cos\theta$ اور $ac = \frac{d}{2}\sin\theta$ لکھے جا سکتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{R}_1$ کو ہم a سے c تک سمتیہ $\frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$ اور c سے N تک سمتیہ $(r-\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کے مجموعے کی شکل میں

$$\boldsymbol{R}_1 = \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta + (r-\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{1.42}$$

لکھ سکتے ہیں۔ہم اسی طرح شکل 1.24 میں N سے m تک لکیر کو m سے آگے بڑھا کر b سے اس پر عمودی لکیر کھینچ کر شکل کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات بھی لکھ سکتے ہیں البتہ ایسا کرنے کی بجائے آئیں $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات تحلیلی طریقے سے حاصل کریں۔شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{R}_2 = \frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور کروی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ استعمال کئے گئے۔کروی محدد میں کسی بھی لکیر کی طرح

$$\boldsymbol{R}_2 = A_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں $A_r = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سے حاصل کریں۔

$$A_r = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{d}{2}\cos\theta + r$$

اسی طرح $A_\theta = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_\theta$ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\theta = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\boldsymbol{a}_\theta = -\frac{d}{2}\sin\theta$$

اسی طرح $A_\phi = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_\phi$ لکھتے ہوئے $A_\phi = 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

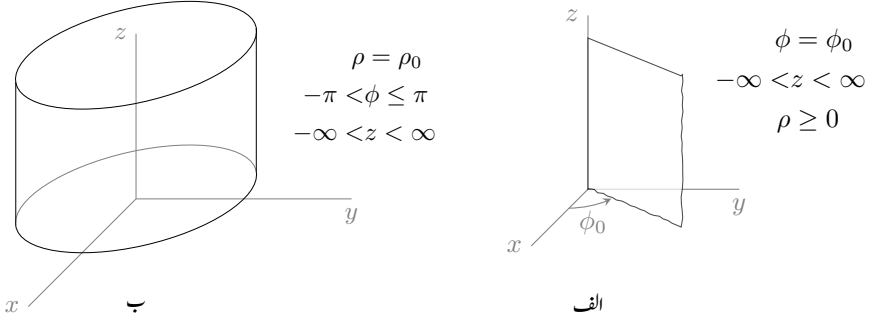
$$\boldsymbol{R}_2 = \left(\frac{d}{2}\cos\theta + r\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta \tag{1.43}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

$\rho = \rho_0$
$-\pi < \phi \leq \pi$
$-\infty < z < \infty$

ب

$\phi = \phi_0$
$-\infty < z < \infty$
$\rho \geq 0$

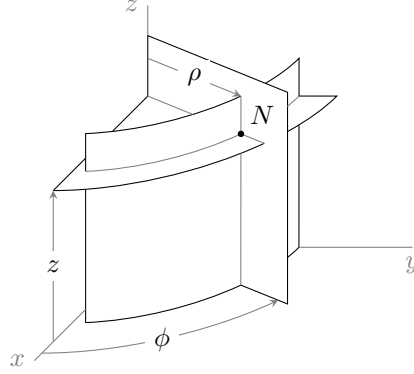
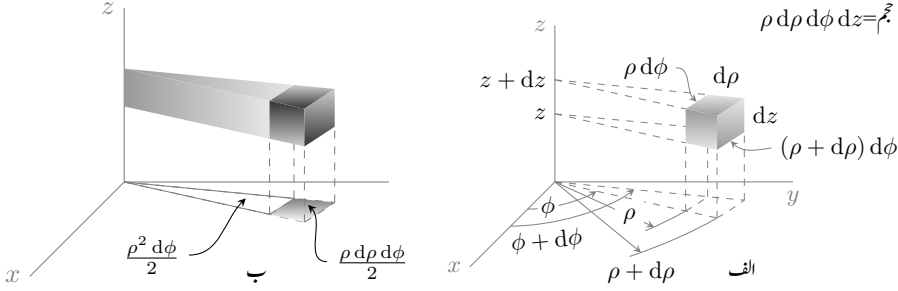
الف

شکل 1.25: $\phi = \phi_0$ اور $\rho = \rho_0$ سطحیں۔

1.8.3 نلکی لامحدود سطحیں

شکل 1.25-الف میں ϕ تبدیل کئے بغیر ρ اور z کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\phi = \phi_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔یہ سطح نلکی شکل رکھتی ہے جس کا اوپر والا منہ اور نچلا منہ کھلے ہیں یعنی ان پر ڈھکن نہیں۔شکل-ب میں ρ تبدیل کئے بغیر ϕ اور z کو تبدیل کرتے ہوئے $\rho = \rho_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔ان دونوں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے ان اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-الف میں ρ کی قیمت صرف مثبت جبکہ z کی قیمت مثبت یا منفی ممکن ہے۔شکل-ب میں زاویہ کل 2π ریڈیئن تبدیل ہو سکتا ہے۔یوں زاویے کا مثبت حد π ریڈیئن یعنی 180 درجہ ہے جبکہ اس کا منفی[25] حد $-\pi$ یعنی -180 درجے ہے۔نلکی محدد اور کارتیسی نظام دونوں میں $z = z_0$ سطح یکساں بنتی ہے۔

جیسے شکل 1.26 میں دکھایا گیا ہے، $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔اسی طرح $\rho = \rho_1$ اور $z = z_1$ سطحیں ایک گول دائرے پر ملتے ہیں جبکہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔$\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں صرف اور صرف ایک ہی نقطہ N پر اکٹھے ملتے ہیں۔ نلکی محدد میں کسی بھی نقطے کا مقام اسی طرح تین سطحوں کے متقاطع نقطہ سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ $(0, 0, z)$ تک پہنچنے کی خاطر ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

کسی بھی نقطہ $N(\rho_1, \phi_1, z_1)$ پر $\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں بنانے کے بعد اگر نلکی محدد کے متغیرات کو $\mathrm{d}\rho$، $\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}z$ بڑھا کر مزید تین سطحیں کھینچے جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر منحرف مکعب نما[26] کو گھیریں گے جسے شکل 1.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔رداسی سمت میں اس منحرف مکعب کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}\rho$ جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت کے

[25] حقیقت میں منفی حد $-180°$ کو نہیں چھوتا۔اگر منفی حد $-180°$ کو چھوئے تب منفی x محدد دو مرتبہ شامل ہوتا ہے۔
[26] چھوٹے مکعب نما کو اس کتاب میں مکعب ہی کہا جائے گا۔

شکل 1.26: نلکی محدد کے تین سطحیں۔

شکل 1.27: نلکی محدد میں انتہائی چھوٹی حجم۔

اطراف کی لمبائی dz ہے۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت میں z محدد کے قریبی گول طرف کی لمبائی $\rho \, \mathrm{d}\phi$ جبکہ محدد سے دور طرف کی گول لمبائی $(\rho + \mathrm{d}\rho) \, \mathrm{d}\phi$ ہے۔ جیسے جیسے اس منحرف مکعب کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے یہ ایک درست مکعب کی صورت اختیار کرتا ہے لہٰذا نہایت چھوٹے حجم کو مکعب تصور کرتے ہوئے اس کا حجم $\rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-ب میں چھوٹے منحرف مکعب کو رداسی سمت میں z محدد تک بڑھا کر پچر یا فانہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر اس کا عمودی سایہ بھی دکھایا گیا ہے۔ ρ رداس کے گول دائرے کے مبدا سے $\mathrm{d}\phi$ زاویے پر دو لکیریں دائرے تک کھینچنے سے $\frac{\rho^2 \, \mathrm{d}\phi}{2}$ رقبہ گھیرا جاتا ہے۔ اگر رداس $\rho + \mathrm{d}\rho$ ہو تب رقبہ $\frac{(\rho + \mathrm{d}\rho)^2 \, \mathrm{d}\phi}{2}$ ہو گا۔ یوں

شکل-ب میں چھوٹے مکعب کے سایہ کا رقبہ $\mathrm{d}S$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \frac{(\rho+\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&= \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi + 2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + (\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&= \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + \frac{(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&\approx \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

ہو گا۔یہاں آخری قدم پر d کی علامت، مجموعہ کے پہلے رکن میں دو مرتبہ جبکہ دوسرے رکن میں تین مرتبہ ہے۔یوں دوسرے اور پہلے رکن کی نسبت $\frac{\mathrm{d}\rho}{2\rho} = \frac{0.5(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi}$ ہو گی۔$\mathrm{d}\rho$ کو کم سے کم[27] کرتے ہوئے دوسرے رکن کو قابل نظر انداز بناتے ہوئے نظرانداز کیا گیا ہے۔یوں $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ رقبہ اور $\mathrm{d}z$ بلندی کے مکعب کا حجم $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔

شکل 1.27 کو درست مکعب تصور کرتے ہوئے، اس کے اطراف کی لمبائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$، $\mathrm{d}\rho$ اور $\mathrm{d}z$ لی جاتی ہے۔یوں مکعب کے نچلی اور اوپر سطح کا رقبہ مستطیل کے اطراف کو ضرب دیتے ہوئے $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح سامنے اور پیچھے سطحوں کا رقبہ $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$ جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

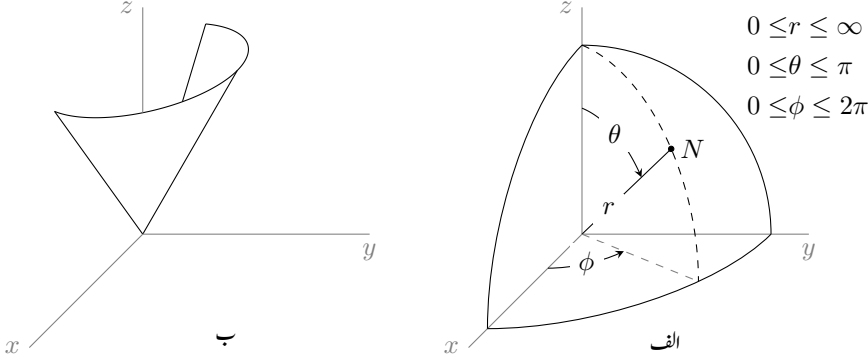
شکل 1.27-الف میں نلکی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(\rho,\phi,z)$ کونے سے $N'(\rho+\mathrm{d}\rho,\phi+\mathrm{d}\phi,z+\mathrm{d}z)$ کونے پہنچتے ہیں۔N سے N' تک سمتیہ کو

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{1.44}
$$

لکھا جاتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے مابین سمتی فاصلے کو ظاہر کرتی ہے۔

1.9 کروی محدد

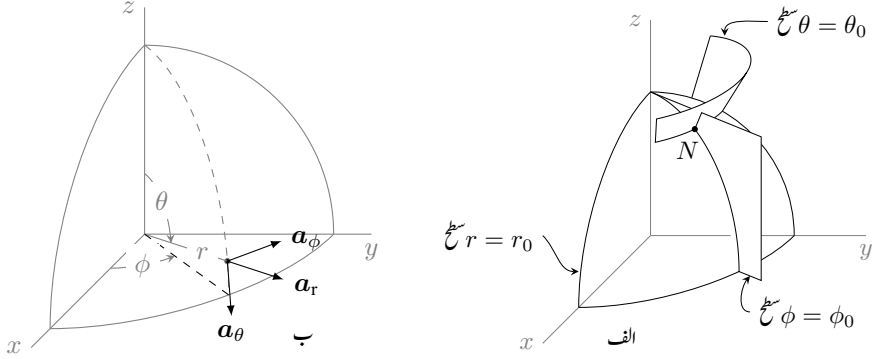
سیدھی لکیروں اور سیدھی سطحوں کو کارتیسی محدد میں زیادہ آسانی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ نلکی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے نلکی محدد بہتر ثابت ہوتا ہے۔اسی طرح کروی اشکال کے سطحوں کو کروی محدد میں باآسانی لکھا جا سکتا ہے۔آئیں کروی نظام پر غور کریں۔

[27] کسی بھی متغیرہ مثلاً ρ میں چھوٹی سی تبدیلی کو $\Delta\rho$ لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}\rho$ لکھا جاتا ہے۔$\mathrm{d}\rho$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}\rho \to 0$ ہوتا ہے۔

شکل 1.28: (الف) کروی محدد کے متغیرات۔ (ب) $\theta = \theta_0$ سطح کا کچھ حصہ۔

شکل 1.28-الف میں کروی محدد کے متغیرات r، θ اور ϕ دکھائے گئے ہیں۔ محدد کے مبدا سے نقطہ N تک کے فاصلے r کو کروی رداس پکارا جاتا ہے جبکہ z محدد سے کروی رداس تک زاویے کو θ لکھا جاتا ہے۔ x محدد سے رداس کے عمودی سائے تک زاویہ ϕ ہے۔ کروی اور نلکی نظام میں ϕ یکساں بیان کیا جاتا ہے۔ رداس کی قیمت مثبت لی جاتی ہے۔ یوں $0 \le r$ ممکن ہے۔ θ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 180° ہے جبکہ ϕ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 360° ہے۔

r اور ϕ تبدیل کئے بغیر θ کو 0 سے بڑھاتے ہوئے π ریڈیئن کرنے سے نقطہ N شکل 1.28-الف میں نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے مثبت z محدد سے شروع ہو کر منفی z محدد پر پہنچتا ہے۔ اسے نقطہ دار لکیر کو کرہ ارض کے خط طول بلد[28] تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں θ کا 0° تا 90° تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح r اور θ تبدیل کئے بغیر ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N گول دائرے پر z محدد کے گرد ایک چکر کاٹے گا۔ یہ حرکت کرہ ارض کے خط عرض بلد[29] پر چلنے کے مانند ہے۔ θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کو تبدیل کرنے سے نقطہ N مبدا سے سیدھی باہر نکلتی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔

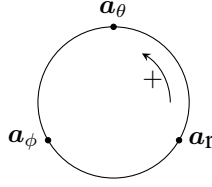
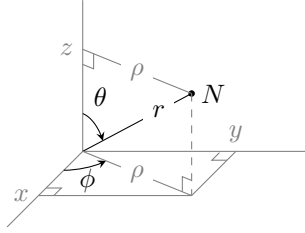
r تبدیل کئے بغیر θ کو 0° تا 180° اور ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N کروی $r = r_0$ سطح پر حرکت کرے گا۔ اس کروی سطح کا رداس r ہو گا۔ شکل 1.28-الف میں θ کو 0° تا 90° اور ϕ کو 0° تا 90° تبدیل کرنے سے حاصل سطح دکھائی گئی ہے۔ شکل 1.28-ب میں θ تبدیل کئے بغیر r اور ϕ تبدیل کرنے سے پیدا مخروط[30] $\theta = \theta_0$ کروی سطح دکھائی گئی ہے۔ ϕ تبدیل کئے بغیر r اور θ تبدیل کرنے سے نلکی محدد کی طرح $\phi = \phi_0$ سطح

[28] longitude
[29] latitude
[30] cone

شکل 1.29: (الف) تین عمودی سطحوں کے ملاپ سے نقطہ N کا حصول۔ (ب) کروی محدد کے تین عمودی اکائی سمتیات۔

حاصل ہوتی ہے۔ شکل 1.29-الف میں ان تینوں سطحوں کو دکھایا گیا ہے۔ بالکل کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح، کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کا مقام ان تین سطحوں کے نقطہ ملاپ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر $r = r_0$، $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحیں آپس میں عمودی ہوتی ہے اور یہ صرف اور صرف اسی نقطے پر اکٹھے ملتی ہیں۔

شکل 1.29-ب میں کروی نظام کے تین عمودی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔ نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے عمودی اکائی سمتیات بھی مقام تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کے بڑھتے جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گی۔ اسی طرح θ بڑھانے سے نقطہ N اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی جانب حرکت کرے گا جبکہ ϕ بڑھانے سے نقطہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کی جانب حرکت کرے گا۔ کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے اکائی سمتیات کو بھی محددی نظام کے متغیرات کو کم سے کم بڑھاتے ہوئے نقطے کی حرکت کی جانب اکائی سمتیہ کھینچنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.29-الف سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سمتیہ $r = r_0$ سطح کے عمودی جبکہ $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کے متوازی ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_\theta$ سمتیہ $\theta = \theta_0$ سطح کے عمودی اور $\phi = \phi_0$ سطح کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ $r = r_0$ سطح کے ساتھ مماس بناتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ سمتیہ $\phi = \phi_0$ سطح کے عمودی جبکہ $r = r_0$ اور $\theta = \theta_0$ سطحوں کے ساتھ مماس بناتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کروی نظام کے اکائی سمتیات ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\phi$ لکھنے سے دائیں ہاتھ کا کروی نظام حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کے قانون میں دائیں ہاتھ کا انگوٹھا r جبکہ پہلی انگلی θ اور دوسری انگلی ϕ بڑھانے سے پیدا حرکت کی

شکل 1.30: کروی نظام میں اکائی سمتیات کی صلیبی ضرب۔

شکل 1.31: کروی، نلکی اور کارتیسی متغیرات کا تبادلہ۔

سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ نلکی محدد میں یہ انگلیاں ρ، ϕ اور z جبکہ کارتیسی محدد میں x، y اور z بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

دائیں ہاتھ کے قانون یا شکل 1.30 کی مدد سے یوں اکائی سمتیات کے صلیبی ضرب

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\phi \;, \quad \boldsymbol{a}_\theta \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_\mathrm{r} \;, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \boldsymbol{a}_\theta \tag{1.45}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔اسی طرح

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{r} = 1 \;, \quad \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\theta = 1 \;, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 1 \tag{1.46}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{a}_\theta = 0 \;, \quad \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \;, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{r} = 0 \tag{1.47}$$

بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

نقطہ N کا z محدد سے فاصلہ ρ ہے جو نلکی محدد کا رداس ہے۔اسے شکل 1.31 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\rho = r\sin\theta$ کے برابر ہے۔اسی طرح $z = 0$ سطح سے N کی اونچائی z ہے جو شکل کو دیکھتے ہوئے $z = r\cos\theta$ لکھی جا سکتی ہے۔نقطہ N کا عمودی سایہ $z = 0$ سطح پر دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $x = \rho\cos\phi$ اور $y = \rho\sin\phi$ لکھے جا سکتے ہیں۔$\rho = r\sin\theta$ پُر کرنے سے درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{1.48}$$

جہاں z کی مساوات بھی ساتھ ہی لکھی گئی ہے۔مساوات 1.48 کروی سے کارتیسی متغیرات دیتا ہے۔ اسی شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + z^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{1.49}$$

لکھتے ہوئے

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.50}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 1.48 میں z کی مساوات سے

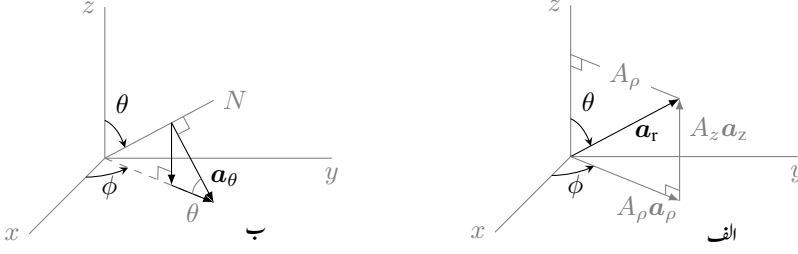
$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{r} = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{1.51}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 1.48 کے y کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{1.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 1.50، مساوات 1.51 اور مساوات 1.52 کارتیسی سے کروی متغیرات دیتے ہیں۔

شکل 1.29-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کی سمت تبدیل کئے بغیر اسے محدد کے مبدا پر منتقل کرتے ہوئے شکل 1.32-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ اسے نلکی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = A_\rho \boldsymbol{a}_\rho + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.53}$$

شکل 1.32: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 1.32-الف میں $\boldsymbol{a}_{\text{r}}$ کی لمبائی ایک لیتے ہوئے $A_\rho = \sin\theta$ اور $A_z = \cos\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{a}_{\text{r}} = \sin\theta\boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\text{z}} \tag{1.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\text{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\text{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \sin\theta \\
\boldsymbol{a}_{\text{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\text{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \\
\boldsymbol{a}_{\text{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{z}} &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\text{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\text{z}} = \cos\theta
\end{aligned} \tag{1.55}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 1$، $\boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0$ وغیرہ کا استعمال کیا گیا۔یہ مساوات کروی رداسی اکائی سمتیے اور نلکی نظام کے اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔اسی طرح جدول 1.1 استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.54 کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\text{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}} &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\text{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}} = \sin\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_{\text{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\text{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} = \sin\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_{\text{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{z}} &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\text{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\text{z}} = \cos\theta
\end{aligned} \tag{1.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔مکمل نتائج ایک جگہ لکھنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات میں $\boldsymbol{a}_{\text{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ یہ مساوات کروی اکائی رداسی سمتیے اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\text{r}}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\text{r}} = \boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = \boldsymbol{a}_{\text{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{r}}$ جبکہ $A_y = \boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{r}}$ اور $A_z = \boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{r}}$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.56 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\text{r}} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\text{z}} \tag{1.57}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.29-ب میں دکھائے $\boldsymbol{a}_\theta$ کو $\phi = \phi_0$ سطح پر حرکت دیتے ہوئے مبدا کے اتنے قریب لا کر شکل 1.32-ب میں دکھایا گیا ہے کہ اس کی نوک $x = 0$ سطح کو چھوتی ہے۔جیسا شکل 1.29-الف سے واضح ہے، $\phi = \phi_0$ سطح پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کو حرکت دینے سے اس سمتیہ کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔ شکل 1.32-ب کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta = B_\rho \boldsymbol{a}_\rho - B_z \boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ $B_\rho \boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\theta$ کے مابین زاویہ θ ہے۔$\boldsymbol{a}_\theta$، $B_\rho \boldsymbol{a}_\rho$ اور $-B_z \boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ مل کر تکون بناتے ہیں جسے دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$B_\rho = \cos\theta$$
$$B_z = \sin\theta$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{a}_\theta = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tag{1.58}$$

کے برابر ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\rho &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\text{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\theta \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\phi &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\text{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\text{Z}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\text{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\text{Z}} = -\sin\theta
\end{aligned} \tag{1.59}$$

$\boldsymbol{a}_\theta$ اور نلکی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح مساوات 1.58 کا باری باری ax، $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\text{X}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\text{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\text{X}} = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\text{X}} = \cos\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\text{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} = \cos\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\text{Z}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\text{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\text{Z}} = -\sin\theta \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{Z}} = -\sin\theta
\end{aligned} \tag{1.60}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یہ مساوات $\boldsymbol{a}_\theta$ اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_\theta$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\text{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = \boldsymbol{a}_{\text{X}} \cdot \boldsymbol{a}_\theta$ جبکہ $A_y = \boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\theta$ اور $A_z = \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\theta$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.60 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_\theta = \cos\theta\cos\phi \boldsymbol{a}_{\text{X}} + \cos\theta\sin\phi \boldsymbol{a}_{\text{y}} - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tag{1.61}$$

جدول 1.2: کروی اکائی سمتیات کا نلکی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$	$\boldsymbol{a}_{\rho}$	
$\cos\theta$	0	$\sin\theta$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$
$-\sin\theta$	0	$\cos\theta$	$\boldsymbol{a}_{\theta}$
0	1	0	$\boldsymbol{a}_{\phi}$

جدول 1.3: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$	
$\cos\theta$	$\sin\theta\sin\phi$	$\sin\theta\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$
$-\sin\theta$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\theta}$
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$

لکھا جا سکتا ہے۔

کروی محدد کا $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور نلکی محدد کا $\boldsymbol{a}_{\phi}$ یکساں ہیں۔اسے کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{a}_{\phi} = -\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{1.62}$$

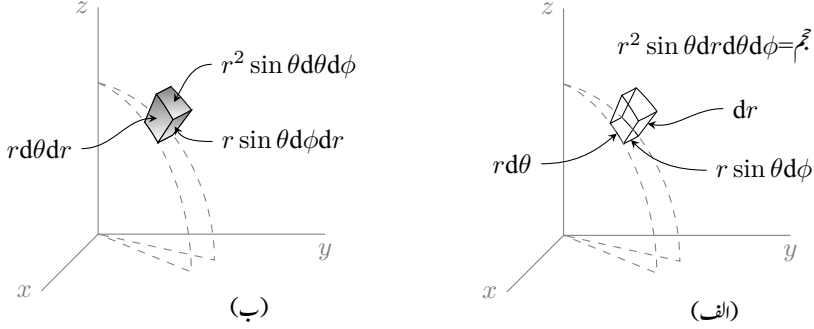
لکھا جاتا ہے۔اس مساوات کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\phi}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} &= -\sin\phi\\ \boldsymbol{a}_{\phi}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} &= \cos\phi\\ \boldsymbol{a}_{\phi}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= 0\end{aligned} \tag{1.63}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.55 اور مساوات 1.59 کے نتائج کے ساتھ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کے مختلف غیر سمتی ضربوں کو جدول 1.2 میں یکجا کیا گیا ہے۔

مساوات 1.56 اور مساوات 1.60 کے نتائج جدول 1.3 میں یکجا کئے گئے ہیں۔

شکل 1.29 میں $N(r,\theta,\phi)$ پر تین عمودی سطحیں دکھائی گئی ہیں۔اگر کروی محدد کے متغیرات $\mathrm{d}r$، $\mathrm{d}\theta$ اور $\mathrm{d}\phi$ بڑھا کر دوبارہ تین عمودی سطحیں کھینچی جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر چھوٹا منحرف مکعب نما حجم گھیریں گی جسے شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سمت میں مکعب کے چار اطراف کی لمبائیاں $\mathrm{d}r$ ہے۔$\boldsymbol{a}_{\theta}$ سمت میں z محدد کے قریبی

شکل 1.33: (الف) کروی نظام میں چھوٹی لمبائیاں اور چھوٹی حجم۔ (ب) کروی محدد میں چھوٹی سطحیں۔

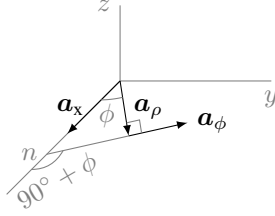
دو اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ جبکہ دو دور اطراف کی لمبائیاں $(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$ ہے جسے دو اجزاء کی صورت میں یوں $r\,\mathrm{d}\theta+\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔ دور اطراف کے لمبائی کا پہلا جزو ہوبہو قریبی اطراف کی لمبائی ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو دور اور قریبی اطراف کے لمبائیوں میں فرق کو ظاہر کرتی ہے۔ ان دو اجزاء کی نسبت $\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r\,\mathrm{d}\theta}$ کے برابر ہے۔ $\mathrm{d}r$ کو کم سے کم[31] کرتے ہوئے اس نسبت کو کم سے کم کیا جا سکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ہم $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کو رد کرتے ہوئے ان چاروں اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ ہی لیتے ہیں۔ اسی طریقہ کار سے $\boldsymbol{a}_\phi$ اطراف کی لمبائیاں $r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔ منحرف مکعب نما کے اطراف میں معمولی فرق کو نظرانداز کرتے ہوئے اسے مکعب نما تصور کیا جا سکتا ہے جس کے $r=r_0$ سطحوں کا رقبہ $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ جبکہ $\theta=\theta_0$ سطحوں کا رقبہ $r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ اور $\phi=\phi_0$ سطحوں کا رقبہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ ہو گا۔ اس مکعب کا حجم $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔

شکل 1.33 میں کروی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(r,\theta,\phi)$ کونے سے $N'(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta,\phi+\mathrm{d}\phi)$ کونے پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک سمتیہ کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta+r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.64}$$

لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی فاصلہ دیتا ہے۔

کسی بھی مکمل بند سطح کی سمت، سطح کے عمودی باہر جانب لی جاتی ہے۔ شکل 1.33 میں $r=r_0$ سطح مبدا کا قریبی سطح ہے۔ اس سطح کے دو آپس میں الٹ عمودی اطراف $\mp\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ ہیں جن میں $-\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ بند سطح کی بیرونی سمت کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا یہی اس سطح کی درست سمت ہے۔ اس کے برعکس $r=r_0+\mathrm{d}r$ سطح مبدا سے دور تر ہے۔ اس سطح کے

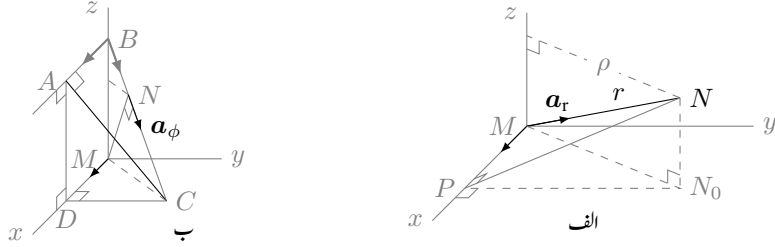
[31] کسی بھی متغیرہ مثلاً r میں چھوٹی سی تبدیلی کو Δr لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}r$ لکھا جاتا ہے۔ $\mathrm{d}r$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}r\to 0$ ہوتا ہے۔

شکل 1.34: کارتیسی اور نلکی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔

بھی دو آپس میں الٹ عمودی سمتیں $\mp \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سطح کی درست سمت ہے۔یوں $r = r_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ $r = r_0 + \mathrm{d}r$ سطح کا سمتی رقبہ $r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔اسی طرح $\theta = \theta_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\theta$ جبکہ $\theta = \theta_0 + \mathrm{d}\theta$ سطح کا سمتی رقبہ $r \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\theta$ ہو گا۔ $\phi = \phi_0$ سطح کا $-r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \boldsymbol{a}_\phi$ اور $\phi = \phi_0 + \mathrm{d}\phi$ سطح کا سمتی رقبہ $r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \boldsymbol{a}_\phi$ ہو گا۔

مشق 1.6: شکل 1.33 میں سمت میں مبدا کے قریبی اور دور اطراف کی لمبائیاں لکھیں۔

جوابات: $r \sin\theta \,\mathrm{d}\phi$، $r \sin(\theta + \mathrm{d}\theta) \,\mathrm{d}\phi$، $(r + \mathrm{d}r) \sin\theta \,\mathrm{d}\phi$ اور $(r + \mathrm{d}r) \sin(\theta + \mathrm{d}\theta) \,\mathrm{d}\phi$

مثال 1.9: دو اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_1$ اور $\boldsymbol{a}_2$ کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = (1)(1) \cos\alpha_{12}$ یعنی ان کے مابین زاویے α_{12} کے کوسائن کے برابر ہوتا ہے۔غیر سمتی ضرب کے اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi$ حاصل کریں۔

حل: شکل 1.34 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_\rho$ کے درمیان زاویہ ϕ جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_\rho$ کے درمیان زاویہ $90^\circ - \phi$ پایا جاتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos(90^\circ - \phi) = \sin\phi$ کے برابر ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمتیں تبدیل کئے بغیر اگر انہیں یوں ہلایا جائے کہ ان کی دُم نقطہ n پر آ ٹھرے تو شکل سے ظاہر ہے کہ ان کے مابین

شکل 1.35: کروی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔

زاویہ $90^\circ + \phi$ ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\text{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = \cos(90^\circ + \phi) = -\sin\phi$ کے برابر ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کے درمیان ϕ زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = \cos\phi$ کے برابر ہے۔چونکہ $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ان دونوں نلکی اکائی سمتیات کے عمودی ہے لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔

مثال 1.10: مثال 1.9 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_{\text{r}}$ کا $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-الف میں نقطہ $N(r, \theta, \phi)$ دکھایا گیا ہے جسے $N(x, y, z)$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔شکل میں $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{r}}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔شکل سے ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\text{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{r}} = \cos \underline{/NMP}$ کے برابر ہے جہاں N اور P سے M تک لکیریں کھینچنے سے زاویہ $\underline{/NMP}$ بنتا ہے۔N سے $z = 0$ سطح پر عمود نقطہ N_0 دیتا ہے۔N_0 سے x محدد پر عمود نقطہ P دیتا ہے۔N سے N_0 اور یہاں سے P منتقل ہوتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ سمت میں کسی قسم کی حرکت نہیں کی جاتی لہٰذا اگر کارتیسی نظام میں $N(x, y, z)$ لکھا جائے تو اسی نظام میں $N_0(x, y, 0)$ اور $P(x, 0, 0)$ لکھے جائیں گے۔ہم N سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے بھی P تک پہنچ سکتے ہیں۔ تکون NMP میں M سے N تک کا فاصلہ $\overline{MN} = r$ جبکہ M سے P تک کا فاصلہ $\overline{MP} = x$ اور زاویہ $\underline{/NPM} = 90^\circ$ ہیں لہٰذا $\cos \underline{/NMP} = \frac{x}{r}$ ہو گا۔یہی $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{r}}$ کے غیر سمتی ضرب کے برابر ہے۔N سے y محدد پر عمود بناتے ہوئے یوں $\boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{r}} = \frac{y}{r}$ اور N سے z محدد پر عمود سے $\boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{r}} = \frac{z}{r}$ لکھے جا سکتے ہیں۔چونکہ $x = r\sin\theta\cos\phi$، $y = r\sin\theta\sin\phi$

اور $z = r\cos\theta$ کے برابر ہیں للذا ہم

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi$$
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\phi$$
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \frac{z}{r} = \cos\theta$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 1.11: مثال 1.9 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ جبکہ محدد کے مبدا M پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ حاصل کرنے کی خاطر سمتیات کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں z محدد پر نقطہ B منتقل کرتے ہوئے دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\underline{/ABC}$ کے برابر ہے۔ اس شکل میں $\underline{/DMC} = \phi$ اور $\underline{/BMN} = \theta$ کروی محدد کے زاویے ہیں۔ تکون ΔBMN میں زاویہ $\underline{/MNB}$ نوے درجے کا ہے۔ یوں $\underline{/NBM} = 90^\circ - \theta$ ہو گا۔ شکل سے واضح ہے کہ $\underline{/CBM} = \underline{/NBM}$ ہیں۔ اس طرح تکون ΔBMC میں $\underline{/BMC} = 90^\circ$ جبکہ $\underline{/CBM} = 90^\circ - \theta$ ہونے کی بنا پر $\underline{/MCB} = \theta$ ہو گا۔

شکل-ب میں $\overline{BM} = l$ لیتے ہوئے تکون ΔBMC کو دیکھتے ہوئے

$$\overline{BC} = \frac{l}{\sin\theta}$$
$$\overline{MC} = \frac{l}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ تکون ΔMDC سے

$$\overline{MD} = \overline{MC}\cos\phi = \frac{l\cos\phi}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ $\overline{MD}$ اور $\overline{AB}$ برابر ہیں یعنی $\overline{MD} = \overline{AB}$۔ یوں تکون ΔBAC سے

$$\cos \underline{/ABC} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\left(\frac{l \cos \phi}{\tan \theta}\right)}{\left(\frac{l}{\sin \theta}\right)} = \cos \theta \cos \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos \theta \cos \phi$ لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 1.7: شکل 1.35-ب کے طرز پر شکل بناتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\theta} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\theta} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\cos \theta \sin \phi$ اور $-\sin \theta$

سوالات

سوال 1.1: سمتیہ $\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 1\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہیں۔مندرجہ ذیل حاصل کریں: (الف) $2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B}$ اور اسی کی سمت میں اکائی سمتیہ؛ (ب) $2\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ؛ (پ) $|3\boldsymbol{A}||2\boldsymbol{B}|\,(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})$

جوابات: $-13\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 13\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 8\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $-0.648\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 0.648\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 0.399\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، 28.3 ، $1359\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 1087\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 1359\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$

سوال 1.2: نقطہ $A(1,-2,3)$ ، $B(3,-1,2)$ اور $C(7,5,-4)$ دیے گئے ہیں۔(الف) محدد کے مبدا سے A تک سمتیہ لکھیں؛ (ب) مبدا سے لکیر AB کے وسط تک سمتیہ لکھیں؛ (پ) اسی سمت میں اکائی سمتیہ لکھیں؛ (ت) تکون ABC کا احاطہ دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $2\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 1.5\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 2.5\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $0.566\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 0.424\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 0.707\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، 23.4

سوال 1.3: مبدا سے نقطہ A تک سمتیہ $2\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \boldsymbol{a}_{\text{y}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہے جبکہ مبدا سے $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\text{X}} - \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اکائی سمتیہ کی سمت میں نقطہ B پایا جاتا ہے۔دونوں نقطوں کے درمیان 4 فاصلہ ہونے کی صورت میں نقطہ B دریافت کریں۔

جوابات: $(2.57,-2.57,1.28)$

سوال 1.4: سمتی میدان $\boldsymbol{M} = (x+y^2)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 2(xy+3)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 4z^2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ دیا گیا ہے۔نقطہ $A(2,-3,1)$ پر اس میدان کی قیمت حاصل کریں۔اسی نقطے پر میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔ایسی سطح جس پر $|\boldsymbol{M}| = 5$ ہو کی مساوات حاصل کریں۔اس سطح پر $y = 2$ اور $z = -1$ ہونے کی صورت میں حاصل لکیر کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{M} = 11\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 6\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $(0.836\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 0.456\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.304\boldsymbol{a}_{\text{Z}})$ ، $x^2 + y^2 + 2xy^2 + 4x^2y^2 + 24xy + 16z^4 - 11 = 0$ ، $17x^2 + 56x + 9 = 0$

سوال 1.5: سمتی میدان $\boldsymbol{B} = 2x^2\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 3y(x+2z)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور $\boldsymbol{M} = (x+y+z)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \frac{y}{x}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + xy\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ دیے گئے ہیں۔نقطہ $N(2,-3,-1)$ پر $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{M}$ حاصل کریں۔اسی نقطے پر سمتیہ $2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{B} = 8\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $\boldsymbol{M} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $0.830\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.069\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 0.553\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 1.6: نقطہ $(N(2,-3,7))$ پر میدان $\boldsymbol{M} = \frac{16}{x^2+y^2}(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_M$ دریافت کریں۔نقطہ N پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{M}$ کے درمیان زاویہ حاصل کریں۔اسی طرح نقطہ N پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{M}$ کے درمیان زاویہ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{a}_M = 0.555\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 0.832\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ ، $56.3°$ ، $33.7°$

سوال 1.7: میدان $\boldsymbol{M} = \frac{16}{x^2+y^2}(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})$ کا مندرجہ ذیل دوگنا تکمل $y = 3$ سطح پر حاصل کریں۔

$$\int_0^3 \int_0^2 \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

جواب: $24 \ln \frac{13}{9}$

سوال 1.8: غیر سمتی ضرب استعمال کرتے ہوئے تکون ABC میں زاویہ A اور C حاصل کریں۔تکون کے کونے $A(3,1,2)$ ، $B(4,6,2)$ اور $C(1,4,-2)$ ہیں۔

جوابات: $61.74°$ ، $56.51°$

سوال 1.9: نقطے $A(4,1,2)$ ، $B(-2,4,3)$ اور $C(2,3,-1)$ دیے گئے ہیں۔سمتیہ $\boldsymbol{R}_{BA}$ اور $\boldsymbol{R}_{CA}$ حاصل کریں۔دوسری سمتیہ پر پہلی سمتیہ کے عمودی سائے[32] کی لمبائی دریافت کریں۔لکیر AB کے درمیانے نقطے سے لکیر AC کے درمیانے نقطے تک سیدھا سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: $-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، 4.12 ، $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 0.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 1.10: سمتیہ $\boldsymbol{M} = 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کا وہ حصہ حاصل کریں جو سمتیہ $\boldsymbol{P} = -7\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے متوازی ہے۔وہ حصہ حاصل کریں جو اس کے عمودی ہے۔

جوابات: $4.17\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1.19\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 3.57\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $0.83\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1.81\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 1.57\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

[32] projection

سوال 1.11: تین سمتیات $r_1 = 2a_X - 1a_Y + 3a_Z$ ، $r_2 = -3a_X + 4a_Y - 5a_Z$ اور $r_3 = 5a_X - 2a_Y + 3a_Z$ دیے گئے ہیں۔ $r_1 \times r_2$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ایسی اکائی سمتیہ حاصل کریں جو r_1 اور r_2 دونوں کو عمودی ہو۔ سمتیہ $r_2 - r_1$ اور $r_2 - r_3$ دونوں کو عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔اس تکون کا رقبہ حاصل کریں جس کے اطراف r_1 اور r_2 ہوں۔اس تکون کا رقبہ حاصل کریں جس کے کونے یہ تین سمتیات دیتے ہیں۔

جوابات: $-0.81a_X + 0.16a_Y + 0.58a_Z$ ، $\mp(-0.81a_X + 0.16a_Y + 0.58a_Z)$ ، $\mp(0.29a_X + 0.88a_Y + 0.37a_Z)$ ، 4.3 ، 13.6

سوال 1.12: نقطہ $N(5, 10, 4)$ پر سمتیات $R_{AN} = -3a_X + 6a_Y + 12a_Z$ اور $R_{BN} = 12a_X + 20a_Y - 5a_Z$ مل کر تکون بناتی ہیں۔تکون کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔سمتیہ R_{BN} کے عمودی اور تکون کی سطح کے متوازی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔تکون کی سطح پر اس اکائی سمتیہ کو حاصل کریں جو نقطہ N پر تکون کے کونے کو نصف زاویہ میں کاٹے۔

جوابات: $\mp(-0.83a_X + 0.39a_Y - 0.40a_Z)$ ، $\mp(0.26a_X - 0.38a_Y - 0.89a_Z)$ ، $0.19a_X + 0.87a_Y + 0.45a_Z$

سوال 1.13: سمتیہ $M = (x^2 + y^2)^{-1}(xa_X + ya_Y)$ کو نلکی محدد کے متغیرات میں لکھیں۔نقطہ $(5, 30°, 6)$ پر سمتیہ کی قیمت کارتیسی اور نلکی محدد میں حاصل کریں۔

جوابات: $M = \frac{1}{\rho}a_\rho$ ، $M = 0.41a_X + 0.29a_Y$ ، $M = \frac{1}{5}a_\rho$

سوال 1.14: نقطہ $N(\rho = 2, \phi = 45°, z = 12)$ اور $P(\rho = 5, \phi = -60°, z = -6)$ دئے گئے ہیں۔کارتیسی محدد میں، پہلے نقطے سے دوسرے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ حاصل کریں۔اسی اکائی سمتیہ کو پہلے نقطے پر پائے جانے والے نلکی محدد کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔اسی اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر پائے جانے والے نلکی محدد کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔

جوابات: $0.057a_X - 0.303a_Y - 0.951a_Z$ ، $-0.174a_\rho - 0.255a_\phi - 0.951a_Z$ ، $0.292a_\rho - 0.180a_\phi - 0.951a_Z$

سوال 1.15: نقطہ $N(\rho = 5, \phi = 30°, z = 6)$ سے نقطہ $P(\rho = 10, \phi = 75°, z = 12)$ تک سمتیہ کارتیسی محدد میں لکھیں۔اسی سمت میں اکائی سمتیہ بھی لکھیں۔کارتیسی محدد میں دوسرے نقطے سے مبدا تک اکائی سمتیہ لکھیں۔

جوابات: $-1.74\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 7.16\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $-0.183\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 0.618\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.631\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $0.166\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 0.618\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 0.768\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$

سوال 1.16: نقطہ $M(5,-3,2)$ سے نقطہ $N(10,2,-5)$ تک سمتیہ کو نقطہ M پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔دوسرے نقطے سے پہلے نقطے کی سمت میں اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر نلکی اکائی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔دوسرے نقطے سے مبدا تک اکائی سمتیہ دوسرے نقطے کے اکائی سمتیات کی صورت میں لکھیں۔

جوابات: $-1.71\boldsymbol{a}_{\rho} - 6.86\boldsymbol{a}_{\phi} + 7\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $0.59\boldsymbol{a}_{\rho} + 0.39\boldsymbol{a}_{\phi} - 0.7\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $0.90\boldsymbol{a}_{\rho} + 0.44\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$

سوال 1.17: رداس $\rho = 2$ اور $\rho = 6$ حجم گھیرتے ہیں جو $z = 11$ تا $z = 13$ اور $\phi = 30°$ تا $\phi = 60°$ پایا جاتا ہے۔اس جسم کے حجم کو تین درجی تکمل سے حاصل کریں۔اس کی بھی تکمل سے سطح بھی حاصل کریں۔

جوابات: 16.8 ، 41.1

سوال 1.18: نقطہ $N(5,3,8)$ سے نقطہ $P(3,-4,2)$ تک سمتیہ کارتیسی، نلکی اور کروی محدد میں حاصل کریں۔پہلے نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔تینوں سمتیات کی لمبائی حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ تینوں سمتیات کی لمبائی برابر ہے۔

جوابات: $-2\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 7\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 6\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $-5.3165\boldsymbol{a}_{\rho} - 4.9735\boldsymbol{a}_{\phi} - 6.0000\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $-8.6615\boldsymbol{a}_{\text{r}} - 2.7739\boldsymbol{a}_{\theta} - 2.5069\boldsymbol{a}_{\phi}$ ، 9.434

سوال 1.19: نقطہ N پر سمتیہ $\boldsymbol{K} = 3\boldsymbol{a}_{\text{r}} - 2\boldsymbol{a}_{\theta} + 8\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{G} = 2\boldsymbol{a}_{\text{r}} + 5\boldsymbol{a}_{\theta} + 2\boldsymbol{a}_{\phi}$ دیے گئے ہیں۔ان کی غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{G}$ حاصل کریں۔دوسری سمتیہ کی پہلی سمتیہ کی سمت میں لمبائی حاصل کریں۔پہلی سمتیہ کا وہ حصہ دریافت کریں جو دوسری سمتیہ کی سمت میں ہے۔دونوں سمتیوں کا سمتی ضرب $\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{G}$ حاصل کریں۔اس نقطے پر دونوں سمتیوں کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: 12 ، 1.3675 ، $0.46753\boldsymbol{a}_{\text{r}} - 0.31169\boldsymbol{a}_{\theta} + 1.24675\boldsymbol{a}_{\phi}$ ، $44\boldsymbol{a}_{\text{r}} - 10\boldsymbol{a}_{\theta} - 19\boldsymbol{a}_{\phi}$ ، $\mp(0.89871\boldsymbol{a}_{\text{r}} - 0.20425\boldsymbol{a}_{\theta} - 0.38808\boldsymbol{a}_{\phi})$

سوال 1.20: ایک جسم $r=6$ تا $r=10$ ، $\theta=30^\circ$ تا $\theta=70^\circ$ اور $\phi=25^\circ$ تا $\phi=100^\circ$ حجم گھیرتا ہے۔اس جسم کے دو دور ترین کونوں کے درمیان فاصل حاصل کریں۔ جسم کی سطح کا رقبہ حاصل کریں۔ جسم کی حجم دریافت کریں۔

جوابات: 9.27 ، 198.27 ، 179.25

سوال 1.21: نقطہ $N(5,4,-2)$ اور $P(6,4,10)$ دیے گئے ہیں۔پہلے نقطے کو نلکی محدد میں لکھیں۔پہلے نقطے کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے پہلے نقطے سے دوسرے نقطے تک سمتیہ نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات: $P(6.4031, 38.6598^\circ, -2.0000)$ ، $0.57\boldsymbol{a}_\rho - 0.82\boldsymbol{a}_\phi + 12\boldsymbol{a}_\text{z}$

باب 2

کولمب کا قانون

2.1 قوت کشش یا دفع

نیوٹن کے **کائناتی تجاذب** کے **قانون**[1] سے آپ بخوبی واقف ہوں گے۔**کولمب کا قانون**[2] اس سے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔کائناتی تجاذب کے قانون کو مساوات 2.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

$$F = G\frac{M_1 M_2}{R^2} \tag{2.1}$$

یہ مساوات کمیت M_1 اور کمیت M_2 کے مابین قوت کشش F دیتی ہے جہاں ایک کمیت کے مرکز سے دوسری کمیت کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔قوت کشش دونوں کمیت کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔دونوں کمیتوں پر قوت کشش کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں کمیتوں کے مرکزوں کو ملانے والی لکیر پر پائی جاتی ہے۔M_1 پر قوت کشش کی سمت M_1 کے مرکز سے M_2 کے مرکز کی جانب ہوتی ہے جبکہ M_2 پر قوت کشش کی سمت M_2 کے مرکز سے M_1 کے مرکز کی جانب ہوتی ہے۔تناسب کے جزو مستقل کو G لکھا اور **تجاذبی مستقل**[3] کہا جاتا ہے جس کی قیمت تقریباً $6.674 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\,s^2}}$

---

[1] Law of Universal Gravitation
[2] Coulomb's law
[3] gravitational constant

کے برابر ہے۔کرہ ارض کے ثقلی میدان میں کمیت (میکانی بار) m کو اٹھانے کی خاطر $F = mg$ قوت درکار ہوتی ہے جہاں $g = 9.8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ کے برابر ہے۔

کولمب کا قانون مساوات 2.2 میں بیان کیا گیا ہے۔یہ مساوات برقی بار[4] Q_1 اور برقی بار Q_2 کے مابین قوت کشش یا قوت دفع F دیتی ہے جہاں ایک برقی بار کے مرکز سے دوسری برقی بار کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ان برقی باروں کا حجم صفر تصور کیا جاتا ہے۔یوں اگر برقی بار کو گیند کی شکل کا تصور کیا جائے تو اس گیند کے رداس کی لمبائی صفر ہو گی۔ایسے برقی بار کو **نقطہ برقی بار**[5] کہا جاتا ہے۔برقی بار کی اصطلاح کو چھوٹا کرتے ہوئے اسے بار کہا جائے گا۔

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R^2} \tag{2.2}$$

قوت کشش یا دفع دونوں برقی باروں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور باہمی فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔دونوں برقی باروں پر قوت کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں برقی باروں سے گزرتی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔دو مختلف اقسام کے برقی باروں کے مابین قوت کشش پائی جاتی ہے جبکہ دو یکساں برقی باروں کے مابین قوت دفع پائی جاتی ہے۔مساوات کے جزو مستقل کو $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھا جاتا ہے جہاں ϵ_0 خلاء کا **برقی مستقل**[6] [7] ہے جس کی قیمت اٹل ہے۔خلاء کے برقی مستقل کی قیمت

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \tag{2.3}$$

ہے جہاں c خلاء میں روشنی کی رفتار اور μ_0 خلاء کی **مقناطیسی مستقل**[8] ہے۔یہ دونوں بھی اٹل مستقل ہیں جن کی قیمتیں

$$c = 299\,792\,458 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.4}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \, \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{2.5}$$

ہیں۔یوں مقناطیسی مستقل کی قیمت تقریباً

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \, \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \tag{2.6}$$

---

[4] charge
[5] point charge
[6] permittivity
[7] electric constant
[8] permeability constant

کے برابر ہے۔اس کتاب میں $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بار بار استعمال ہو گا جسے عموماً

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \times 10^9 \tag{2.7}$$

لیا جائے گا۔ϵ_0 کی اکائی فیراڈ فی میٹر $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ ہے جس کی وضاحت جلد کر دی جائے گی۔

مثال 2.1: سطح زمین پر زمین اور ایک کلو گرام کمیت کے مابین $9.8\,\mathrm{N}$ کی قوت کشش پائی جاتی ہے۔زمین کا رداس $6370\,\mathrm{km}$ لیتے ہوئے زمین کی کمیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 2.1 کی مدد سے

$$9.8 = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times M \times 1}{6\,370\,000 \times 6\,370\,000}$$

لکھتے ہوئے زمین کی کمیت $5.959 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال 2.2: زمین کے مرکز سے تقریباً $42\,000\,\mathrm{km}$ کے فاصلے پر ذرائع ابلاغ کے سیٹلائٹ زمین کے گرد مدار میں گھومتے ہیں۔پوری دنیا میں بے تار[9] مواصلاتی نظام اسی کا مرہون منت ہے۔اس فاصلے پر ایک کلو گرام کی کمیت اور زمین کے مابین قوت کشش کی مقدار حاصل کریں۔

حل:

$$F = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times 5.959 \times 10^{24} \times 1}{42\,000\,000 \times 42\,000\,000} = 0.225\,\mathrm{N}$$

[9] wireless

مثال 2.3: ایک ایک کولمب کے دو مثبت برقی باروں کے درمیان ایک میٹر کا فاصلہ ہے۔ان میں قوت دفع حاصل کریں۔

حل: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت مساوات 2.7 سے لیتے ہوئے

$$F = 9 \times 10^9 \frac{1 \times 1}{1 \times 1} = 9 \times 10^9 \,\mathrm{N}$$

مندرجہ بالا مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ برقی بار کی اکائی (کولمب) انتہائی بڑی مقدار ہے۔

شکل 2.1 میں بار Q_1 محدد کے مبدا سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_1}$ پر جبکہ بار Q_2 مبدا سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_2}$ پر دکھایا گیا ہے۔بار Q_1 سے بار Q_2 تک کا سمتی فاصلہ $\mathbf{R_{21}}$ ہے جہاں

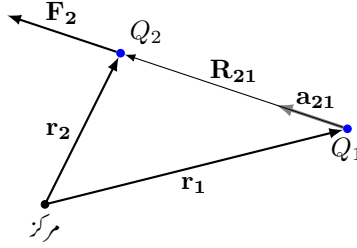
$$\boldsymbol{R_{21}} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1} \tag{2.8}$$

کے برابر ہے۔سمتیہ $\mathbf{R_{21}}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ یوں حاصل کیا جاتا ہے

$$\boldsymbol{a_{21}} = \frac{\boldsymbol{R_{21}}}{|\boldsymbol{R_{21}}|} = \frac{\boldsymbol{R_{21}}}{R_{21}} = \frac{\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|} \tag{2.9}$$

بار Q_2 پر قوت $\mathbf{F_2}$ کی مطلق قیمت مساوات 2.2 سے حاصل کی جا سکتی ہے جبکہ اس کی سمت اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ کے سمت میں ہو گی۔اس طرح یہ قوت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} \boldsymbol{a_{21}} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|^3}\end{aligned} \tag{2.10}$$

$\mathbf{F_2}$ Q_2 $\mathbf{R_{21}}$ $\mathbf{a_{21}}$ $\mathbf{r_2}$ Q_1 $\mathbf{r_1}$ مرکز

شکل 2.1: دو مثبت باروں کے مابین قوت دفع

لکھی جائے گی۔ مساوات 2.10 کولمب کے قانون کی سمتی شکل ہے۔ چونکہ دونوں باروں پر برابر مگر الٹ سمت میں قوت عمل کرتی ہے لہٰذا Q_1 پر قوت $\mathbf{F_1}$ یوں لکھا جائے گا

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F_1} &= -\boldsymbol{F_2} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_{21}^2}\boldsymbol{a_{21}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R^2}\boldsymbol{a_{12}}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

جہاں دوسری قدم پر $R = R_{12} = R_{21}$ لکھا گیا ہے اور $\boldsymbol{a_{12}} = -\boldsymbol{a_{21}}$ کے برابر ہے۔ دونوں بار مثبت یا دونوں بار منفی ہونے کی صورت میں Q_2 پر مساوات 2.10 سے قوت $\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتی ہے۔ یوں یکساں باروں کے مابین قوت دفع پائی جاتی ہے۔ دو الٹ اقسام کے باروں کی صورت میں Q_2 پر قوت $-\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں الٹ اقسام کے باروں کے مابین قوت کشش پائی جاتی ہے۔

مثال 2.4: شکل 2.1 میں نقطہ $A(3,2,4)$ پر $20\,\mu\mathrm{C}$ کا بار Q_1 جبکہ نقطہ $B(1,5,9)$ پر $-50\,\mu\mathrm{C}$ کا بار Q_2 پایا جاتا ہے۔ منفی بار Q_2 پر سمتی قوت حاصل کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R_{21}} &= (1-3)\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + (5-2)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (9-4)\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \\
&= -2\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 3\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 5\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \\
R_{21} &= |\boldsymbol{R_{21}}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} \\
&= \sqrt{38} \\
&= 6.1644
\end{aligned}
$$

اور یوں

$$a_{21} = \frac{R_{21}}{|R_{21}|} = \frac{-2a_X + 3a_Y + 5a_Z}{6.1644}$$
$$= -0.324a_X + 0.487a_Y + 0.811a_Z$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$F_2 = \frac{36\pi \times 10^9}{4\pi} \frac{\left(-50 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6}\right)}{38} \left(-0.324a_X + 0.487a_Y + 0.811a_Z\right)$$
$$= -0.237 \left(-0.324a_X + 0.487a_Y + 0.811a_Z\right) \text{ N}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوت کی سمت $\mathbf{a_{21}}$ کے الٹ سمت میں ہے۔یوں منفی بار پر قوت کی سمت مثبت بار کی جانب ہے یعنی اس پر قوت کشش پائی جاتی ہے۔

کسی بھی بار پر ایک سے زیادہ باروں سے پیدا مجموعی قوت تمام باروں سے پیدا علیحدہ علیحدہ قوتوں کا سمتی مجموعہ ہوتا ہے یعنی

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i \tag{2.12}$$

اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ کولمب کا قانون خطی[10] ہے۔

2.2 برقی میدان کی شدت

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون میں زمین کی کمیت کو M لکھ کر کمیت m پر قوت F حاصل کی جا سکتی ہے۔ایک کلوگرام کمیت پر اس قوت کی مقدار $\frac{F}{m}$ ہو گی جسے زمین کی کشش[11] یا ثقلی اسراع کہا اور g لکھا جاتا ہے۔زمین کی سطح پر g کی مقدار تقریباً $9.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ کے برابر ہے۔

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} \tag{2.13}$$

---

linear[10]
gravity[11]

کسی بھی کمیت M کے گرد تجاذبی میدان[12] پایا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر اس تجاذبی میدان کو ناپنے کی خاطر اس نقطے پر پیمائشی کمیت m_p[13] رکھ کر اس پر قوت ناپی جاتی ہے۔ مختلف مقامات پر اس طرح قوت ناپ کر ہم تجاذبی میدان کا جائزہ لے سکتے ہیں۔ تجاذبی قوت کی مقدار کا دارومدار پیمائشی کمیت[14] m_p پر بھی منحصر ہے۔ مختلف تجاذبی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام تجاذبی میدان جانچتے وقت ایک ہی قیمت کے پیمائشی کمیت استعمال کی جائے۔ ماہرین طبیعیات عموماً m_p کو ایک کلو گرام رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ تجاذبی قوت ناپتے وقت ایک کلوگرام کی پیمائشی کمیت ہی استعمال کی جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\mathbf{F}$ کو m_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک کلوگرام پر تجاذبی قوت حاصل کی جا سکتی ہے۔ زمین کے قریب ایک کلو گرام کمیت پر قوت کشش کو ثقلی اسراع g کہا جاتا ہے۔

مثال 2.5: زمین کی سطح پر دو سو گرام پیمائشی کمیت پر $1.96\,\mathrm{N}$ قوت ناپی جاتی ہے۔ ثقلی اسراع حاصل کریں۔

حل:

$$g = \frac{1.96}{0.2} = 9.8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \tag{2.14}$$

مساوات 2.13 سے ہم

$$\begin{aligned} F &= mg \\ w &= mg \end{aligned} \tag{2.15}$$

لکھ سکتے ہیں جو زمین کی سطح پر کمیت m پر کشش ثقل F دیتا ہے جسے وزن پکارا اور w لکھا جاتا ہے۔

باروں پر بھی اسی طرح غور کیا جاتا ہے۔ کسی بھی بار Q کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے یعنی برقی میدان کا منبع بار ہے۔ اس برقی میدان میں بار پر قوت اثر انداز ہوتی ہے۔ بار Q کے برقی میدان کی شدت کی پیمائش کی خاطر اس

[12] gravitational field
[13] m_p لکھتے ہوئے زیر نوشت میں p لفظ پیمائشی کے پ کو ظاہر کرتا ہے، یعنی یہ وہ کمیت ہے جسے قوت کی پیمائش کی خاطر استعمال کیا جا رہا ہے۔
[14] test mass

میدان میں مختلف مقامات پر پیمائشی بار q_p [15] پر قوت F ناپ کر برقی میدان کا مطالعہ کیا جا سکتا ہے اور اس کا نقشہ بنایا جا سکتا ہے۔ مختلف باروں کے برقی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں ایک ہی قیمت کے پیمائشی بار استعمال کئے جائیں۔ ماہرین طبیعیات q_p کو ایک کولمب کا مثبت بار رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ قوت ناپتے وقت ایک کولمب کا مثبت پیمائشی بار ہی استعمال کیا جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت F کو q_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک مثبت کولمب کے بار پر قوت حاصل کی جاتی ہے جسے **برقی میدان کی شدت**[16] یا صرف **برقی میدان** پکارا اور E لکھا جاتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_p} \tag{2.16}$$

مختلف مقامات پر موجود مختلف قیمتوں کے باروں سے کسی ایک نقطے پر پیدا برقی میدان تمام باروں کے مجموعی اثر سے پیدا ہو گا۔ ایسا کولمب کے قانون کے خطی ہونے کی بنا پر ہوتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر n باروں کا مجموعی E تمام باروں کے علیحدہ علیحدہ پیدا کردہ $\boldsymbol{E}_1$، $\boldsymbol{E}_2$، $\boldsymbol{E}_3$، $\cdots$ کا سمتی مجموعہ

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots + \boldsymbol{E}_n \tag{2.17}$$

ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے P پر E ناپتے وقت اس نقطے پر ایک کولمب بار q_p رکھ کر اس بار پر قوت ناپی جاتی ہے۔ یہ قوت اس نقطے پر تمام باروں کا مجموعی E ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر E ناپتے وقت یہاں رکھے پیمائشی بار q_p کا اثر شامل نہیں ہوتا۔

مساوات 2.10 سے بار Q سے $\boldsymbol{a}_R$ سمت میں R فاصلے پر برقی میدان کو

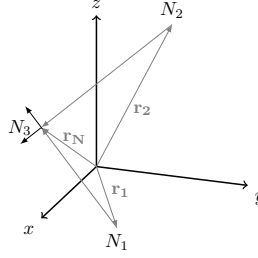
$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{a_R}}{R^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \end{aligned} \tag{2.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ بار کو کروی محدد کے مبدا پر تصور کرتے ہوئے اسی مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{2.19}$$

جہاں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کروی محدد کا رداسی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔

---

[15] test charge
[16] electric field intensity

شکل 2.2: دو باروں سے پیدا برقی شدت

نقطہ (x', y', z') پر موجود بار Q سے نقطہ (x, y, z) پر برقی شدت یوں حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3}\\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left[(x-x')\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(y-y')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(z-z')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right]}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{2.20}$$

جہاں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ \boldsymbol{r'} &= x'\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+z'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'} = (x-x')\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(y-y')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(z-z')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

مثال 2.6: نقطہ $N_1(4,1,1)$ پر $100\,\mu\mathrm{C}$ کا بار Q_1 جبکہ نقطہ $N_2(1,4,2)$ پر $50\,\mu\mathrm{C}$ کا بار Q_2 پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N_3(2,2,5)$ پر Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ اور Q_2 سے پیدا $\boldsymbol{E}_2$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں باروں کا مجموعی $\boldsymbol{E}$ کیا ہو گا۔

حل: شکل 2.2 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ پہلے Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ حاصل کرتے ہیں۔ N_1 سے N_3 تک سمتی فاصلہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{31} = \boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1 &= (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(5-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ &= -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

ہے جس سے

$$
\begin{aligned}
R_{31} &= \left|\boldsymbol{R}_{31}\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2+4^2} \\
&= \sqrt{21} = 4.583 \\
\boldsymbol{a}_{31} &= \frac{\boldsymbol{R}_{31}}{R_{31}} = \frac{-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{21}} \\
&= -0.436\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+0.218\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.873\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں مساوات 2.18 سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 &= 9\times10^9\,\frac{100\times10^{-6}}{21}\left(-0.436\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+0.218\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.873\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= -18\,686\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+9343\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+37\,414\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 2.7 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت 9×10^9 پر کی گئی۔اسی طرح Q_2 کے لئے حل کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{32} &= (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(5-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

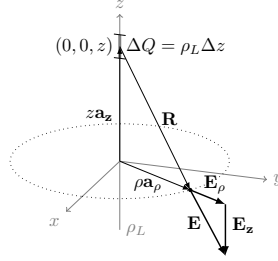
اور

$$
\begin{aligned}
R_{32} &= \left|\boldsymbol{R}_{32}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} \\
\boldsymbol{a}_{32} &= \frac{1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{14}} \\
&= 0.267\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-0.535\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.802\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_2 &= 9\times10^9\,\frac{50\times10^{-6}}{14}\left(0.267\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-0.535\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.802\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= 8582\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-17\,196\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+25\,779\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

ملتا ہے۔ان دو جوابات کا سمتی مجموعہ لیتے ہوئے کل $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2 \\
&= \left(-18\,686\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+9343\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+37\,414\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)+\left(8582\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-17\,196\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+25\,779\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= -10\,104\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-7853\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+63\,193\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

شکل 2.3: یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

مساوات 2.16 کو

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{2.21}$$

لکھی جا سکتی ہے جو برقی میدان $\mathbf{E}$ کے موجودگی میں بار q پر قوت $\mathbf{F}$ دیتا ہے۔

2.3 یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

شکل 2.3 میں z محدد پر $z = -\infty$ سے $z = +\infty$ تک یکساں بار کی کثافت پائی جاتی ہے۔آپ تصور کر سکتے ہیں کہ z محدد پر انتہائی قریب قریب برابر فاصلے پر یکساں نقطہ بار رکھے گئے ہیں۔یوں اگر ΔL لمبائی میں کل ΔQ بار پایا جائے تب اکائی لمبائی میں $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ بار پایا جائے گا جسے *لکیری کثافتِ بار*[17] ρ_L[18] کہا جاتا ہے اور جس کی اکائی $\mathrm{C/m}$ ہے۔لکیری کثافتِ بار کی تعریف

$$\rho_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} \tag{2.22}$$

ہے۔لکیر پر چھوٹی لمبائی اتنی کم نہیں کی جاتی کہ بار بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ نظر آئیں اور لکیری کثافت کی جگہ نقطہ بار نظر آئیں۔اگر لکیر پر بار کی تقسیم ہر جگہ یکساں نہ ہو تب لکیری کثافتِ بار متغیر ہو گی۔آئیں یکساں لکیری کثافتِ بار سے خلاء میں پیدا برقی میدان پر غور کریں۔

---

[17] line charge density

[18] اس کتاب میں رداس کے لئے بھی ρ استعمال کیا جاتا ہے۔ρ کو جب بھی کثافت کے لئے استعمال کیا جائے، اس کے زیر نوشت میں L، S یا h لکھا جائے گا۔

پہلے بغیر قلم اٹھائے اس مسئلے کی نوعیت پر توجہ دیتے ہیں۔ مقام $(0,0,z)$ پر چھوٹی سی لمبائی Δz میں $\rho_L \Delta z$ بار پایا جاتا ہے جسے نقطہ بار تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ z محدد کے گرد $z=0$ یعنی xy سطح پر شکل 2.3 میں نقطہ دار گول دائرہ بنایا گیا ہے۔ نقطہ بار $\rho_L \Delta z$ سے دائرے پر کسی بھی مقام پر پیدا برقی میدان پر غور کرتے ہیں۔ برقی میدان کی مقدار کا دارومدار میدان پیدا کرنے والے بار اور بار سے فاصلے پر ہے۔ نقطہ دار لکیر پر پائے جانے والے تمام نقطوں کا $(0,0,z)$ سے فاصلہ برابر ہے۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ اس دائرے پر برقی میدان کی شدت کی مطلق قیمت ہر جگہ برابر ہو گی۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ بار کی نقطہ نظر سے نقطہ دار لکیر پر تمام نقطے بالکل یکساں نظر آتے ہیں۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ دار دائرے پر ہر جگہ برقی میدان یکساں ہو گا۔

آئیں شکل 2.3 کو دیکھتے ہوئے ایک اور مشابہت پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ $\mathbf{E}$ سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ کی سمت میں ہوتا ہے لہٰذا دائرے پر کسی بھی نقطے پر نقطہ بار $\rho_L \Delta z$ سے پیدا $\boldsymbol{E}$ کے دو اجزاء پائے جائیں گے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z \tag{2.23}$$

مثبت ρ_L کی صورت میں $(0,0,z)$ پر موجود بار سے $\boldsymbol{E}_z$ کی سمت منفی z جانب ہو گی۔ اسی طرح $(0,0,-z)$ پر پائے جانے والے مثبت بار سے دائرے پر پیدا $\boldsymbol{E}$ کی سمت مثبت z جانب ہو گی۔ دائرے پر یہ دونوں ارکان ایک دونوں کو ختم کریں گے۔ اسی عمل سے دائرے پر کسی بھی نقطے پر مثبت z محدد پر کسی بھی فاصلے پر پائے جانے والے بار سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ کے اثر کو منفی z محدد پر اتنے ہی فاصلے پر بار سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرتا ہے۔ یوں دائرے پر

$$\boldsymbol{E}_z = 0 \tag{2.24}$$

ہو گا۔

ایک آخری مشابہت پر اب غور کرتے ہیں۔ اگر نقطہ دار دائرے کو z محدد پر مثبت یا منفی جانب لے جایا جائے تو کیا ہو گا؟ اب بھی دائرے کے ایک جانب کسی بھی فاصلے پر بار کا اثر دائرے کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر بار ختم کرے گا۔ یوں دائرے کے ایک جانب یعنی z محدد پر ∞ تک فاصلے پر باروں کے $\boldsymbol{E}_z$ کو دائرے کی دوسری جانب z محدد پر $-\infty$ تک فاصلے پر باروں کا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرے گا اور یوں خلاء میں ہر جگہ مساوات 2.24 درست ثابت ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں بہتر بیان کیا جا سکتا ہے کہ لامحدود لکیر پر یکساں کثافت بار سے خلاء میں برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پیدا ہو گا۔ آئیں اس $\mathbf{E}$ کو حاصل کریں۔

شکل 2.3 میں مقام z پر نقطہ بار $\rho_L \Delta z$ دائرے پر $\Delta \boldsymbol{E}$ پیدا کرتا ہے۔ محدد کے مبدا سے نقطہ بار کا مقام سمتیہ $z\boldsymbol{a}_z$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ دائرے پر کسی بھی نقطے N کو سمتیہ $\rho \boldsymbol{a}_\rho$ ظاہر کرتا ہے۔ یوں نقطہ بار سے N تک کا سمتی

فاصلہ اور اسی سمت میں اکائی سمتیہ یوں حاصل کئے جائیں گے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \rho \boldsymbol{a}_\rho - z \boldsymbol{a}_\text{Z} \\
|\boldsymbol{R}| &= R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\
\boldsymbol{a}_R &= \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z \boldsymbol{a}_\text{Z}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}
\end{aligned}
$$

مساوات 2.19 سے

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)} \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z \boldsymbol{a}_\text{Z}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\
&= \frac{\rho_L \Delta z \left(\rho \boldsymbol{a}_\rho - z \boldsymbol{a}_\text{Z}\right)}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔تمام باروں کے اثرات کو یکجا کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو تکمل کی شکل دے کر مندرجہ ذیل مساوات میں دکھایا گیا ہے۔تکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہیں۔

$$
\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_L \left(\rho \boldsymbol{a}_\rho - z \boldsymbol{a}_\text{Z}\right)}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \mathrm{d}z \tag{2.25}
$$

اس تکمل کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$
\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{Z}}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.26}
$$

جہاں مساوات کی نشان کے دائیں جانب پہلا تکمل $\boldsymbol{E}_\rho$ اور دوسرا تکمل $\boldsymbol{E}_z$ دیتا ہے یعنی

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{Z}}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

مساوات 2.24 کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دوسرا تکملہ صفر جواب دیگا۔آئیں دونوں تکمل کو باری باری حل کریں۔پہلے $\boldsymbol{E}_\rho$ حل کرتے ہیں۔اس مساوات میں

$$
z = \rho \tan \alpha
$$

استعمال کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے تکمل کا ابتدائی حد

$$-\infty = \rho \tan \alpha_{\text{ابتدائی}}$$
$$\alpha_{\text{ابتدائی}} = -\frac{\pi}{2}$$

اور اختتامی حد

$$\infty = \rho \tan \alpha_{\text{اختتامی}}$$
$$\alpha_{\text{اختتامی}} = \frac{\pi}{2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔مزید

$$\mathrm{d}z = \rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha$$

لکھا جائے گا۔یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha}{\rho^3 \left(1 + \tan^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

لکھا جائے گا جس میں

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha}{\rho^3 \sec^3 \alpha} \\ &= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, \mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \\ &= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \boldsymbol{a}_\rho\end{aligned} \tag{2.28}$$

ملتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ کا استعمال کیا گیا۔

آئیں اب مساوات 2.27 کے دوسرے جزو کو حل کریں۔اس میں بھی $z = \rho\tan\alpha$ استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^2\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

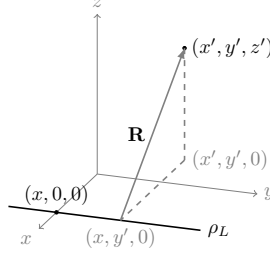
سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sec^3\alpha}\\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\cos\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ملتا ہے۔یہی جواب مساوات 2.24 میں حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.28 اور مساوات 2.29 سے مساوات 2.26 کا حل یوں لکھا جائے گا

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{2.30}$$

جس کے مطابق لامحدود سیدھی لکیر پر یکساں بار سے برقی میدان رداس ρ کے بالعکس متناسب ہے۔اس نتیجے کی مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں جو نقطہ بار کی برقی میدان بیان کرتا ہے۔نقطہ بار کا برقی میدان کروی رداس

شکل 2.4: کسی بھی سمت میں لامحدود لکیر پر بار کی مثال

کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔یوں اگر لامحدود لکیر کے بار سے فاصلہ دگنا کر دیا جائے تو برقی میدان آدھا ہو جائے گا جبکہ نقطہ بار سے فاصلہ دگنا کرنے سے برقی میدان چار گنا کم ہوتا ہے۔

کسی بھی سمت میں لامحدود سیدھی لکیر پر بار کا برقی میدان مساوات 2.30 میں بیان خوبیوں پر پورا اترے گا۔ایسی صورت میں کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرنے کی خاطر اس نقطے سے بار کی لکیر تک کم سے کم فاصلہ R حاصل کریں۔یہ فاصلہ نقطے سے لکیر پر عمود کھینچنے سے حاصل ہو گا۔اس فاصلے کو ρ تصور کریں۔لکیر سے عمودی سمت میں نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_R$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ تصور کریں۔ایسی صورت میں مساوات 2.30 کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R}\boldsymbol{a}_R \tag{2.31}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 2.7: y محدد کے متوازی اور $(x, 0, 0)$ سے گزرتی لامحدود لکیر پر ρ_L کثافت کا بار پایا جاتا ہے۔نقطہ (x', y', z') پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔شکل 2.4 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔

حل: (x', y', z') سے بار کے لکیر پر عمود $(x, y', 0)$ پر ٹکراتا ہے۔ان دو نقطوں کا آپس میں فاصلہ

$$\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}$$

ہے جبکہ

$$\boldsymbol{R} = (x' - x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$
$$\boldsymbol{a}_R = \frac{(x' - x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}}$$

ہیں۔ یوں

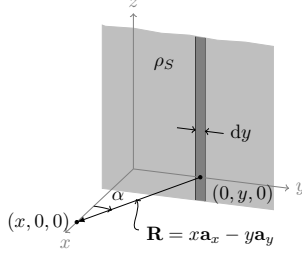
$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}}\boldsymbol{a}_R$$

ہو گا۔

مشق 2.1: y محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $10\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ بار کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0,0,6)$ اور نقطہ $N_2(0,8,6)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جواب: دونوں نقطوں پر $\boldsymbol{E} = 30\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے برابر ہے۔

مشق 2.2: x محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ کثافت بار پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0,5,0)$ اور نقطہ $N_2(7,3,4)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E}_1 = 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\boldsymbol{E}_2 = 18\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{5}\right)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

شکل 2.5: یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح

2.4 یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح

شکل 2.5 میں $z = 0$ پر لامحدود $x - y$ سطح دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس پوری سطح پر انتہائی قریب قریب نقطہ بار یوں رکھے گئے ہیں کہ سطح پر کہیں بھی چھوٹے رقبہ ΔS پر یکساں قیمت کا بار ΔQ پایا جاتا ہے۔ اس طرح اکائی رقبے پر کل $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ بار پایا جائے گا جسے **سطحی کثافتِ بار**[19] ρ_S کہتے ہیں۔ سطحی کثافتِ بار کی تعریف

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{2.32}$$

ہے۔ چھوٹی سطح اتنی کم نہیں لی جاتی کہ اس پر بار بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ بطور نقطہ بار نظر آئیں بلکہ اسے اتنا رکھا جاتا ہے کہ علیحدہ علیحدہ الیکٹران کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ سطح پر ہر جگہ بار کی تقسیم یکساں نہ ہونے کی صورت میں ρ_S کی قیمت متغیر ہو گی۔ آئیں لامحدود سطح پر یکساں کثافتِ بار سے خلاء میں پیدا $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

پہلے غور کرتے ہیں کہ آیا مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے کچھ اخذ کرنا ممکن ہے۔ اگر اس بار بردار سطح کے سامنے ہم کھڑے ہو جائیں تو ہمیں سامنے لامحدود بار بردار سطح نظر آئے گی۔ سطح سے برابر فاصلے پر ہم جہاں بھی جائیں ہمیں صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اسی طرح اگر ہم سطح کی دوسری طرف اتنے ہی فاصلے پر چلے جائیں تو ہمیں صورت حال میں کسی قسم کی کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایسی سطح سے برابر فاصلے پر تمام نقطوں پر یکساں برقی میدان پایا جائے گا۔ اس کے برعکس اگر ہم اس سطح سے دور ہو جائیں تو ہمیں سطح دور نظر آئے گی اور ہو سکتا ہے کہ اس تبدیلی سے $\mathbf{E}$ پر اثر ہو۔ آئیں اب مسئلے کو ریاضی کے اصولوں سے حل کرتے ہوئے $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

[19] surface charge density

شکل 2.5 میں بار بردار سطح پر z محدد کے متوازی دو انتہائی قریب قریب لکیریں کھینچی گئی ہیں جن کے مابین فاصلہ $\mathrm{d}y$ ہے۔اس گھیرے گئے رقبے کی چوڑائی $\mathrm{d}y$ ہے۔یوں ΔL لمبائی اور $\mathrm{d}y$ چوڑائی رقبے میں $\rho_S \Delta L \,\mathrm{d}y$ بار پایا جائے گا۔لکیروں سے گھیرے رقبے کو بار کی سیدھی لکیر تصور کیا جا سکتا ہے جس پر اکائی لمبائی کے رقبے پر $\frac{\rho_S \Delta L \,\mathrm{d}y}{\Delta L}$ بار پایا جائے گا جسے ρ_L تصور کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\rho_L = \rho_S \,\mathrm{d}y \tag{2.33}$$

لامحدود لکیر پر یکساں بار کی کثافت سے پیدا برقی میدان پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا۔نقطہ $(x, 0, 0)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے ہیں۔شکل میں لامحدود بار کی لکیر سے اس نقطے تک کا قریبی سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ دکھایا گیا ہے جہاں

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{2.34}$$

کے برابر ہے جس سے

$$\begin{aligned} R &= |\boldsymbol{R}| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \boldsymbol{a}_R &= \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \tag{2.35}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں بار بردار لکیر سے $(x, 0, 0)$ پر پیدا برقی میدان کو مساوات 2.31 کی مدد سے

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y \left(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \end{aligned} \tag{2.36}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس جواب کو $\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x + \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S y \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \end{aligned} \tag{2.37}$$

کے برابر ہیں۔x محدد کے ایک جانب بار بردار لکیر مندرجہ بالا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ x محدد کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر بار بردار لکیر سے پیدا برقی میدان مندرجہ بالا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو ختم کرے

گا۔یوں کسی بھی مثبت y پر کھینچی لکیر کے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو منفی y پر کھینچی لکیر کا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ ختم کرے گا۔ x محدد کے دونوں جانب مسئلے کی مشابہت سے یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ

$$\boldsymbol{E}_y = 0 \tag{2.38}$$

ہو گا۔

آئیں اب حساب و کتاب سے مساوات 2.37 کو حل کریں۔پہلے $\boldsymbol{E}_x$ حاصل کرتے ہیں۔مساوات 2.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_x$ کا تکمل لیتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} y &= x \tan\alpha \\ \mathrm{d}y &= x \sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha \end{aligned} \tag{2.39}$$

کا استعمال کرتے ہیں۔شکل 2.5 میں α کی نشاندہی کی گئی ہے۔یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_x = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)} \\ &= \frac{\rho_S x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha}{x^2\left(1+\tan^2\alpha\right)} \end{aligned}$$

میں $\sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$ کے استعمال سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}}{2\pi\epsilon_0} \,\alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \end{aligned} \tag{2.40}$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اب $\boldsymbol{E}_y$ حاصل کریں۔

مساوات 2.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_y = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y = -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{y \,\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)}$$

تکمل کے نشان کے اندر $f(y) = x^2 + y^2$ لیتے ہوئے اسے $\frac{\mathrm{d}f(y)}{2f(y)}$ لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل $\frac{\ln f(y)}{2}$ ہے۔یوں

$$\boldsymbol{E}_y = -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\text{y}}{2\pi\epsilon_0} \left. \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} \right|_{y=-\infty}^{y=+\infty} \tag{2.41}$$
$$= 0$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 2.38 میں یہی جواب حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.40 اور مساوات 2.41 کی مدد سے یکساں بار بردار لامحدود سطح کا برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \boldsymbol{a}_N \tag{2.42}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطح سے فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے برقی میدان کی شدت پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ سطح کے دونوں جانب برقی میدان اسی مساوات سے حاصل کی جائے گی۔ظاہر ہے کہ سطح کے دونوں جانب کے اکائی عمودی سمتیہ آپس میں الٹ ہیں۔

اب تصور کریں کہ اس سطح کے متوازی $x = x_1$ پر ایک اور لامحدود سطح رکھی جائے جس پر بار کی یکساں کثافت $-\rho_S$ ہو۔ان دو متوازی سطحوں کو دو دھاتی چادروں سے بنایا گیا برق گیر[20] (کپیسٹر) سمجھا جا سکتا ہے۔کسی بھی نقطے پر کل $\mathbf{E}$ دونوں سطحوں پر بار سے پیدا برقی میدان کا مجموعہ ہو گا۔پہلے دونوں سطحوں کے دونوں جانب برقی میدان لکھتے ہیں۔

- $x = 0$ پر $+\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^+_{x>0} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\text{X} & x &> 0 \\ \boldsymbol{E}^+_{x<0} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\text{X} & x &< 0 \end{aligned}$$

- $x = x_1$ پر $-\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^-_{x>x_1} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\text{X} & x &> x_1 \\ \boldsymbol{E}^-_{x<x_1} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\text{X} & x &< x_1 \end{aligned}$$

[20] capacitor

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے $x < 0$، $x > x_1$ اور $0 < x < x_1$ خطوں میں برقی میدان حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{x<0} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x<0} + \boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = 0 \\
\boldsymbol{E}_{x>x_1} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x>0} + \boldsymbol{E}^{-}_{x>x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = 0 \\
\boldsymbol{E}_{0<x<x_1} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x>0} + \boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

اس نتیجے کے مطابق دو متوازی لامحدود سطحوں جن پر الٹ یکساں کثافت پائی جائے کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا جبکہ سطحوں کے درمیانی خطے میں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \tag{2.44}$$

برقی میدان پایا جاتا ہے۔اس میدان کی سمت مثبت بار بردار چادر سے منفی بار بردار چادر کی جانب ہوتی ہے۔یہی مساوات ایک ایسے برق گیر (کپیسٹر) کے برقی میدان کے لئے بھی استعمال کی جا سکتی ہے جس میں دھاتی چادروں کی لمبائی اور چوڑائی دونوں چادروں کے درمیانی فاصلے سے کئی گنا زیادہ ہو اور چادروں کے درمیان خلاء یا ہوا پائی جائے۔چادروں کے کناروں کے قریب برق گیر (کپیسٹر) کے اندر اور باہر صورت حال قدرِ مختلف ہو گی۔

مثال 2.8: خلاء میں تین متوازی لامحدود سطحیں پائی جاتی ہیں جن پر بار کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔پہلی سطح $y = 2$ پر $2\,\mathrm{nC/m^2}$، دوسری سطح $y = 5$ پر $4\,\mathrm{nC/m^2}$ اور تیسری سطح $y = 10$ پر $-6\,\mathrm{nC/m^2}$ کثافت پائی جاتی ہے۔$N_1(0,0,0)$، $N_2(5,3,4)$، $N_3(-2,7,11)$ اور $N_4(-7,30,22)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: 0، $144\pi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$، $216\pi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور 0

2.5 باربردار حجم

ہم نقطہ بار، لامحدود لکیر پر بار اور لامحدود سطح پر بار دیکھ چکے ہیں۔اگلا فطری قدم بار بردار حجم بنتا ہے لہٰذا اسی پر غور کرتے ہیں۔لکیر اور سطح کی بار پر غور کرتے ہوئے ہر جگہ یکساں کثافت کی بات کی گئی۔حجم میں بار کی بات کرتے ہوئے اس شرط کو دور کرتے ہوئے کثافت کو متغیرہ تصور کرتے ہیں۔یوں مختلف مقامات پر کثافت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔

تصور کریں کہ حجم میں انتہائی قریب قریب نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔یوں اگر کسی نقطے پر Δh حجم میں ΔQ بار پایا جائے تب اس نقطے پر اوسط حجمی کثافتِ بار $\frac{\Delta Q}{\Delta h}$ ہو گی۔کسی بھی نقطے پر بار کی حجمی کثافت یوں بیان کی جاتی ہے۔

$$\rho_h = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h} \tag{2.45}$$

کسی بھی حجم میں کل بار تین گنا تکمل سے حاصل کیا جائے گا۔کارتیسی محدد میں ایسا تکمل یوں لکھا جائے گا۔

$$Q = \iiint\limits_{\mathrm{h}} \rho_h \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \tag{2.46}$$

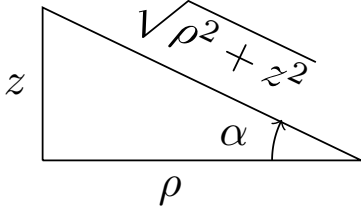
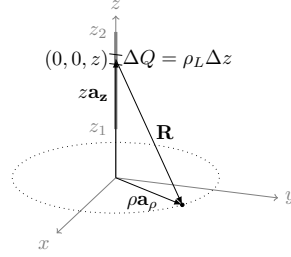
جہاں تکمل کے نشان کے نیچے h حجم کو ظاہر کرتا ہے۔اس طرز کے تکمل کو عموماً ایک گنا تکمل سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$Q = \int\limits_{\mathrm{h}} \rho_h \, \mathrm{d}h \tag{2.47}$$

حجم میں $\mathbf{r}'$ نقطے پر چھوٹی سی حجم $\Delta h'$ میں $\Delta Q = \rho_h' \Delta h'$ بار پایا جائے گا جسے نقطہ بار تصور کیا جا سکتا ہے۔نقطہ $\mathbf{r}$ پر اس نقطہ بار کا برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ مساوات 2.20 سے یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_h' \Delta h'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|}$$

اس مساوات میں نقطہ r' پر بار کی کثافت ρ_h' لکھی گئی ہے۔تمام حجم میں پائے جانے والے بار کا نقطہ $\mathbf{r}$ پر میدان مندرجہ بالا مساوات کے تکمل سے یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\mathrm{h}} \frac{\rho_h' \, \mathrm{d}h'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} \tag{2.48}$$

(ا) محدود لکیر پر بار کی یکساں کثافت

(ب) z اور α کا تعلق

شکل 2.6: محدود لکیر پر بار

اس مساوات کی شکل قدرِ خوف ناک ہے البتہ حقیقت میں ایسا ہر گز نہیں۔ سمتیہ $\mathbf{r}$ اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی میدان حاصل کرنا درکار ہو۔ اس نقطے پر برقی میدان کو $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ لکھ کر اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے کہ نقطے کی تبدیلی سے برقی میدان تبدیل ہو سکتا ہے۔ کثافت از خود متغیرہ ہے جس کی قیمت $\mathbf{r}'$ پر منحصر ہے۔ $\mathbf{r}'$ پر چھوٹی حجم $\mathrm{d}h'$ اور بار کی کثافت ρ_h' لکھے گئے ہیں جہاں $'$ اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ متغیرات نقطہ r' پر پائے جاتے ہیں۔ آخر میں یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے وقت اسی نقطے پر موجود بار کو نظرانداز کیا جاتا ہے۔

2.6 مزید مثال

مثال 2.9: شکل 2.6 میں $z = z_1$ سے $z = z_2$ تک کی سیدھی لکیر پر یکساں ρ_L پایا جاتا ہے۔ نقطہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔ اس گول دائرے کا مرکز کارتیسی محدد کے مبدا $(0,0,0)$ پر ہے جبکہ دائرہ از خود $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: شکل 2.6 سے واضح ہے کہ نکتہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ کی مطلق قیمت $|\boldsymbol{E}|$ یکساں ہو گی۔ یوں ہم لکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|}\frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\\
&= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}}\\
&= \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z
\end{aligned}$$

دائیں جانب باری باری تکملہ حل کرتے ہیں۔ تکملہ حل کرنے کی خاطر $z=\rho\tan\alpha$ کا تعلق استعمال کرتے ہیں۔ α کا z کا تعلق شکل 2.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\rho\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\sin\alpha\Bigg|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\\ &= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1\right)\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \tan^{-1}\frac{z_2}{\rho}\\ \alpha_1 &= \tan^{-1}\frac{z_1}{\rho}\end{aligned}$$

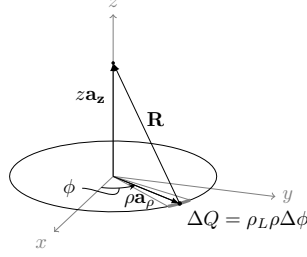
کے برابر ہے۔ شکل 2.6-ب سے $\sin\alpha=\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{E}_\rho=\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}}-\frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}}\\ &= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\rho^2\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\right)\\ &= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)\end{aligned}$$

شکل 2.7: بار بردار گول دائرہ

حاصل ہوتا ہے۔ E_ρ اور E_z کا مجموعہ لیتے ہوئے کل برقی میدان یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) + \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) \tag{2.49}$$

اگر نقطہ دار گول دائرہ $z = z_0$ سطح پر پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}&\left[\frac{z_2 - z_0}{\sqrt{\rho^2+(z_2-z_0)^2}} - \frac{z_1 - z_0}{\sqrt{\rho^2+(z_1-z_0)^2}}\right]\\ &+ \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z_2-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z_1-z_0)^2}}\right]\end{aligned}$$

صورت اختیار کرتا۔

مثال 2.10: شکل 2.7 میں $z = 0$ پر گول دائرہ دکھایا گیا ہے جس پر بار کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

حل: نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔کسی بھی زاویہ پر رداس کھینچتے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔زاویہ میں باریک تبدیلی $\Delta\phi$ سے لمبائی $\rho\Delta\phi$ حاصل ہوتی ہے جس پر کل بار $\Delta Q = \rho_L \rho \Delta\phi$ پایا جائے گا۔یوں بار ΔQ مقام $\rho \boldsymbol{a}_\rho$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $\mathbf{E}$ مقام $z\boldsymbol{a}_\text{Z}$ پر درکار ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{E}$ رداس کی سمت میں ممکن نہیں۔ΔQ سے

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho \Delta\phi}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)} \frac{z\boldsymbol{a}_\text{Z} - \rho \boldsymbol{a}_\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

پیدا ہو گا۔دائرے پر تمام بار کے اثر کے لئے تکملہ لینا ہو گا۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(z\boldsymbol{a}_\text{Z} - \rho \boldsymbol{a}_\rho\right) \mathrm{d}\phi$$

تکملہ کا متغیرہ ϕ ہے جسے تبدیل کرنے سے ρ اور z میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔اسی لئے انہیں تکملہ کی نشان سے باہر لے جایا گیا ہے۔حاصل تکملہ کو دو حصوں میں لکھا جا سکتا ہے البتہ معاملہ اتنا سیدھا نہیں جتنا معلوم ہوتا ہے۔$\boldsymbol{E}_z$ لکھتے ہوئے کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\mathbf{a}_\text{Z}$ کو تکملہ کے باہر لے جایا جا سکتا ہے چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\mathbf{a}_\text{Z}$ تبدیل نہیں ہوتا البتہ $\boldsymbol{E}_\rho$ لکھتے ہوئے نلکی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کو تکملہ کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔چونکہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے لہٰذا اس کو مستقل تصور کرنا غلط ہے اور یوں یہ تکملہ کے اندر ہی رہے گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_\text{Z}}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \\ \boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{a}_\rho \, \mathrm{d}\phi\end{aligned} \tag{2.50}$$

پہلے تکملہ کا جواب اب دیکھ کر ہی

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi \rho_L \rho z \boldsymbol{a}_\text{Z}}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.51}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دوسرے تکملہ میں $\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi \boldsymbol{a}_\text{X} + \sin\phi \boldsymbol{a}_\text{Y}$ لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_\rho = -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\cos\phi \boldsymbol{a}_\text{X} + \sin\phi \boldsymbol{a}_\text{Y}\right) \mathrm{d}\phi$$

$$= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$= 0$$

یہی جواب اس طرح بھی حاصل کیا جا سکتا ہے کہ گول دائرے پر تمام بار کو $Q = 2\pi\rho\rho_L$ لکھیں۔یہ بار نقطہ $(0,0,z)$ سے $\sqrt{\rho^2 + z^2}$ فاصلے پر ہے۔اگر اس تمام بار کو ایک ہی نقطے $(\rho,0,0)$ پر موجود تصور کیا جائے تو یہ

$$\boldsymbol{E}_R = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)} \boldsymbol{a}_R$$

برقی میدان پیدا کرے گا۔بار گول دائرے پر پھیلا ہوا ہے لہٰذا حقیقت میں صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب ہی $\boldsymbol{E}$ پیدا ہوتا ہے۔شکل میں اس تکون کو دیکھتے ہوئے جس کا $\boldsymbol{R}$ حصہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}_R$ کا $\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ حصہ حقیقت میں پایا جائے گا۔یوں

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہی حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.11: رداس a کے کرہ کی سطح پر یکساں کثافتِ بار ρ_S پایا جاتا ہے۔کرہ کے باہر اور اس کے اندر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔کرہ کو کروی محدد کے مبدا پر رکھتے ہوئے حل کریں۔

حل:کرہ کی سطح پر نقطہ $M(a,\theta,\phi)$ پر چھوٹا رقبہ $a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$ میں بار $\rho_S a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$ پایا جائے گا جو نقطہ $N(0,0,b)$ پر برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ پیدا کرے گا۔محدد کے مبدا سے M تک سمتی فاصلہ $a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ مبدا سے N تک سمتی فاصلہ $b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے۔یوں M سے N تک سمتی فاصلہ

$$\boldsymbol{R} = b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{2.52}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد اور کروی محدد کے اکائی سمتیات استعمال کئے گئے ہیں۔اس طرح

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{R}| = \sqrt{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}} &= \sqrt{(b\boldsymbol{a}_{\text{z}} - a\boldsymbol{a}_{\text{r}})\cdot(b\boldsymbol{a}_{\text{z}} - a\boldsymbol{a}_{\text{r}})}\\ &= \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\boldsymbol{a}_{\text{z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}}}\\ &= \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta}\end{aligned} \tag{2.53}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{|R|} = \frac{b\boldsymbol{a}_{\text{z}} - a\boldsymbol{a}_{\text{r}}}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta}} \tag{2.54}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں صفحہ 46 پر جدول 1.3 کے استعمال سے $\boldsymbol{a}_{\text{z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{r}} = \cos\theta$ لکھا گیا ہے۔

کرہ کی سطح z محدد کو $(0,0,-a)$ اور $(0,0,a)$ پر چھوتا ہے جہاں بالترتیب $\theta = \pi$ اور $\theta = 0$ کے برابر ہیں۔یوں $(0,0,-a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos\pi} &= \sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}\\ &= \sqrt{(b+a)^2}\\ &= b + a\end{aligned} \tag{2.55}$$

کے برابر ہے جہاں جذر لیتے وقت مثبت جواب چنا گیا ہے چونکہ فاصلہ غیر سمتی[21] ہے جو مثبت قیمت رکھتا ہے۔اسی طرح $(0,0,a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos 0} = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} \tag{2.56}$$

کے برابر ہے۔اگر N کرہ کے باہر ہو تب $b > a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $b - a$ کے برابر ہو گا جسے مساوات 2.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(b-a)^2} = b - a \tag{2.57}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر N کرہ کے اندر ہو تب $b < a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $a - b$ کے برابر ہو گا جسے اور مساوات 2.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(a-b)^2} = a - b \tag{2.58}$$

[21] فاصلہ ہر صورت مثبت ہوتا ہے البتہ سمتی فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے جہاں سمتی فاصلے کی مقدار مثبت ہی رہتی ہے جبکہ اس کی سمت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اس طرح N پر

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R$$

لکھتے ہوئے تمام کرہ پر بار سے پیدا میدان کو تکمل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho_S a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0(b^2+a^2-2ab\cos\theta)} \frac{b\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} - a\boldsymbol{a}_\mathrm{r}}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}} \\ &= \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(b\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} - a\boldsymbol{a}_\mathrm{r})\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\end{aligned} \tag{2.59}$$

اس مساوات میں جدول 1.3 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\left[-a\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} - a\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (b-a\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right]\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{2.60}$$

حاصل ہوتا ہے۔z محدد سے دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ اس محدد پر میدان صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ سمت میں ہی ممکن ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_\mathrm{X}$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اجزاء کو صفر لیتے ہوئے

$$E_z = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(b-a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{2.61}$$

لکھتے ہیں۔سوال 2.1 میں آپ سے درخواست کی گئی ہے کہ مساوات 2.60 میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{X}$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اجزاء کو صفر ثابت کریں۔بیرونی تکمل پہلے لیتے ہوئے

$$E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{(b-a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta \tag{2.62}$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\pi \frac{\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\pi \frac{\cos\theta\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.63}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 2.63 کے پہلے تکمل میں $w = \cos\theta$ اور $\mathrm{d}w = -\sin\theta \,\mathrm{d}\theta$ پُر کر کے حل کرتے ہوئے

$$\int \frac{\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-\,\mathrm{d}w}{\left(b^2+a^2-2abw\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.64}$$

یعنی

$$\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left.\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}\right|_0^\pi \\ &= \frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\end{aligned} \tag{2.65}$$

حاصل ہوتا ہے جو N بیرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.57 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{b+a}+\frac{1}{b-a}\right] = \frac{1}{ab}\left[\frac{-(b-a)+(b+a)}{(b+a)(b-a)}\right] = \frac{2}{b(b^2-a^2)} \tag{2.66}$$

جبکہ N اندرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.58 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right] = \frac{1}{ab}\left[\frac{-(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)}\right] = \frac{2}{a(a^2-b^2)} \tag{2.67}$$

شکل اختیار کرتا ہے۔

مساوات 2.63 کے دوسرے تکمل میں $w = \cos\theta$ پُر کرتے ہوئے

$$\int \frac{\cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-w\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

کے کلیہ سے بخوبی واقف ہیں۔ہم

$$\begin{aligned} u &= w \\ \mathrm{d}v &= \frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لیتے ہیں۔یوں

$$v = \int \mathrm{d}v = \int \frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہے جسے ہم مساوات 2.64 میں حاصل کر چکے ہیں۔اس طرح

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \int w\left[\frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}\right] \\ &= w\left[\frac{-1}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}\right] + \int \frac{\mathrm{d}w}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-w}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}{a^2b^2} \\ &= \frac{-(b^2+a^2-abw)}{a^2b^2(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left.\frac{-(b^2+a^2-ab\cos\theta)}{a^2b^2(b^2+a^2-2ab\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right] \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ N کا کرہ سے باہر ہونے کی صورت میں اس سے

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}}+\frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right]=\frac{2a}{b^2(b^2-a^2)} \tag{2.68}$$

جبکہ N کا کرہ کے اندر ہونے کی صورت میں اس سے

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}}+\frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right]=\frac{2b}{a^2(a^2-b^2)} \tag{2.69}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کرہ کے باہر مساوات 2.66 اور مساوات 2.68 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63 سے

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{b(b^2-a^2)}\right)-\frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2a}{b^2(b^2-a^2)}\right)\\ &= \frac{4\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0 b^2}\\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \end{aligned} \tag{2.70}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کرہ پر کل بار $4\pi a^2\rho_S$ کو Q لکھا گیا ہے۔ کرہ کے اندر مساوات 2.67 اور مساوات 2.69 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{a(a^2-b^2)}\right)-\frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2b}{a^2(a^2-b^2)}\right)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.71}$$

مساوات 2.70 بیرون کرہ z محدد پر میدان دیتا ہے۔ چونکہ ہم کسی بھی سمت میں اس محدد کو رکھ سکتے تھے اور میدان اسی محدد کی سمت یعنی رداسی سمت میں ہوتا لہٰذا یہ ایک عمومی جواب ہے جسے کسی بھی بیرونی نقطے کے لئے

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (r>a) \tag{2.72}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ وہی میدان ہے جو کروی محدد کے مبدا پر Q نقطہ بار رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.71 کے تحت کرہ کے اندر میدان صفر کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ہم کسی بھی مقام کو کرہ یا کسی بھی مکمل بند موصل سطح میں گھیر کر اس مقام پر صفر برقی میدان یقینی بنا سکتے ہیں۔ایسی سطح کو فیراڈے پردہ[22] کہتے ہیں۔

حصہ 3.4.2 میں اسی مسئلے کو انتہائی آسان طریقے سے حل کرنا دکھایا جائے گا۔

مثال 2.12: مثال 2.11 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے a رداس کرہ جس میں یکساں ρ_h حجمی کثافتِ بار پائی جائے کا کرہ کے اندر اور کرہ کے باہر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

حل: کرہ کے اندر رداس r پر $\mathrm{d}r$ موٹی جھلی کا حجم $4\pi r^2 \,\mathrm{d}r$ ہو گا جس میں کل $4\pi\rho_h r^2 \,\mathrm{d}r$ بار پایا جائے گا۔مثال 2.11 کے مطابق یہ بار r سے کم رداس کے خطے میں کوئی برقی میدان نہیں پیدا کرتا جبکہ r سے زیادہ رداس پر یہ میدان پیدا کرے گا۔یوں R سے کم کسی بھی رداس پر جھلی میں پائے جانے والا بار R پر میدان پیدا کرے گا جسے

$$\boldsymbol{E} = \int_0^R \frac{4\pi\rho_h r^2 \,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \left.\frac{\rho_h r^3}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\right|_0^R = \frac{\rho_h R}{3\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \qquad (R < a) \tag{2.73}$$

لکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔بار کرہ کے باہر یعنی $R > a$ کی صورت میں کرہ میں موجود تمام بار بطور نقطہ بار کردار ادا کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho_h}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \frac{a^3\rho_h}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \qquad (R > a) \tag{2.74}$$

---

[22] Faraday shield

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط

ہم نے اب تک جتنی بھی مثالیں دیکھی ہیں ان سب میں $\boldsymbol{E}$ کی شکل سیدھی لکیر کی مانند رہی ہے۔ایسے میدان کا تصوراتی شکل ذہن میں بنانا آسان ہوتا ہے۔یوں نقطہ بار کے میدان کو بار سے ابتدا کرتے ہوئے ہر طرف سمتیوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔اب بار کے قریب $\boldsymbol{E}$ کی قیمت زیادہ اور بار سے دور اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔یوں مختلف مقامات پر $\boldsymbol{E}$ کی لمبائی یہاں کے میدان کی نسبت سے ہو گی۔میدان کو ظاہر کرنے کے دیگر طریقے بھی رائج ہیں۔

آئیں ایسے ہی ایک طریقے پر غور کریں جس میں میدان کو سمت بہاو خط سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس طریقے میں کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ یہاں سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہوتا ہے۔جس مقام پر گھنے سمت بہاو خطوط پائے جائیں ایسے مقام پر $\boldsymbol{E}$ کی مقدار زیادہ ہوتی ہے اور جہاں ان خطوط کی تعداد کم ہو وہاں میدان کمزور ہوتا ہے۔سمت بہاو خطوط پر تیر کا نشان $\boldsymbol{E}$ کے مثبت سمت کی نشاندہی کرتا ہے۔

کارتیسی محدد میں کسی بھی میدان کو

$$\boldsymbol{E} = E_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + E_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + E_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مساوات ان میدان کو بھی ظاہر کرتا ہے جو سیدھی لکیر کی مانند نہ ہوں۔آئیں ایسے عمومی میدان پر غور کریں جس میں E_z کی قیمت صفر کے برابر ہو جبکہ E_x اور E_y کی قیمتیں x اور y پر منحصر ہو۔کسی بھی نقطہ (x, y) پر ایسے میدان کو

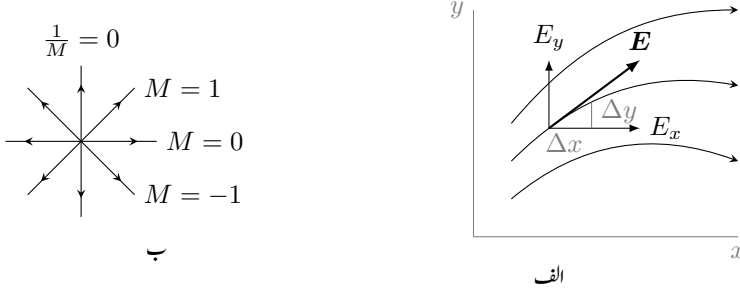
$$\boldsymbol{E} = E_x(x, y) \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + E_y(x, y) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{2.75}$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 2.8-الف میں ایسے ہی ایک $\boldsymbol{E}$ کے تین سمت بہاو خط دکھائے گئے ہیں۔شکل میں کسی عمومی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ دکھایا گیا ہے جو اس نقطے سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہے۔میدان کے کارتیسی اجزاء E_x اور E_y بھی دکھائے گئے ہیں۔اسی نقطے پر سمت بہاو خط کی چھوٹی لمبائی لیتے ہوئے Δx اور Δy دکھائے گئے ہیں۔Δx اور Δy کو کم سے کم کرتے ہوئے ہم شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{E_y}{E_x} \tag{2.76}$$

لکھ سکتے ہیں۔اب اگر ہمیں E_x اور E_y کی خاصیت معلوم ہو تب ہم تکمل سے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

$\frac{1}{M} = 0$
$M = 1$
$M = 0$
$M = -1$
ب

y E_y $\boldsymbol{E}$ Δy E_x Δx x
الف

شکل 2.8: الف) سمت بہاو خط کے مساوات کا حصول۔ ب) لکیری کثافتِ بار کے سمت بہاو خط۔

آئیں لامحدود لکیری کثافتِ بار کے میدان کو مثال بناتے ہوئے اس کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کریں۔ $\rho_L = 2\pi\epsilon_0$ کی صورت میں z محدد پر لامحدود لکیری کثافتِ بار کا میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{a}_\rho}{\rho} \tag{2.77}$$

لکھا جاتا ہے۔ مساوات 2.75 بھی اسی میدان کی مساوات ہے جس سے ظاہر ہے کہ $E_x = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}_\text{x}$ اور $E_y = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}_\text{y}$ سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ یوں مساوات 2.77 کی مدد سے

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\text{x} = \frac{\cos\phi}{\rho} = \frac{x}{x^2+y^2} \\ E_y &= \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\text{y} = \frac{\sin\phi}{\rho} = \frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں لامحدود لکیری کثافتِ بار کے میدان کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_\text{x} + \frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_\text{y} \tag{2.78}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح مساوات 2.76 کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

لکھ کر اس کا تکمل

$$\ln y = \ln x + M'$$

یعنی

$$y = Mx \tag{2.79}$$

لیتے ہوئے میدان کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔یہ سیدھی لکیر کی مساوات ہے جسے مختلف M کے قیمتوں کے لئے شکل 2.8-ب میں کھینچا گیا ہے۔

سوالات

سوال 2.1: صفحہ 86 پر مساوات 2.60 میں a_x اور a_y اجزاء کا تکمل لیتے ہوئے انہیں صفر کے برابر ثابت کریں۔

سوال 2.2: تکون کے تینوں کونوں پر $25\,\mu\text{C}$ کا بار پایا جاتا ہے جبکہ تینوں کونوں سے $15\,\text{cm}$ فاصلے پر $20\,\mu\text{C}$ بار پایا جاتا ہے۔ تکون کے اطراف $10\,\text{cm}$ ہونے کی صورت میں چوتھے بار پر قوت دفع کی مقدار حاصل کریں۔

جواب: $0.553\,\text{N}$

سوال 2.3: $z = 0$ پر $4\,\text{nF}$ اور $z = 1\,\text{cm}$ پر $-3\,\text{nF}$ بار پائے جاتے ہیں۔ z محدد پر وہ نقطے دریافت کریں جہاں مثبت بار پر صفر قوت پائی جائے گی۔

جوابات: $z = 0.92\,\text{cm}$ ، $z = 7.08\,\text{cm}$

سوال 2.4: ایک چکور کے اطراف $25\,\text{cm}$ ہیں جبکہ اس کے چاروں کونوں پر $30\,\text{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔ کسی ایک کونے کے بار پر کتنی قوت عمل کرے گی۔

جواب: $0.248\,\text{mN}$

سوال 2.5: نقطہ $(2, 1, -3)$ پر $15\,\text{nC}$ اور نقطہ $(-3, -5, 4)$ پر $-6\,\text{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2, 1, -3)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $-0.191\boldsymbol{a}_\text{X} + 1.057\boldsymbol{a}_\text{y} + 2.195\boldsymbol{a}_\text{Z}$

سوال 2.6: نقطہ $(0, 0, 3)$ اور $(0, 0, -3)$ پر $20\,\mu\text{C}$ بار پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $N(2, 0, 0)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ محدد کے مبدا پر کتنا بار نقطہ N پر اتنی ہی برقی شدت پیدا کرے گا۔

جوابات: $\boldsymbol{E} = 15\,339\boldsymbol{a}_\text{X}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $6.827\,\mu\text{C}$

سوال 2.7: نقطہ $(4, -2, 7)$ پر $5\,\mu\text{C}$ اور $(-3, 4, -2)$ پر $12\,\mu\text{C}$ بار پایا جاتا ہے۔ y محدد پر کہاں $E_x = 0$ ہو گا۔

جواب: $y=-6.89$ ، $y=-22.11$

سوال 2.8: نقطہ $P(6,3,7)$ پر $6\,\mu\mathrm{C}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(5,4,2)$ پر کارتیسی، نلکی اور کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ نقطہ N کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔ - جوابات: $\boldsymbol{E}=-384.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+384.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-1922\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{E}=-60\boldsymbol{a}_{\rho}+540\boldsymbol{a}_{\phi}-1922\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{E}=-630\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+1817\boldsymbol{a}_{\theta}+540\boldsymbol{a}_{\phi}$

سوال 2.9: نقطہ $(0,0,0.25)$ اور $(0,0,-0.25)$ پر $50\,\mathrm{nC}$ جبکہ $(0,0,0)$ پر $-35\,\mathrm{nC}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(3,1,2)$ پر کارتیسی اور کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $34\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+11\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+22\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $42\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+0.39\boldsymbol{a}_{\theta}$

سوال 2.10: محدد کے مبدا پر $1\,\mathrm{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔ سطح $z=0$ پر اس خط کی مساوات حاصل کریں جس پر $E_y=1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو گا۔

جواب: $80.8y^2=(x^2+y^2)^3$ ، $\rho^2=8.987\sin\phi$

سوال 2.11: محدد کے مبدا پر پڑے چکور کے چاروں کونوں پر $5\,\mathrm{nC}$ نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔ چکور $z=0$ سطح پر پایا جاتا ہے جبکہ اس کے اطراف $1\,\mathrm{m}$ لمبے ہیں۔ نقطہ $(0,a,0)$ اور نقطہ $(0,2a,0)$ پر برقی شدت کی شرح $a=2$ ، $a=10$ اور $a=\infty$ کی صورت میں حاصل کریں۔

جوابات: 4.15 ، 4.01 ، 4

سوال 2.12: نقطہ $(0,0,0)$ پر Q_1 اور نقطہ $(1,0,0)$ پر Q_2 نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(2,1,0)$ پر $E_x=0$ ہونے کی صورت میں باروں کا تعلق دریافت کریں۔

جواب: $Q_1=-1.976Q_2$

سوال 2.13: کارتیسی محدد کے پہلے آٹھویں حصے $(x>0,y>0,z>0)$ میں حجمی کثافت بار $\rho_h=10e^{-2z}(x^2+2y^2)$ ہے جبکہ بقایا سات حصوں میں کوئی بار نہیں پایا جاتا۔ خطہ $(0\leq x\leq 1,\,0\leq y\leq 1,\,0\leq z\leq 1)$ میں کل بار حاصل کریں۔ اسی طرح خطہ $(0\leq x+2y\leq 1,\,0\leq z\leq 1)$ میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: پہلا جواب $4.32\,\mathrm{C}$ ہے۔ دوسرا تکمل $\int_0^{1/2}\int_0^{1-2y}\int_0^1\rho_h\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ لکھتے ہوئے $0.27\,\mathrm{C}$ حاصل ہو گا۔

سوال 2.14: حجمی کثافت بار $\rho_h = (\rho + 0.002)z^2 \tan\phi \, \mathrm{C/m^3}$ خطہ $0 \le \rho \le 0.008$، $30° \le \phi \le 75°$ ، $2 \le z \le 5$ میں پایا جاتا ہے۔ کثافت بار کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کریں۔اس خطے میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: $0.933 \, \mathrm{C/m^3}$ ، $11.05 \, \mathrm{\mu C}$

سوال 2.15: نلکی محدد میں z محدد کے گرد یکساں حجمی کثافت بار $e^{-\rho^2}$ پائی جاتی ہے۔ $z = 0$ تا $z = 1$ کل بار حاصل کریں۔ z محدد کے گرد کتنے رداس کے اندر کل بار کا آدھا پایا جاتا ہے۔

جوابات: $3.142 \, \mathrm{C}$ ، $0.832 \, \mathrm{m}$

سوال 2.16: کروی محدد میں رداس کے ساتھ بدلتا حجمی کثافت بار $\rho_h = \sqrt{r}$ پایا جاتا ہے۔اکائی رداس کے کرہ میں کل بار حاصل کریں۔اسی طرح خطہ $(r \le 0.5, \theta \le 25°, \phi \le \frac{\pi}{3})$ میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: $3.59 \, \mathrm{C}$ ، $0.028 \, \mathrm{C}$

سوال 2.17: x محدد پر $\rho_L = 5 \, \frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ لکیری کثافت بار پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(0, 3, 0)$ پر $-2 \, \mathrm{nC}$ نقطہ بار پایا جاتا ہے۔نقطہ $(4, 8, 1)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $-0.26\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 10.73\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1.32\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.18: نقطہ $(0, 2, 0)$ اور $(0, 0, 4)$ سے گزرتی سیدھی لکیر پر لکیری کثافت بار $2 \, \frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(6, 1, -2)$ پر $7 \, \mathrm{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔نقطہ $(6, 8, 4)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $2.47\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3.78\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1.65\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.19: کارتیسی z محدد کے کچھ حصہ $z \le 0$ پر لکیری کثافت بار $5 \, \frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $(0, 0, -2)$ اور نقطہ $(5, -2, 6)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $-22.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $13.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.20: کارتیسی z محدد کے کچھ حصہ $2 \le z \le 10$ پر لکیری کثافت بار $2 \, \frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $(2, 12, 8)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

$147\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 881\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 133\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 2.21: سطح $y = 1$ پر $\rho_S = 0.72\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، سطح $y = -3$ پر $\rho_S = -0.72\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، سطح $x = -6$ پر $0.4\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ اور لکیر $x = 2, z = 3$ پر $0.4\pi\,\frac{\text{nC}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $(1,3,-1)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $21.3\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 5.31\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 2.22: سطح $z = 0$ پر مستطیل خطہ $-2 \le x \le 2, -3 \le y \le 3$ پر $\rho_S = |x|\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $(0,0,3)$ پر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $13.36\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 2.23: سطح $z = 0$ پر نلکی رداس $\rho = 2$ تا $\rho = 5$ سطحی کثافت بار $\rho_S = 4\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $(0,0,5)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $50\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 2.24: میدان $\boldsymbol{E} = 3\sqrt{x}y\boldsymbol{a}_{\text{X}} + x^3y^2\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کا سمت بہاو خط حاصل کریں۔نقطہ $(4,1,7)$ پر میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ لکھیں۔

جوابات: $\frac{y^2}{2} = \frac{x^{3.5}}{3.5} + C$ ، $0.093\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 0.996\boldsymbol{a}_{\text{y}}$

سوال 2.25: میدان $\boldsymbol{E} = (x+2)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (4-y)\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کے اس سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کریں جو نقطہ $(5,7,2)$ سے گزرتی ہے۔

جواب: $(y-4)(x+2) = 21$

سوال 2.26: جو میدان z تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے، نلکی محدد میں ان کی سمت بہاو خط $\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\,\mathrm{d}\phi} = \frac{E_\rho}{E_\phi}$ حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔نقطہ $(5,75°,3)$ سے گزرتے میدان $\boldsymbol{E} = \rho\cos\phi\boldsymbol{a}_\rho + \sin\phi\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت بہاو خط حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1}{\rho} + \ln(\sin\phi) = 0.1653$

باب 3

گاوس کا قانون اور پھیلاو

3.1 ساکن برقی بار

3.2 فیراڈے کا تجربہ

اس باب کا آغاز مائکل فیراڈے[1] کے ایک تجربہ سے کرتے ہیں جس کا نتیجہ کچھ اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔ برقی بار Q کو بے بار موصل سطح میں مکمل طور پر یوں بند کرنے کے بعد، کہ بار اور سطح کہیں بھی ایک دوسرے کو نہ چھوئیں، موصل سطح کو زمین کے ساتھ ایک لمحے کے لئے ملانے سے موصل سطح پر $Q-$ بار پیدا ہو جاتا ہے۔ دیکھا گیا ہے کہ بار اور بیرونی سطح کے درمیان فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے نتیجہ اثر انداز نہیں ہوتا۔ اسی طرح بار اور سطح کے درمیان مختلف غیر موصل مواد بھرنے سے بھی نتیجہ اثر انداز نہیں ہوتا۔ مزید یہ کہ سطح کی شکل سے بھی نتیجہ اثر انداز نہیں ہوتا۔ اسی طرح جس چیز پر بار Q رکھا گیا ہو، اس کی شکل سے بھی نتیجہ اثر انداز نہیں ہوتا۔

ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے اندرونی بار سے بیرونی سطح تک بار کی مقدار اور قطب کی خبر پہنچتی ہے۔ اس حقیقت کو تصوراتی جامہ یوں پہنایا جا سکتا ہے کہ ہم سمجھیں کہ مثبت بار سے ہر جانب یکساں طور پر کچھ خارج ہوتا ہے۔ اس چیز کو ہم برقی بہاو[2] کہیں گے اور اس کو ψ سے ظاہر کریں گے۔ برقی بہاو کو بار کے برابر تصور کیا جاتا ہے۔

$$\psi = Q \tag{3.1}$$

---

[1] Michael Faraday
[2] electric flux

برقی بہاو کی اکائی کولمب C ہی تصور کی جاتی ہے۔منفی بار کی صورت میں برقی بہاو کی سمت الٹی ہو گی اور یہ بار میں داخل ہو گا۔

تصور کریں کہ اندرونی بار r_1 رداس کے کرہ پر پایا جاتا ہے جبکہ اسے r_2 رداس کے کرہ نے گھیرا ہوا ہے۔کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہوتی ہے۔اندرونی کرہ سے ψ برقی بہاو خارج ہوتا ہے۔یوں اندرونی کرہ سے $\frac{\psi}{4\pi r_1^2}$ برقی بہاو فی اکائی رقبہ خارج ہوتا ہے جسے $\frac{Q}{4\pi r_1^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح بیرونی کرہ پر $\frac{Q}{4\pi r_2^2}$ برقی بہاو فی اکائی رقبہ پہنچتا ہے۔برقی بہاو فی اکائی رقبے کو کثافت برقی بہاو[3] D کہا جائے گا۔یوں اگر اندرونی کرہ کے رداس کو اتنا کم کر دیا جائے کہ اس کو نقطہ تصور کرنا ممکن ہو اور اس نقطہ بار کو رداس r کے کرہ کے مبدا پر رکھا جائے تو کرہ پر

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{3.2}$$

سمتی کثافت برقی بہاو پائی جائے گی۔صفحہ 64 پر مساوات 2.19 سے موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ خلاء میں

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \text{خلاء} \tag{3.3}$$

کے برابر ہے۔اگر نقطہ بار کو کروی محدد کے مبدا پر نہ رکھا جائے تب کسی بھی مقام پر کثافت برقی بہاو حاصل کرنے کی خاطر مساوات 3.2 یوں لکھی جائے گی

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\boldsymbol{a}_R \tag{3.4}$$

جہاں $\boldsymbol{a}_R$ بار سے اس مقام کی جانب اکائی سمتیہ ہے اور R ان کے درمیان فاصلہ ہے۔

ایسا حجم جس میں تغیر پذیر بار کی کثافت پائی جائے میں مقام $\mathbf{r'}$ پر $\Delta h'$ حجم میں $\rho_h' \Delta h'$ بار پایا جائے گا جو مقام $\mathbf{r}$ پر

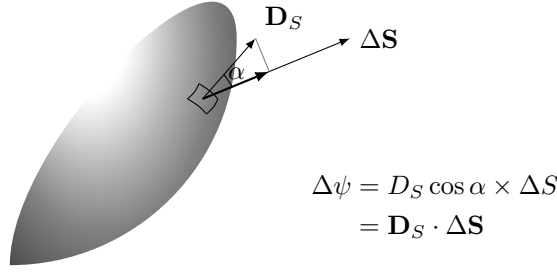
$$\Delta \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_h' \Delta h'}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|}$$

کثافت برقی بہاو پیدا کرے گی۔قانون کولمب خطی ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{D}$ بھی خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہٰذا حجم کے تمام باروں سے

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_h \frac{\rho_h' \,\mathrm{d}h'}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} \tag{3.5}$$

حاصل ہو گا۔مساوات 3.5 کا صفحہ 79 پر مساوات 2.48 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ حجمی کثافت کے لئے بھی مساوات 3.3 خلاء میں $\mathbf{D}$ اور $\mathbf{E}$ کا تعلق بیان کرتا ہے۔اسی طرح ρ_S اور ρ_L سے پیدا $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کا خلاء میں تعلق بھی مساوات 3.3 ہی بیان کرتا ہے۔یوں مساوات 3.3 ایک عمومی مساوات ہے۔

---
[3] electric flux density

$$\Delta\psi = D_S \cos\alpha \times \Delta S$$
$$= \mathbf{D}_S \cdot \Delta\mathbf{S}$$

شکل 3.1: مکمل بند سطح سے گزرتی برقی بہاو سطح میں گھیرے کل بار کے برابر ہے۔

3.3 گاوس کا قانون

فیراڈے کے تجربے کو قانون کی شکل میں یوں پیش کیا جا سکتا ہے جسے **گاوس کا قانون**[4] کہتے ہیں۔

> کسی بھی مکمل بند سطح سے کل گزرتی برقی بہاو سطح میں گھیرے بار کے برابر ہوتی ہے۔

گاوس[5] نے اس قانون کو ریاضیاتی شکل دی جس کی بنا پر یہ قانون انہیں کے نام سے منسوب ہے۔آئیں گاوس کے قانون کی ریاضیاتی شکل حاصل کریں۔

شکل 3.1 میں بند سطح دکھائی گئی ہے جس کی کوئی مخصوص شکل نہیں ہے۔اس سطح کے اندر یعنی سطح کے گھیرے ہوئے حجم میں کل Q بار پایا جاتا ہے۔ سطح پر کسی بھی مقام سے گزرتا برقی بہاو اس مقام پر سطح کی عمودی سمت میں کثافت برقی بہاو اور اس مقام کے رقبہ کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔یوں شکل کو دیکھتے ہوئے چھوٹے سے رقبہ ΔS پر سطح کے عمودی سمت میں برقی بہاو کی کثافت کی قیمت $D_S \cos\alpha$ ہو گی لہٰذا

$$\Delta\psi = D_S \cos\alpha \Delta S$$

ہو گا۔ کثافتِ برقی بہاو D_S لکھتے ہوئے زیرنوشت میں S اس حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ سطح پر کثافتِ برقی بہاو کی قیمت کی بات کی جا رہی ہے۔اس مساوات کو ضرب نقطہ کے استعمال سے

$$\Delta\psi = \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S}$$

---

[4] Gauss's law
[5] Carl Friedrich Gauss

لکھا جا سکتا ہے۔مکمل سطح سے گزرتے ہوئے کل برقی بہاو تکملہ سے حاصل ہو گا جو گاوس کے قانون کے مطابق گھیرے ہوئے بار Q کے برابر ہے۔یوں

$$\psi=\oint_S \boldsymbol{D}_S\cdot\Delta\boldsymbol{S}=Q \tag{3.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ تکملہ دراصل دو گنا تکملہ ہے جسے ہم عموماً ایک گنا تکملہ سے ہی ظاہر کریں گے۔تکملہ کے نشان پر گول دائرہ بند تکملہ[6] کو ظاہر کرتا ہے جبکہ بند تکملہ کے نیچے S اس بند سطح کو ظاہر کرتا ہے جس پر بند تکملہ حاصل کیا جا رہا ہو۔اس بند سطح کو عموماً گاوسی سطح[7] کہتے ہیں۔

جس مقام پر بار کی کثافت ρ_h ہو، وہاں چھوٹا سا حجم Δh میں کل بار $\rho_h\Delta h$ پایا جاتا ہے۔یوں کسی بھی حجم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہوئے تمام حصوں میں پائے جانے والے باروں کا مجموعہ پورے حجم میں بار کے برابر ہو گا یعنی

$$Q=\int_h \rho_h\,\mathrm{d}h \tag{3.7}$$

جہاں تین گنا حجم کے تکمل کو ایک گنا تکمل کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\oint_S \boldsymbol{D}_S\cdot\Delta\boldsymbol{S}=\int_h \rho_h\,\mathrm{d}h \tag{3.8}$$

حاصل ہوتا ہے جو گاوس کے قانون کی تکملہ شکل ہے۔اس مساوات کو یوں پڑھا جاتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی کل برقی بہاو اس سطح کے اندر گھیرے ہوئے کل بار کے برابر ہے۔

یہ ضروری نہیں کہ گھیرے ہوئے حجم یعنی بند حجم میں حجمی کثافت ہی پائی جائے۔بند حجم کے اندر سطحی کثافت، لکیری کثافت، علیحدہ علیحدہ نقطہ بار یا ان تینوں اقسام کا مجموعہ پایا جا سکتا ہے۔حجم گھیرنے والے بند بیرونی سطح کے اندر کسی بھی سطح پر سطحی کثافت کی صورت میں مساوات 3.7 کی جگہ

$$Q=\int_S \rho_S\,\mathrm{d}S \tag{3.9}$$

---

[6] closed integral
[7] gaussian surface

لکھا جائے گا جہاں بار بردار سطح ازخود بند یا کھلی سطح ہو سکتی ہے۔لکیری کثافت کی صورت میں

$$Q = \int_L \rho_L \,\mathrm{d}L \tag{3.10}$$

جبکہ n عدد نقطہ بار کی صورت میں

$$Q = \sum_n Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_n \tag{3.11}$$

لکھا جائے گا، وغیرہ وغیرہ۔بہر حال مساوات 3.7 سے مراد یہ تمام صورتیں لی جاتی ہیں اور یوں ان تمام صورتوں کے لئے گاوس کے قانون کی تکملہ شکل مساوات 3.8 ہی استعمال ہو ہے۔

3.4 گاوس کے قانون کا استعمال

گزشتہ باب میں ہم نے کولمب کے قانون سے نقطہ بار، لامحدود لکیری بار اور لامحدود سطحی بار سے پیدا برقی میدان حاصل کئے۔آیئے اب ان کو گاوس کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان تینوں صورتوں میں گاوس کے قانون کا استعمال بے حد سادہ ثابت ہو گا۔ایسے مسائل جن میں گاوس کے قانون کا استعمال کیا جا سکے کی تعداد بہت کم ہے۔

3.4.1 نقطہ بار

شکل 3.2 میں کرہ کے مبدا پر نقطہ بار دکھایا گیا ہے۔ نقطہ بار کو کروی محدد[8] کے مبدا پر رکھتے ہوئے ہم نے مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے مسئلے کی مشابہت کی بنا پر اخذ کیا تھا کہ کثافتِ برقی میدان صرف رداس کی سمت میں ممکن ہے اور اس کی مطلق قیمت صرف اور صرف رداس r تبدیل کرنے سے تبدیل ہو گی۔اس کا مطلب ہے کہ کروی محدد کے مبدا کے گرد رداس r کے کرہ پر $\mathbf{D}$ تبدیل نہیں ہو گا۔

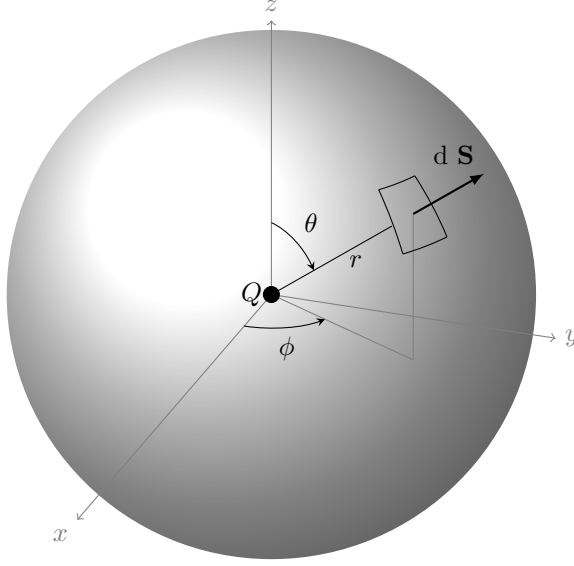
کروی محدد استعمال کرتے ہوئے کرہ پر چھوٹی سی سطح

$$\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$$

لکھی جا سکتی ہے۔اسی کی سمتی شکل

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

---

[8] spherical coordinates

شکل 3.2: کرہ کے مبدا پر نقطہ بار کا کرہ کے سطح پر کثافتِ برقی بہاو

ہو گی۔اس سطح پر کثافتِ برقی بہاو کی قیمت D_S اور سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گی لہٰذا سمتی کثافتِ برقی بہاو

$$\boldsymbol{D}_S = D_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

لکھی جائے گی۔یوں اس چھوٹی سی سطح سے گزرتا برقی بہاو

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\psi &= \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= (D_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}) \cdot \left(r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \right) \\
&= D_S r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

ہو گا۔اس طرح پورے کرہ سے گزرتا برقی بہاو تکملہ سے یوں حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\psi &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \\
&= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} -\cos\theta \Big|_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \\
&= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 2 \, \mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

$$= 4\pi r^2 D_S$$

گاوس کے قانون کے تحت یہ برقی بہاو گھیرے گئے بار Q کے برابر ہے لہٰذا

$$4\pi r^2 D_S = Q$$

ہو گا جس سے

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب بغیر زیادہ حساب و کتاب کے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

کرہ پر کثافتِ برقی بہاو D_S عمودی ہے اور اس کی قیمت کرہ پر تبدیل نہیں ہوتی۔کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری سطح سے $4\pi r^2 D_S$ برقی بہاو گزرے گا جو گاوس کے قانون کے تحت Q کے برابر ہے لہٰذا $4\pi r^2 D_S = Q$ ہو گا جس سے $D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔اس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D}_S = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{3.12}$$

اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{3.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا صفحہ 64 پر مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ جواب کتنی آسانی سے حاصل ہوا۔

3.4.2 یکساں بار بردار کروی سطح

صفحہ 84 پر حصہ 2.11 میں کروی محدد کے مبدا پر a رداس کی کروی سطح جس پر یکساں ρ_S کثافتِ بار پائی جائے کا میدان بیرونِ کرہ اور اندرونِ کرہ سے حاصل کیا گیا۔آیئے گاوس کے قانون سے انہیں جوابات کو دوبارہ حاصل کریں۔

کرہ کے اندر r رداس کا کرہ لیتے ہیں۔یوں $a > r$ رداس کے کرہ میں صفر بار پایا جائے گا۔یوں اس کی سطح پر صفر میدان ہو گا۔اس کے برعکس $a > r$ رداس کا کرہ a رداس کے کرہ کو گھیرتا ہے لہٰذا یہ $4\pi a^2 \rho_S$ بار کو گھیرے گا لہٰذا یہاں

$$\boldsymbol{D} = \frac{4\pi a^2 \rho_S}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

ہو گا جس سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\text{r}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کل بار کو Q لکھا گیا ہے۔یہ نتائج گاوس کے قانون کے استعمال سے حاصل کئے گئے۔ساتھ ہی ساتھ اس حقیقت کو مد نظر رکھا گیا کہ میدان صرف رداسی سمت میں ممکن ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس مسئلے کو حل کرنے کا موجودہ طریقہ نہایت آسان ہے۔

3.4.3 یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر

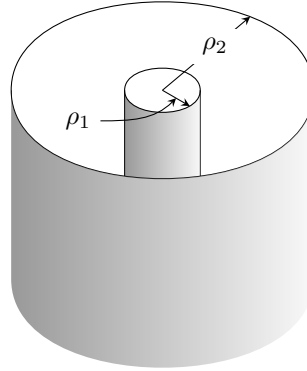
ایسی لامحدود لکیر جس پر بار کی یکساں کثافت پائی جائے کے گرد رداس پر گھومتے ہوئے صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آتی۔اسی طرح اس لکیر کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے بھی صورت حال میں کسی قسم کی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔لامحدود لکیر کو نلکی محدد کی z محدد تصور کرتے ہوئے ان حقائق کی روشنی میں ہم توقع کرتے ہیں کہ برقی میدان صرف رداس تبدیل کرنے سے ہی تبدیل ہو گا۔مزید، جیسا کہ پچھلے باب میں بتلایا گیا، کسی بھی نقطے کے ایک جانب لکیر پر بار سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کی سمت میں ہو کو لکیر پر نقطے کی دوسری جانب برابر فاصلے پر بار سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کی سمت میں ہو ختم کرتا ہے۔یوں یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ کثافتِ برقی بہاو صرف رداس کی سمت میں ہی پایا جائے گا۔آئیں ان معلومات کی روشنی میں گاوس کے قانون کی مدد سے کثافتِ برقی بہاو حاصل کریں۔

بار بردار لکیر جس پر یکساں کثافتِ بار ρ_L پایا جائے کی لمبائی L میں کل بار $\rho_L L$ ہو گا۔اس لمبائی کے گرد ρ رداس کی نلکی سطح تصور کرتے ہیں جس کے دونوں آخری سرے[9] بند تصور کریں۔چونکہ برقی بہاو صرف رداس کی سمت میں ہے لہٰذا ان دونوں آخری سروں سے کوئی برقی بہاو نہیں ہو گا۔نلکی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہے جبکہ اس سطح پر ہر جگہ کثافتِ برقی بہاو D_ρ ہے لہٰذا پوری سطح سے $2\pi\rho L D_\rho$ برقی بہاو ہو گا جو گاوس کے قانون کے تحت گھیرے گئے بار $\rho_L L$ کے برابر ہو گا۔اس طرح

$$2\pi\rho D_\rho = \rho_L L$$

لکھتے ہوئے

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

[9] آخری سروں کو غیر موصل چادر سے بند کیا جا سکتا ہے۔یوں اس نلکی سطح تک بار نہیں پہنچ پائے گا۔

شکل 3.3: ہم محوری تار

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.14}$$

سے

$$\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.15}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 71 پر مساوات 2.30 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ طریقہ کتنا سادہ ہے۔

3.5 ہم محوری تار

یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر کے قصے کو آگے بڑھاتے ہوئے تصور کریں کہ اس تار کا رداس ρ_1 ہے۔اگر تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی میں Q بار پایا جائے تو تار پر بار کی لکیری کثافت $\rho_L = \frac{Q}{L}$ ہو گی جبکہ اس پر بار کی سطحی کثافت $\frac{Q}{2\pi\rho_1 L}$ ہو گی۔جیسا آپ جانتے ہیں ہیں ٹھوس موصل میں باروں کے مابین قوت دفع کی وجہ سے تمام بار موصل کے بیرونی سطح پر دھکیلے جاتے ہیں۔یوں بار Q تار کے بیرونی سطح، محور سے ρ_1 فاصلے، پر پایا جائے گا۔

اب تصور کریں کہ پہلی تار کے اوپر نلکی نما دوسری تار چڑھائی جائے جس کا اندرونی رداس ρ_2 ہو جہاں $\rho_2 > \rho_1$ ہو گا۔ایسی تار جسے ہم **محوری تار**[10] کہتے ہیں کو شکل 3.3 میں دکھایا گیا ہے۔تصور کریں کہ بیرونی تار پر کسی بھی جگہ L

[10] coaxial cable

لمبائی پر $-Q$ بار پایا جاتا ہے۔دونوں تاروں پر الٹ اقسام کے بار ہیں جن میں قوت کشش پائی جائے گی۔یوں بیرونی تار پر بار تار کے اندرونی سطح یعنی محور سے ρ_2 رداس پر پایا جائے گا۔بیرونی تار پر $\rho_L = \frac{-Q}{L}$ جبکہ $\rho_S = \frac{-Q}{2\pi\rho_2 L}$ ہو گی۔

دونوں تاروں کے درمیانی فاصلے میں رداس ρ کی فرضی نلکی سطح صرف اندرونی تار کے بار کو گھیرتی ہے لہٰذا L لمبائی کی ایسی نلکی پر مساوات 3.14 کی طرح

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\rho \\ &= \frac{Q}{2\pi\rho L}\boldsymbol{a}_\rho \end{aligned} \tag{3.16}$$

پایا جائے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بیرونی تار پر بار کا اس میدان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔یوں اندرونی تار کے بیرونی سطح پر

$$\boldsymbol{D}_1 = \frac{Q}{2\pi\rho_1 L}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.17}$$

جبکہ بیرونی تار کے اندرونی سطح پر

$$\boldsymbol{D}_2 = \frac{Q}{2\pi\rho_2 L}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.18}$$

پایا جائے گا۔بیرونی تار کے باہر فرضی نلکی سطح میں کل صفر بار پایا جاتا ہے لہٰذا ہم محوری تار کے باہر (یعنی بیرونی تار کے باہر)

$$\boldsymbol{D}_{\text{تار کے باہر}} = 0 \tag{3.19}$$

ہو گا۔مساوات 3.14 انتہائی اہم نتیجہ ہے۔اس کے مطابق ہم محوری تار کے باہر کسی قسم کا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا تار کے باہر سے کسی طرح بھی یہ معلوم نہیں کیا جا سکتا کہ تار پر کس قسم کا بار پائے جاتے ہیں۔یوں ہم محوری تار کے ذریعہ اشارات کی منتقلی محفوظ ہوتی ہے۔ہم محوری تار میں بیرونی تار اندرونی تار کو پناہ دیتا ہے۔ لہٰذا ہم محوری تار کو پناہ دار تار[11] بھی کہا جائے گا۔

[11] shielded

مثال 3.1: ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس 1 mm اور بیرونی تار کا اندرونی رداس 5 mm ہے۔ 3 mm رداس پر کثافتِ برقی بہاو $-5\,\frac{\mu\text{Wb}}{\text{m}^2}$ ہے جبکہ تار کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا۔ دونوں تاروں پر بار کی سطحی کثافت حاصل کریں۔

حل: تار کے گرد برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پایا جاتا ہے۔ اگر تار پر بار کی لکیری کثافت ρ_L ہو تب مساوات

$$-5 \times 10^{-6} = \frac{\rho_L}{2\pi \times 0.003}$$

سے $\rho_L = -94.26\,\frac{\text{nC}}{\text{m}}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں اندرونی تار کے ایک میٹر لمبائی پر $-94.26\,\text{nC}$ بار پایا جائے گا جس سے اس کی سطحی کثافت

$$\rho_{S1} = \frac{-0.09426 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.001 \times 1} = -15\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔ بیرونی تار کے ایک میٹر فاصلے پر $94.26\,\text{nC}$ بار پایا جائے گا جس سے یہاں

$$\rho_{S2} = \frac{94.26 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.005 \times 1} = 3\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

3.6 یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح

اگر بار بردار ہموار لامحدود سطح سے برابر فاصلے پر کسی بھی مقام سے دیکھا جائے تو صورت حال بالکل یکساں معلوم ہو گی۔ کسی بھی نقطے کے ایک جانب باروں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو بار بردار سطح کے متوازی ہو کو نقطے کے دوسری جانب باروں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو بار بردار سطح کے متوازی ہو کو ختم کرتا ہے۔ ان حقائق سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ ایسی سطح کا برقی میدان سطح کی عمودی سمت میں ہو گا اور سطح سے یکساں فاصلے پر برقی میدان کی مطلق قیمت برابر ہو گی۔ صفحہ 74 پر ایسی لامحدود سطح شکل 2.5 میں دکھائی گئی ہے۔

اس شکل میں بار بردار سطح کے متوازی دونوں اطراف برابر فاصلے پر تصوراتی لامحدود سطح تصور کرتے ہیں۔ان سطحوں پر آمنے سامنے رقبہ S لیتے ہوئے انہیں عمودی سطحوں سے بند کرتے ہوئے حجم گھیرتے ہیں۔سامنے سطح پر $D\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ جبکہ پیچھے سطح پر $-D\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ہو گا جبکہ ان رقبوں کو $S\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ اور $-S\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ برقی میدان سطحوں کے عمودی ہے لہٰذا دونوں سطحوں کو ملانے والے عمودی سطحوں میں سے کوئی برقی بہاو نہیں ہو گا۔یوں حجم سے برقی بہاو صرف ان آمنے سامنے رقبوں سے یعنی

$$\psi_{\text{سامنے}} = D\boldsymbol{a}_{\text{X}} \cdot S\boldsymbol{a}_{\text{X}} = SD$$
$$\psi_{\text{پیچھے}} = (-D\boldsymbol{a}_{\text{X}}) \cdot (-S\boldsymbol{a}_{\text{X}}) = SD$$

جو گھیرے گئی بار کے برابر ہو گا۔اگر بار بردار سطح پر ρ_S ہو تب حجم میں $\rho_S S$ بار پایا جائے گا۔یوں

$$\psi_{\text{سامنے}} + \psi_{\text{پیچھے}} = 2DS = \rho_S S$$

لکھتے ہوئے

$$D = \frac{\rho_S}{2}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D} = \frac{\rho_S}{2}\boldsymbol{a}_N \tag{3.20}$$

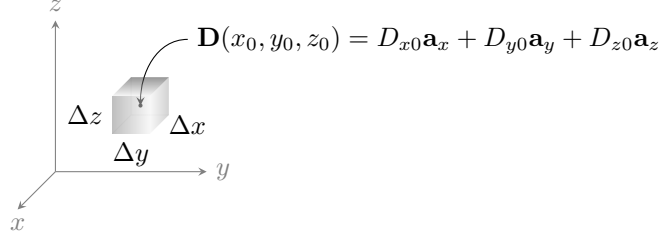
لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ سے مراد سطح کی اکائی سمتیہ ہے۔یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_N \tag{3.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 2.42 کے حصول کا موجودہ طریقہ زیادہ آسان ہے۔

3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاوس کے قانون کا اطلاق

شکل 3.4 میں کارتیسی محدد کے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر چھوٹا مستطیلی ڈبہ دکھایا گیا ہے جس کے اطراف Δx، Δy اور Δz ہیں۔یہ ڈبہ برقی میدان $\boldsymbol{D} = D_x\boldsymbol{a}_{\text{X}} + D_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + D_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ میں ہے۔اس چھوٹی ڈبیہ پر گاوس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{3.22}$$

شکل 3.4: انتہائی چھوٹی حجم پر گاوس کے قانون کا اطلاق

کا اطلاق کرتے ہیں۔ڈبیہ کے چھ اطراف ہیں۔یوں مندرجہ بالا تکملہ کے بائیں بازو کو

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پیچھے}} + \int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}
\int_{\text{سامنے}} &\doteq \boldsymbol{D}_{\text{سامنے}} \cdot \Delta \boldsymbol{S}_{\text{سامنے}} \\
&\doteq \left(D_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + D_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)_{\text{سامنے}} \cdot \Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
&\doteq D_{x,\text{سامنے}} \Delta y \Delta z
\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

ہمیں $\boldsymbol{D}$ کی قیمت ڈبیہ کے وسط میں معلوم ہے۔ٹیلر تسلسل[12] کے مطابق کسی بھی تفاعل جس کی قیمت نقطہ a پر معلوم ہو کو اس نقطے کے قریبی نقطوں پر

$$f(x+a) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \cdots$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ڈبیہ کے وسط میں نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر

$$\boldsymbol{D}(x_0, y_0, z_0) = D_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + D_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

[12] Taylor series

کی قیمت سے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر ڈبیہ کے سامنے سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} D_{x,\text{سامنے}} &= D_{x0} + \frac{1}{1!}\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\Delta x}{2}\right]^2 \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2}\cdots \\ &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} \end{aligned}$$

جہاں دوسرے قدم پر تسلسل کے صرف پہلے دو اجزاء لئے گئے ہیں۔تفاعل کے ایک سے زیادہ متغیرات x، y اور z ہیں لہٰذا تسلسل میں جزوی تفرق[13] کا استعمال کیا گیا۔

یوں

$$\int_{\text{سامنے}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔

بند سطح کی سمت باہر جانب ہوتی ہے لہٰذا پچھلی سطح $-\Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ہے اور یوں ڈبیہ کی پچھلی سطح کے لئے

$$\begin{aligned} \int_{\text{پیچھے}} &\doteq \boldsymbol{D}_{\text{پیچھے}} \cdot \Delta \boldsymbol{S}_{\text{پیچھے}} \\ &\doteq \left(D_x \boldsymbol{a}_{\text{X}} + D_y \boldsymbol{a}_{\text{Y}} + D_z \boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right)_{\text{پیچھے}} \cdot \left(-\Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\text{X}}\right) \\ &\doteq -D_{x,\text{پیچھے}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں وسط سے $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر ڈبیہ کی پچھلی سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے

$$D_{x,\text{پیچھے}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$\int_{\text{پیچھے}} \doteq -\left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

[13] partial differential

اور

$$\int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پیچھے}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$
$$\doteq \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی عمل کو دہراتے ہوئے بائیں اور دائیں سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z$$

اور اوپر، نیچے سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔اس طرح

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \tag{3.23}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر انتہائی چھوٹا حجم Δh میں بار تقریباً

$$Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta h \tag{3.24}$$

کے برابر ہے۔حجم کی جسامت جتنی کم کی جائے جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔اگلے حصے میں حجم کو کم کرتے کرتے نقطہ نما بنا دیا جائے گا۔ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات مکمل طور صحیح جواب مہیا کرے گا۔

مثال 3.2: اگر $\boldsymbol{D} = 2x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 3y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\text{C}/\text{m}^2$ ہو تب کارتیسی محدد کے مبدا پر $10^{-9}\,\text{m}^3$ کے انتہائی چھوٹی حجم میں بار حاصل کریں۔

حل:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2 + 3 + 0$$

سے اس حجم میں $5 \times 10^{-9} = 5\,\text{nC}$ بار پایا جائے گا۔

3.8 پھیلاو

مساوات 3.23 میں حجم کو اتنا کم کرتے ہوئے کہ اس کو صفر تصور کرنا ممکن ہو

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{Q}{\Delta h}$$

لکھا جا سکتا ہے۔بار فی حجم کو حجمی کثافت کہتے ہیں۔یوں مساوات کا دایاں بازو نقطے پر حجمی کثافت ρ_h دیتا ہے۔اس طرح اس مساوات سے دو مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں یعنی

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_h \tag{3.25}$$

اور

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.26}$$

مساوات 3.25 **میکس ویل**[14] [15] کی پہلی مساوات ہے جبکہ مساوات 3.26 سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کا پھیلاو[16] بیان کرتا ہے۔اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف جبکہ اس کا بایاں بازو پھیلاو حاصل کرنے کا طریقہ دیتا ہے۔یوں کارتیسی محدد میں

$$\text{مساوات کی پھیلاو میں محدد کارتیسی} \qquad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.27}$$

---

[14] Maxwell equation
[15] جناب جیمس کلارک میکس ویل (1831-1879) کے مساوات میکس ویل مساوات کہلاتے ہیں۔
[16] divergence

سے سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کا پھیلاو حاصل کیا جاتا ہے۔

انجنیئرنگ کے شعبے میں ایسے کئی مسئلے پائے جاتے ہیں جن میں چھوٹے سے حجم کو گھیرنے والے بند سطح پر کسی سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کا $\oint_S \boldsymbol{K}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ درکار ہو۔ گزشتہ حصے میں سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کے لئے ایسا ہی کیا گیا۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ایسا کرتے ہوئے $\boldsymbol{D}$ کی جگہ $\boldsymbol{K}$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\frac{\partial K_x}{\partial x}+\frac{\partial K_y}{\partial y}+\frac{\partial K_z}{\partial z}=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\oint\limits_S \boldsymbol{K}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.28}$$

حاصل ہوتا۔ سمتیہ $\boldsymbol{K}$ پانی کا بہاو، ایٹوں کی رفتار یا سیلیکان کی پتری میں درجہ حرارت ہو سکتا ہے۔ ہم $\boldsymbol{K}$ کو سمتی بہاو کی کثافت تصور کریں گے۔ مندرجہ بالا مساوات $\boldsymbol{K}$ کا پھیلاو بیان کرتی ہے۔ پھیلاو کے عمل سے مراد مساوات کے بائیں بازو کا عمل ہے جبکہ مساوات کا دایاں بازو اس کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے تحت

کسی بھی سمتی کثافتی بہاو کے پھیلاو سے مراد کسی چھوٹے حجم کو صفر کرتے ہوئے اس سے خارج کل بہاو فی اکائی حجم ہے۔

یہ ضروری ہے کہ آپ کو پھیلاو کی تعریف کی سمجھ ہو۔ یاد رہے کہ پھیلاو کا عمل سمتیہ پر کیا جاتا ہے جبکہ اس سے حاصل جواب غیر سمتی مقدار ہوتا ہے۔ کسی نقطے پر چھوٹے حجم سے باہر کی جانب کل بہاو فی چھوٹے حجم کو پھیلاو کہتے ہیں۔ پھیلاو کی کوئی سمت نہیں ہوتی۔ پھیلاو کی تعریف جانتے ہوئے کئی مرتبہ بغیر قلم اٹھائے جواب حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی نوعیت کے چند مسئلوں پر اب غور کرتے ہیں۔

پانی سے بھری بالٹی میں پانی میں ڈوبے کسی بھی نقطے پر پانی کی رفتار کا پھیلاو صفر ہو گا چونکہ اس نقطے سے نہ پانی باہر نکل رہا ہے اور نا ہی اس میں داخل ہو رہا ہے۔ اسی طرح دریا میں پانی میں ڈوبے نقطے پر بھی پانی کی رفتار کا پھیلاو صفر ہو گا چونکہ ایسے نقطے سے جتنا پانی نکلتا ہے، اتنا ہی پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔ البتہ اگر بھری بالٹی کے تہہ میں سوراخ کر دیا جائے تو جب تک نقطہ پانی میں ڈوبا رہے اس وقت تک یہاں پھیلاو صفر رہے گا البتہ جیسے ہی نقطہ پانی سے نمودار ہونے لگے یہاں مثبت پھیلاو پایا جائے گا اور جب نقطہ پانی سے مکمل طور پر باہر آ جائے تب ایک بار پھر یہاں پھیلاو صفر ہو جائے گا۔ جتنی دیر نقطہ پانی کی سطح سے باہر نمودار ہو رہا ہوتا ہے اتنی دیر اس نقطے سے پانی کی انخلا پائی جاتی ہے جس کی وجہ سے یہاں پھیلاو پایا جاتا ہے۔

ایک اور دلچسپ مثال سائیکل کے ٹائر میں ہوا کی ہے۔اگر ٹائر پنکچر ہو جائے اور اس سے ہوا نکلنی شروع ہو جائے تو ٹائر میں کسی بھی نقطے پر سمتی رفتار کا پھیلاو پایا جائے گا چونکہ کسی بھی نقطے پر دیکھا جائے تو یہاں سے ہوا پھیلتے ہوئے خارج ہو گی۔یوں مثبت پھیلاو سے مراد نقطے سے انخلا جبکہ منفی پھیلاو سے مراد نقطے میں داخل ہونا ہے۔

ریاضیاتی عمل کو بیان کرنے کے لئے عموماً علامت استعمال کی جاتی ہے۔یوں جمع کے لئے $+$، ضرب کے لئے $\times$ اور تکملہ کے لئے $\int$ استعمال کئے جاتے ہیں۔آیئے ایک نئی علامت جسے نیبلا[17] کہتے اور ∇ سے ظاہر کرتے ہیں سیکھیں۔نیبلا یونانی حروف تہجی کا حرف ہے۔ تصور کریں کہ

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{3.29}$$

لکھا جاتا ہے جہاں غیر سمتی متغیرہ f کے سامنے لکھنے سے مراد

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{3.30}$$

جبکہ سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کے ساتھ نقطہ ضرب سے مراد

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{K}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\cdot\left(K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+K_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+K_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\\&=\frac{\partial K_x}{\partial x}+\frac{\partial K_y}{\partial y}+\frac{\partial K_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{3.31}$$

لیا جاتا ہے۔یہ علامت انجنیئرنگ کے شعبے میں انتہائی مقبول ہے۔اسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کو $\nabla\cdot\boldsymbol{D}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.32}$$

کے برابر ہے۔پھیلاو کے عمل کو ہم اسی علامت سے ظاہر کریں گے۔مساوات 3.25 یعنی میکس ویل کی پہلی مساوات اب یوں لکھی جا سکتی ہے۔

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_h \quad \text{مساوات پہلی کی ویل میکس} \tag{3.33}$$

---

[17] nabla, del

میکس ویل کی پہلی مساوات درحقیقت گاوس کے قانون کی تفرق[18] شکل ہے۔اسی طرح گاوس کا قانون میکس ویل مساوات کی تکمل[19] شکل ہے۔

مساوات 3.30 کے طرز پر مساوات صفحہ 152 پر دیا گیا ہے۔

3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات

حصہ 3.7 میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے چھوٹے حجم پر گاوس کے قانون کے اطلاق سے پھیلاو کی مساوات حاصل کی گئی۔اس حصے میں نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے شکل میں دکھائے چھوٹے حجم کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی جائے گی۔شکل کو دیکھتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\Delta_{S\,\text{سامنے}} &= -\Delta\rho\Delta z\boldsymbol{a}_\phi \\
\Delta_{S\,\text{پیچھے}} &= +\Delta\rho\Delta z\boldsymbol{a}_\phi \\
\Delta_{S\,\text{بائیں}} &= -\left(\rho-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z\boldsymbol{a}_\rho \\
\Delta_{S\,\text{دائیں}} &= +\left(\rho+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z\boldsymbol{a}_\rho \\
\Delta_{S\,\text{اوپر}} &= +\rho\Delta\phi\Delta\rho\boldsymbol{a}_\text{Z} \\
\Delta_{S\,\text{نیچے}} &= -\rho\Delta\phi\Delta\rho\boldsymbol{a}_\text{Z}
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔کارتیسی محدد میں آمنے سامنے رقبے برابر تھے۔نلکی محدد میں بائیں اور دائیں رقبے برابر نہیں ہیں۔اس فرق کی بنا پر نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات قدر مختلف حاصل ہو گی۔چھوٹے حجم کے وسط میں

$$\boldsymbol{D} = D_{\rho 0}\boldsymbol{a}_\rho + D_{\phi 0}\boldsymbol{a}_\phi + D_{z0}\boldsymbol{a}_\text{Z} \tag{3.34}$$

[18] differential
[19] integral

کے برابر ہے جس سے ٹیلر تسلسل کی مدد سے

$$\boldsymbol{D}_{\text{سامنے}} = \left(D_{\phi 0} - \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{a}_\phi$$
$$\boldsymbol{D}_{\text{پیچھے}} = \left(D_{\phi 0} + \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{a}_\phi$$
$$\boldsymbol{D}_{\text{بائیں}} = \left(D_{\rho 0} - \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\rho$$
$$\boldsymbol{D}_{\text{دائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\rho$$
$$\boldsymbol{D}_{\text{اوپر}} = \left(D_{z0} + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\text{z}$$
$$\boldsymbol{D}_{\text{نیچے}} = \left(D_{z0} - \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\text{z}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پیچھے}} = \frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \rho\frac{\partial D_\rho}{\partial\rho}\right)\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} = \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ایسا لکھتے وقت یاد رہے کہ نقطہ $N(\rho_0, \phi_0, z_0)$ پر

$$\left.\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho}\right|_N = D_\rho + \rho\left.\frac{\Delta D_\rho}{\Delta\rho}\right|_N = D_{\rho 0} + \rho\frac{\partial D_\rho}{\partial\rho}$$

کے برابر ہے۔اسی طرح

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} = \rho \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta\rho \Delta\phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ان تمام کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \rho \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta\rho \Delta\phi \Delta z$$

ملتا ہے۔چھوٹے حجم $\Delta h = \rho \Delta\rho \Delta\phi \Delta z$ کے استعمال سے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.35}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 3.28 کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 3.35 نلکی محدد میں پھیلاو دیتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات سادہ شکل نہیں رکھتی۔مساوات 3.29 میں دی گئی ∇ کو استعمال کرتے ہوئے نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات ہرگز حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔اس کے باوجود نلکی محدد میں بھی پھیلاو کے عمل کو $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ سے ہی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں اس سے مراد

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.36}$$

لیا جاتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات ہے جو کسی بھی سمتیہ کے لئے درست ہے۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کے لئے اسے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho K_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial K_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \tag{3.37}$$

3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات

کارتیسی محدد میں چھوٹے حجم کے آمنے سامنے اطراف کا رقبہ برابر ہوتا ہے جس سے پھیلاو کی مساوات آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔نلکی محدد میں چھوٹے حجم کے رداسی سمت کے آمنے سامنے رقبے مختلف ہوتے ہیں جن کا خصوصی

خیال رکھتے ہوئے پھیلاو کی قدر مشکل مساوات گزشتہ حصے میں حاصل کی گئی۔اس حصے میں پھیلاو کی مساوات حاصل کرنے کا ایسا طریقہ دیکھتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی عمومی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے جو تمام محدد کے لئے کارآمد ہے۔

کارتیسی محدد کے متغیرات (x, y, z) جبکہ نلکی محدد کے (ρ, ϕ, z) اور کروی محدد کے متغیرات (r, θ, ϕ) ہیں۔اس حصے میں **عمومی محدد**[20] استعمال کیا جائے گا جس کے متغیرات (u, v, w) اور عمودی اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ ہیں۔عمومی محدد کسی بھی محدد کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔یوں اگر اسے کارتیسی محدد کے لئے استعمال کیا جا رہا ہو تب (u, v, w) سے مراد (x, y, z) ہو گا۔

شکل میں عمومی محدد استعمال کرتے ہوئے چھوٹا حجم دکھایا گیا ہے۔عمومی محدد کے تین اطراف

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}L_1 &= k_1 \,\mathrm{d}u \\
\mathrm{d}L_2 &= k_2 \,\mathrm{d}v \\
\mathrm{d}L_3 &= k_3 \,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

ہیں۔کارتیسی محدد میں $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ کے برابر لیا جائے گا اور یوں $\mathrm{d}L_1 = \mathrm{d}x$ کے برابر ہو گا۔نلکی محدد میں

$$\begin{aligned}
k_1 &= 1 \\
k_2 &= \rho \\
k_3 &= 1
\end{aligned} \tag{3.38}$$

جبکہ کروی محدد میں

$$\begin{aligned}
k_1 &= 1 \\
k_2 &= r \\
k_3 &= r \sin\theta
\end{aligned} \tag{3.39}$$

کے برابر ہیں۔اسی طرح تین سمتی رقبے

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}L_2 \,\mathrm{d}L_3 \boldsymbol{a}_u \\
&\mathrm{d}L_1 \,\mathrm{d}L_3 \boldsymbol{a}_v \\
&\mathrm{d}L_1 \,\mathrm{d}L_2 \boldsymbol{a}_w
\end{aligned}$$

ہوں گے۔

---

[20] generalized coordinates

گزشتہ حصوں میں چھوٹے حجم کے آمنے سامنے سطحوں پر بہاو حاصل کرتے وقت پہلے ان سطحوں پر $\boldsymbol{D}$ کی قیمت اور ان سطحوں کے رقبے حاصل کئے گئے جن کے نقطہ ضرب سے بہاو حاصل کیا گیا۔ یہاں چھوٹے حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کی سمت میں بہاو سے ٹیلر تسلسل کے استعمال سے حجم کے سطحوں پر بہاو حاصل کیا جائے گا۔ حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کے رخ میں سطحوں پر بہاو

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3 D_{u0}\\
&\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_3 D_{v0}\\
&\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_2 D_{w0}
\end{aligned}$$

ہے۔ ٹیلر تسلسل سے سامنے اور پیچھے سطحوں پر ان مساوات سے

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3 D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3 D_u)\,\mathrm{d}u && \text{سامنے}\\
-&\,\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3 D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3 D_u)\,\mathrm{d}u && \text{پیچھے}
\end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned}
&k_2k_3\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w && \text{سامنے}\\
-&k_2k_3\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w && \text{پیچھے}
\end{aligned}$$

لکھتے ہوئے دونوں سطحوں پر بہاو کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بائیں اور دائیں سطحوں پر کل

$$\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

اور اوپر، نیچے کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

حاصل ہوتا ہے۔ چھوٹا حجم

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}h &= \mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3\\
&= k_1k_2k_3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

لکھتے ہوئے گاوس کے قانون سے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

یعنی

$$\frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right] = \lim_{\mathrm{d}h\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}h}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف ہے۔یوں پھیلاو کی عمومی مساوات

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right] \tag{3.40}$$

حاصل ہوتی ہے۔

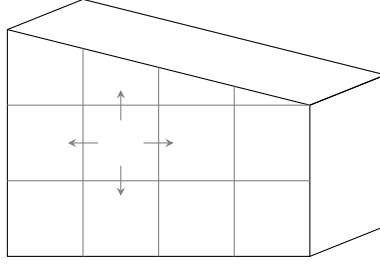
مثال 3.3: مساوات 3.40 سے نلکی اور کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات حاصل کریں۔

حل: u, v, w کی جگہ ρ, ϕ, z اور مساوات 3.38 کے استعمال سے نلکی محدد میں پھیلاو

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho)+\frac{\partial}{\partial \phi}(D_\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho D_z)\right]\\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}(D_\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(D_z) \quad \text{نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات}\end{aligned} \tag{3.41}$$

حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح u, v, w کی جگہ r, θ, ϕ اور مساوات 3.39 کے استعمال سے کروی محدد میں پھیلاو

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta D_r)+\frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta D_\theta)+\frac{\partial}{\partial \phi}(rD_\phi)\right]\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2D_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta D_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(D_\phi) \quad \text{کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات}\end{aligned} \tag{3.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔

شکل 3.5: بند سطح پر سمتیہ کا عمودی حصے کا تکمل بند حجم میں سمتیہ کے تکمل کے برابر ہوتا ہے۔

3.11 مسئلہ پھیلاو

صفحہ 110 پر مساوات 3.22 میں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h$$

لکھتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h \nabla \cdot \boldsymbol{D} \,\mathrm{d}h \tag{3.43}$$

لکھا جا سکتا ہے جو مسئلہ پھیلاو[21] بیان کرتا ہے۔اگرچہ ہم نے اس مسئلے کو برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ کے لئے حاصل کیا حقیقت میں یہ ایک عمومی نتیجہ ہے جو کسی بھی تین گنا تکملہ کو دو گنا تکملہ اور دو گنا تکملہ کو تین گنا تکملہ میں تبدیل کرتا ہے۔مسئلہ پھیلاو کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے

کسی بھی بند سطح پر سمتیہ کے عمودی حصے کا تکمل بند حجم میں اسی سمتیہ کے پھیلاو کے تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ پھیلاو کی سمجھ شکل 3.5 کی مدد سے با آسانی ممکن ہے۔جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے کہ کسی بھی چھوٹے حجم سے بہاو قریبی چھوٹے حجم کی منفی بہاو ثابت ہوتی ہے لہٰذا دونوں کا مجموعی بہاو حاصل کرتے ہوئے ان کی درمیانی دیوار پر بہاو رد کیا جائے گا۔یہی سلسلہ تمام حجم پر لاگو کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ پورے حجم سے بہاو کے حصول میں اندرونی تمام دیواروں پر بہاو کا کوئی کردار نہیں ہوتا اور صرف بیرونی سطح پر بہاو سے ہی جواب حاصل کیا جا سکتا ہے۔

---

[21] divergence theorem

مثال 3.4: نقطہ بار کے $\boldsymbol{D}$ سے پھیلاو کی مساوات سے مختلف مقامات پر کثافت بار ρ_h حاصل کریں۔

حل: کروی محدد کے مبدا پر نقطہ بار کا

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

ہوتا ہے۔ کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات کے تحت

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)$$

کے برابر ہے۔ چونکہ D_θ اور D_ϕ صفر کے برابر ہیں لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{Q}{4\pi r^2}) = \begin{cases} 0 & r>0 \\ \infty & r=0 \end{cases}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تحت مبدا کے علاوہ تمام خلاء میں کوئی بار نہیں پایا جاتا۔ مبدا پر لا محدود کثافت کا بار پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ نقطہ بار سے مراد ایسا بار ہے جس کا حجم صفر ہو۔ ایسی صورت میں اس نقطے پر نقطہ بار کی کثافت لا محدود ہی ہو گی۔

سوالات

سوال 3.1: محدد کے مبدا پر $20\,\mathrm{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔اس کے علاوہ $z = 0$ سطح پر $5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ کے لکیری بار $y = -1$ اور $y = -3$ پر پائے جاتے ہیں۔نقطہ $(0, -2, 0)$ پر $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔ $(0, 1, 0)$ پر رداس $r = 1.5$ کے کرہ کی سطح پر کل برقی بہاو حاصل کریں۔

جوابات: $-\frac{5}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$ ، $20\,\mathrm{nC}$

سوال 3.2: رداس $\rho = 10\,\mathrm{cm}$ کے نلکی سطح کے $z > 0$ حصے پر سطحی کثافت بار $\rho_S = 2ze^{-z^2}\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ پائی جاتی ہے۔ سطح پر کل بار دریافت کریں۔اس سطح سے $z = 1$ تا $z = 2$ زاویہ $\phi = 45°$ تا $\phi = 75°$ کتنی برقی بہاو خارج ہوتی ہے۔

جوابات: $0.2\pi\,\mathrm{nC}$ ، $18.3\,\mathrm{pC}$

سوال 3.3: رداس $\rho = 2$ ، $\rho = 4$ اور $\rho = 5$ پر بالترتیب سطحی کثافت بار $-3\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ ، $1.5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ اور $0.25\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ پائی جاتی ہے۔ $z = 3$ تا $z = 6$ پر رداس $\rho = 4.5$ نلکی سطح سے کل کتنی برقی بہاو ہوتی ہے۔ $z = 3$ تا $z = 6$ پر رداس $\rho = 6$ نلکی سطح سے کل کتنی برقی بہاو ہوتی ہے۔نقطہ $(6, 8, 2)$ پر $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

$0\,\mathrm{C}$ ، $28.27\,\mathrm{nC}$ ، $\boldsymbol{D} = 0.09\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 0.15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 3.4: بند خطہ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 2$ میں $\boldsymbol{D} = xy^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + xyz\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z(x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$ ہے۔اس خطے سے کل برقی بہاو کتنی ہے۔

$28\,\mu\mathrm{C}$

سوال 3.5: محدد z پر لکیری کثافت بار $50\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔محدد کے مبدا پر رداس $r = 5\,\mathrm{m}$ کی کرہ سے خارج کل برقی بہاو حاصل کریں۔اگر کرہ کی وسط کو نقطہ $(0, 2, 2)$ منتقل کیا جائے تب جواب کیا ہو گا۔

جوابات: $500\,\mathrm{nC}$ ، $458\,\mathrm{nC}$

سوال 3.6: رداس $r = 1.1\,\mathrm{m}$ کی کرہ کے اندر حجمی کثافت بار $\rho_h = 30e^{-r^3}\,\mathrm{nC/m^3}$ پائی جاتی ہے۔کرہ کے اندر کل بار حاصل کریں۔گاوس کے قانون سے کرہ کی سطح پر برقی بہاو کی کثافت حاصل کریں۔

جوابات: $92.46\,\text{nC}$ ، $6.08\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

سوال 3.7: نلکی محدد میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D} = \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho + z \boldsymbol{a}_z}{4\pi(\rho^2+z^2)^{3/2}}$ دیا گیا ہے۔لامحدود لمبائی کی نلکی جس کا رداس $\rho = 5$ ہے سے کل کتنی برقی بہاو خارج ہو گی۔

جواب: $1\,\text{C}$

سوال 3.8: مبدا پر رداس 5 ، 9 اور 14 کے کرہ پر بالترتیب سطحی کثافت بار $20\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $-8\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $\rho_S\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ پائے جاتے ہیں۔نقطہ $(20,0,0)$ پر صفر $\boldsymbol{D}$ حاصل کرنے کے لئے ρ_S دریافت کریں۔تمام خطوں میں D کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $0.7551\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $r < 5$ پر $D_r = 0$ ہے، $5 < r < 9$ پر $D_r = \frac{500}{r^2}\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ہے، $9 < r < 14$ پر $D_r = -\frac{148}{r^2}\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ ہے جبکہ $r > 14$ پر $D_r = 0$ ہے۔

سوال 3.9: لامحدود سطح $z = 4$ پر $\rho_S = 2\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ سطحی کثافت پائی جاتی ہے۔محدد کے مبدا پر $r = 5$ رداس کا کرہ رکھا جاتا ہے۔کرہ کتنے بار کو گھیرے گا۔کرے سے کتنی برقی بہاو خارج ہو گی۔

جوابات: $56.549\,\text{nC}$ ، $56.549\,\text{nC}$

سوال 3.10: محدد کے مبدا پر $r = 5$ رداس کا کرہ جبکہ $z = 4$ پر لامحدود سطح پائی جاتی ہے۔لامحدود سطح کے بالائی جانب کرہ کے اندر حجمی کثافت بار $\rho_h = 25\,\text{nC}/\text{m}^3$ پائی جاتی ہے۔کرہ سے کل خارج برقی بہاو حاصل کریں۔

جواب: $1.1812\,\mu\text{C}$

سوال 3.11: خطہ $\rho < 3\,\text{mm}$ میں حجمی کثافت بار $\rho_h = \frac{\rho^2}{1000}\,\text{C}/\text{m}^3$ جبکہ خطہ $3\,\text{mm} < \rho < 5\,\text{mm}$ میں $\rho_h = 2\,\mu\text{C}/\text{m}^3$ پائی جاتی ہے۔موزوں گاوسی سطحیں چنتے ہوئے رداس $\rho = 0$ ، $\rho = 2\,\text{mm}$ ، $\rho = 4\,\text{mm}$ اور $6\,\text{mm}$ پر D_ρ حاصل کریں۔

جوابات: $0\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $2\,\frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ ، $1.756\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، $2.67\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

سوال 3.12: خطہ $r < 3\,\text{mm}$ میں $\rho_h = 22\,\mu\text{C/m}^3$ جبکہ $5\,\text{mm} < r < 7\,\text{mm}$ خطے میں $\rho_h = \frac{55}{r}\,\text{nC/m}^3$ حجمی کثافت بار پایا جاتا ہے۔ موزوں گاوسی سطحیں چنتے ہوئے $r = 5\,\text{mm}$ اور $r = 10\,\text{mm}$ پر D_r دریافت کریں۔

جوابات: $22\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، $8.58\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

سوال 3.13: تفاعل $\boldsymbol{D} = 2x^2\boldsymbol{a}_\text{X} + (x+z)\boldsymbol{a}_\text{y} + z\boldsymbol{a}_\text{Z}$ مکعب $0 < x, y, z, < a$ میں پایا جاتا ہے۔ تفاعل کی پھیلاو $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔ مکعب کے تمام سطحوں پر تفاعل کے سطحی تکمل کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے مکعب میں کل بار حاصل کریں۔ یہی جواب مسئلہ پھیلاو کی مدد سے حاصل کریں۔

جوابات: $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 4x + 1$ ، $2a^4 + a^3$

سوال 3.14: مکعب $2 < x, y, z < 5$ میں $\boldsymbol{G} = \frac{5x^2y}{z}\boldsymbol{a}_\text{y}$ ہے۔ مسئلہ پھیلاو کے دونوں اطراف کو مکعب کے لئے حل کریں۔

جواب: 536.03

سوال 3.15: مندرجہ ذیل تفاعل کے پھیلاو حاصل کرتے ہوئے پھیلاو کی قیمت نقطہ $N(3, 4, 6)$ پر حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{D} = 10(xy - \frac{y}{\sqrt{z}})\boldsymbol{a}_\text{X} + y^2(x+2)\boldsymbol{a}_\text{y} - (6z^2 + 3x^2y)\boldsymbol{a}_\text{Z}$$
$$\boldsymbol{D} = 8\rho\sin\phi\boldsymbol{a}_\rho + 4\rho\cos\phi\boldsymbol{a}_\phi + z^2\boldsymbol{a}_\text{Z}$$
$$\boldsymbol{D} = 2r\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_\text{r} + r\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_\theta + r\cos\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

جوابات: $10y + 2y(x+2) - 12z$ ، $12\sin\phi$ ، $6\sin\theta\sin\phi + \frac{\cos 2\theta\sin\phi}{\sin\theta} - \frac{\sin\phi}{\sin\theta}$ ، 80 ، 9.6 ، 2.0486

سوال 3.16: مندرجہ ذیل تفاعل کی پھیلاو نقطہ $N(3, 5-2)$ پر حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{D} = (x + yz)(3x\boldsymbol{a}_\text{X} - 5z\boldsymbol{a}_\text{y} + 2y^2z\boldsymbol{a}_\text{Z})$$
$$\boldsymbol{D} = \frac{x\boldsymbol{a}_\text{X} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + z\boldsymbol{a}_\text{Z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\boldsymbol{D} = 0.24\boldsymbol{a}_\text{X} - 0.55\boldsymbol{a}_\text{y} + 0.12\boldsymbol{a}_\text{Z}$$
$$\boldsymbol{D} = x^2yz^3(2\boldsymbol{a}_\text{X} - 3\boldsymbol{a}_\text{y} + \boldsymbol{a}_\text{Z})$$

جوابات: -882 ، 0.324 ، 0 ، 276

سوال 3.17: مندرجہ ذیل تفاعل کی پھیلاو نقطہ $N(3,45°,30°)$ پر حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{D} = (2r\sin\theta\cos\phi + \cos\theta)\boldsymbol{a}_\text{r} + (r\cos\theta\cos\phi - \sin\theta)\boldsymbol{a}_\theta - r\sin\phi\boldsymbol{a}_\phi$$
$$\boldsymbol{D} = \sin^2\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_\text{r} + \sin 2\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_\theta + \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_\phi$$
$$\boldsymbol{D} = 0.2\boldsymbol{a}_\text{r} - 0.15\boldsymbol{a}_\theta + 0.23\boldsymbol{a}_\phi$$
$$\boldsymbol{D} = 0.2r^3\phi\sin^2\theta(\boldsymbol{a}_\text{r} + \boldsymbol{a}_\theta + \boldsymbol{a}_\phi)$$

جوابات: 4.899 ، 0.1667 ، 0 ، 5.043

سوال 3.18: کارتیسی محدد کے مبدا $(0,0,0)$ پر نقطہ بار Q سے پیدا $\boldsymbol{D}$ کی عمومی مساوات کارتیسی اور کروی محدد میں حاصل کرتے ہوئے $\boldsymbol{D}$ کی پھیلاو نقطہ $(0,0,0)$ سے ہٹ کر حاصل کریں۔ محدد کے مبدا پر پھیلاو کی قیمت بھی دریافت کریں۔

جوابات: $0\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $0\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $\infty\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$

سوال 3.19: z محدد پر لکیری کثافت بار ρ_L پائی جاتی ہے۔ثابت کریں کہ اس محدد سے ہٹ کر تمام خلاء میں $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0$ کے برابر ہے۔اگر لکیری بار کی جگہ حجمی کثافت بار ρ_h خطہ $0 < \rho < a$ میں پائی جائے تب پوری خلاء میں $\nabla\cdot\boldsymbol{D}$ کی قیمت کیا ہو گی۔

جوابات: خطہ $0 < \rho < a$ میں $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_h$ ہو گا جبکہ بقایا خلاء میں $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0$ ہو گا۔

سوال 3.20: اگر $\boldsymbol{D} = 2x^2\boldsymbol{a}_\text{x} + x(z-22)\boldsymbol{a}_\text{y} + x^2y^3\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہو تب حجمی کثافت بار کی مساوات کیا ہو گی۔مکعب $0 < x,y,z < 2$ میں کل بار کتنا ہو گا۔

جوابات: $\rho_h = 4x$ ، $32\,\text{C}$

سوال 3.21: نلکی $\rho < 3\,\text{m}$ میں $\boldsymbol{D} = 3\rho\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ ہے۔نقطہ $(1.5,45°,3)$ پر حجمی کثافت بار اور کثافت برقی بہاو حاصل کریں۔ نلکی $\rho < 2.5$، $0 < z < 2$ سے کل کتنی برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے اور اس نلکی میں کل کتنا بار پایا جاتا ہے۔

جوابات: $6\,\text{C}/\text{m}^3$ ، $4.5\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $235.62\,\text{C}$ ، 235.62C

سوال 3.22: کرہ $r < 4\,\mathrm{m}$ میں کثافت برقی بہاو $3r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔نقطہ $(3, 30^\circ, 70^\circ)$ پر حجمی کثافت بار اور کثافت برقی بہاو کیا ہوں گے؟ کرہ $r = 3\,\mathrm{m}$ سے کل کتنی برقی بہاو کا اخراج ہو گا اور اس کرہ میں کل کتنا بار پایا جائے گا؟

جوابات: $9\,\mathrm{C/m^3}$ ، $9\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$ ، $1017.9\,\mathrm{C}$ ، $1017.9\,\mathrm{C}$

سوال 3.23: خطہ $0 \le x \le 1$ ، $0 \le y \le 1$ ، $0 \le z \le 1$ میں $\boldsymbol{G} = (4x - x^2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 3y^2z^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - (2y^3z^2 - z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ پر مسئلہ پھیلاو کے دونوں اطراف کے تکمل حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ دونوں جوابات برابر ہیں۔

جوابات: 2.5 ، 2.5

سوال 3.24: خطہ $2 \le r \le 5$ ، $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ ، $0 \le \phi \le 2\pi$ میں $\boldsymbol{D} = \frac{0.1}{r}\cos\theta\boldsymbol{a}_\theta$ پایا جاتا ہو۔اس خطے میں کل بار مسئلہ پھیلاو کے دونوں اطراف کی مدد سے حاصل کریں۔

جوابات: $0.942\,\mathrm{C}$ ، $0.942\,\mathrm{C}$

باب 4

توانائی اور برقی دباو

4.1 توانائی اور کام

قوت F کی سمت میں فاصلہ $\mathrm{d}L$ طے کرنے سے

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}L$$

کام کیا جاتا ہے۔ اگر قوت اور طے کردہ فاصلہ ایک ہی سمت میں نہ ہوں تو قوت کا وہ حصہ جو طے کردہ فاصلے کی سمت میں ہو اور طے شدہ فاصلے کے حاصل ضرب کو کام[1] کہتے ہیں۔ شکل 4.1 کو دیکھتے ہوئے سمتیات کے استعمال سے

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W &= F\cos\alpha\,\mathrm{d}L\\ &= \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $F\cos\alpha\,\mathrm{d}L$ کو نقطہ ضرب کی مدد سے $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا گیا ہے۔

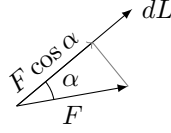
زمین اور کمیت m کے درمیان قوت ثقل $\boldsymbol{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ پائی جاتی ہے[2] جس میں $g = \frac{GM}{r^2}$ لکھتے ہوئے $\boldsymbol{F}_G = -mg\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ لکھی جا سکتی ہے۔ کام کرتے ہوئے کمیت کو $\Delta h\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ اونچائی پر منتقل کرنے کی خاطر قوت ثقل کے خلاف

$$\boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} = -\boldsymbol{F}_G$$

---

[1] work

[2] $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ اکائی سمتیہ ہے۔

$$\begin{array}{c}dL\\ F\cos\alpha\quad \alpha\\ F\end{array}$$

شکل 4.1: طے فاصلہ اور فاصلے کی سمت میں قوت کا حاصل ضرب کام کہلاتا ہے

لاگو کرتے ہوئے

$$\Delta W = \boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} \cdot \Delta h \boldsymbol{a}_{\text{r}} = mg\Delta h$$

توانائی درکار ہو گی۔کام کرنے کے لئے درکار توانائی کمیت میں منتقل ہو جاتی ہے جسے **مخفی توانائی**[3] کہتے[4] ہیں۔اگر Δh کی قیمت r کی نسبت سے بہت کم نہ ہو تب g کو مستقل تصور کرنا ممکن نہ ہو گا اور مخفی توانائی تکملہ کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$W = -\int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{F}_G \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \frac{GMm}{r^2} dr$$

ثقلی میدان میں کمیت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچاتے ہوئے کوئی بھی راستہ اختیار کیا جا سکتا ہے۔اختیار کردہ راستے کا مخفی توانائی پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ایسے میدان جن میں دو نقطوں کے مابین مخفی توانائی کا دارومدار، ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچنے کے راستے، پر نہیں ہوتا **قائم میدان**[5] کہلاتے ہیں۔

برقی میدان میں باروں کے حرکت کے مسئلے کو بھی اسی طرح حل کیا جاتا ہے۔برقی میدان $\mathbf{E}$ میں بار q پر قوت $\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}$ عمل کرتا ہے۔بار کو فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ ہلانے کی خاطر اس قوت کے خلاف بیرونی

$$\boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} = -\boldsymbol{F}_E$$

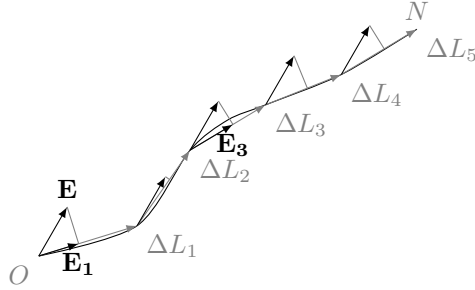
قوت لاگو کرتے ہوئے

$$\mathrm{d}W = -q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.1}$$

کام[6] کیا جاتا ہے۔کسی بھی ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک یوں

$$W = -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.2}$$

---

[3] potential energy
[4] مخفی توانائی کا نام خفیہ توانائی سے نکلا ہے۔
[5] conservative field
[6] work

شکل 4.2: تکملہ دراصل چھوٹے حصوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

توانائی درکار ہو گی۔

4.2 لکیری تکملہ

مساوات 4.2 لکیری تکملہ ہے جس پر مزید غور کرتے ہیں۔ شکل 4.2 میں یکساں[7] اور وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے میدان $\boldsymbol{E}$ میں نقطہ O سے نقطہ N تک بار کی منتقلی دکھائی گئی ہے۔ یکساں میدان سے مراد ایسا میدان ہے جس میں $\boldsymbol{E}$ کی قیمت جگہ جگہ تبدیل نہیں ہوتی بلکہ اس کی قیمت ہر جگہ یکساں ہوتی ہے۔ اسی طرح وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے میدان کو وقت کے ساتھ تغیر پذیر میدان کہا جائے گا۔ یکساں میدان وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر میدان ہے۔

شکل 4.2 میں پورے راستے کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\Delta \boldsymbol{L}_1$، $\Delta \boldsymbol{L}_2$، . . . میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک ٹکڑے پر حرکت کے لئے درکار توانائی مساوات 4.1 کی مدد سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں $\Delta \boldsymbol{L}_1$ کے ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک بار q منتقل کرنے کی خاطر $\Delta W = -q\boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{L}_1$ توانائی درکار ہو گی۔ یہی عمل راستے کے بقایا ٹکڑوں پر بھی لاگو کرتے ہوئے کل درکار توانائی

$$
\begin{aligned}
W &= -q\boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{L}_1 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{L}_2 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{L}_3 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{L}_4 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{L}_5 \\
&= -q\boldsymbol{E} \cdot (\Delta \boldsymbol{L}_1 + \Delta \boldsymbol{L}_2 + \Delta \boldsymbol{L}_3 + \Delta \boldsymbol{L}_4 + \Delta \boldsymbol{L}_5)
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

لکھی جا سکتی ہے۔ قوسین میں بند $\Delta \boldsymbol{L}_1 + \Delta \boldsymbol{L}_2 + \Delta \boldsymbol{L}_3 + \Delta \boldsymbol{L}_4 + \Delta \boldsymbol{L}_5$ درحقیقت نقطہ O سے N تک کا کل سمتی راستہ $\boldsymbol{L}_{ON}$ ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو

$$W = -q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{L}_{ON} \tag{4.4}$$

[7] uniform

لکھی جا سکتی ہے۔اگر شکل 4.2 میں منتقلی کے راستے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ بنائے جائیں تو مساوات 4.3 کو تکمل کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$W = \int_O^N -q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.5}$$

چونکہ q اور $\boldsymbol{E}$ کی قیمتیں مستقل ہیں لہٰذا انہیں تکمل کے باہر لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} W &= -q\boldsymbol{E} \cdot \int_O^N \mathrm{d}\boldsymbol{L} \\ &= -q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{L}_{ON} \end{aligned} \tag{4.6}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس جواب سے ہم دیکھتے ہیں کہ درکار توانائی کا دارومدار q، $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{L}_{ON}$ پر ہے جہاں $\boldsymbol{L}_{ON}$ نقطہ O سے نقطہ N تک سیدھی کھینچی لکیر ہے۔درکار توانائی کا اس سے کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں کہ ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک جاتے ہوئے کون سا راستہ اختیار کیا گیا۔جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا، ایسے میدان کو قدامت پسند میدان کہتے ہیں۔ہم جلد دیکھیں گے کہ غیر یکساں برقی میدان بھی قدامت پسند میدان ہوتا ہے البتہ تغیر پذیر برقی میدان غیر قدامت پسند ہو سکتا ہے۔

مثال 4.1: غیر یکساں، غیر تغیر پذیر میدان

$$\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

میں $N_1(1,0,2)$ سے $N_2(0,1,2)$ تک سیدھی لکیر پر $0.1\,\mathrm{C}$ کا بار منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

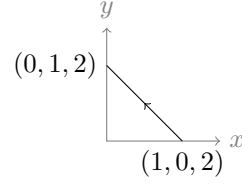
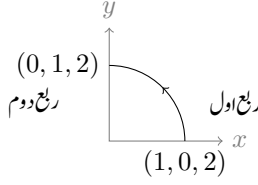
حل: شکل 4.3 میں بار منتقل کرنے کا سیدھا راستہ دکھایا گیا ہے۔پہلے اس سیدھی لکیر کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔اس لکیر کا ڈھلوان[8]

$$\text{ڈھلوان} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

---

[8] slope

y $(0,1,2)$ x $(1,0,2)$ ربع اول ربع دوم

y $(0,1,2)$ x $(1,0,2)$

شکل 4.3: بار منتقل کرنے کے دو راستے۔

ہے لہٰذا سیدھی لکیر کی مساوات $y = mx + c$ میں نقطہ N_1 پُر کرتے ہوئے $0 = -1 \times 1 + c$ سے $c = 1$ حاصل ہوتا ہے۔یوں لکیر کی مساوات

$$y = -x + 1 \tag{4.7}$$

ہے۔کارتیسی محدد میں کسی بھی راستے پر حرکت کرتے ہوئے مساوات 1.3 کے مطابق

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{4.8}$$

لکھی جاتی ہے۔یوں مساوات 4.2 سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
W &= -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \\
&= -0.1 \int_{N_1}^{N_2} \left[(y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \right] \cdot (\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\
&= -0.1 \int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x - 0.1 \int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y - 0.1 \int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

آخری قدم پر تکمل کو تین حصوں میں لکھا گیا ہے جہاں پہلے حصے میں تکمل کو x کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے جبکہ دوسرے حصے میں تکمل کو y کے ساتھ اور آخری حصے میں اسے z کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے۔پہلے حصے میں $(y+z)$ کا تکمل x کے ساتھ ہے لہٰذا $(y+z)$ کو x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔منتقلی کے راستے پر $z = 2$ ہے جبکہ مساوات 4.7 میں y کو x کی صورت میں لکھی گئی ہے۔یوں پہلا تکمل

$$\begin{aligned}
-0.1 \int_1^0 [y+z]\,\mathrm{d}x &= -0.1 \int_1^0 [(-x+1)+2]\,\mathrm{d}x \\
&= -0.1 \left(\frac{-x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^0 \\
&= 0.25\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

یعنی جاول کے ایک چوتھائی کے برابر حاصل ہوتا ہے۔دوسرا تکمل y کے ساتھ ہے لہٰذا تمام متغیرات y کی صورت میں لکھنے ہوں گے۔سیدھی لکیر کی مساوات سے $x = -y + 1$ لکھی جا سکتی ہے جبکہ پورے راستے پر $z = 2$ کے برابر ہے لہٰذا

$$-0.1 \int_0^1 [x+z]\,\mathrm{d}y = -0.1 \int_0^1 [(-y+1)+2]\,\mathrm{d}y$$
$$= -0.1 \left(\frac{-y^2}{2} + 3y \right) \Bigg|_0^1$$
$$= -0.25\,\mathrm{J}$$

ہو گا۔تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہٰذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1 \int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z = 0\,\mathrm{J}$$

اس طرح کل درکار توانائی تینوں جوابات کا مجموعہ یعنی $0\,\mathrm{J}$ ہو گی۔مثبت جواب کا مطلب یہ ہے کہ بار کو منتقل کرنے کی خاطر بیرونی لاگو قوت توانائی فراہم کرے گی۔

مثال 4.2: گزشتہ مثال میں سیدھی لکیر پر بار منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کرنے کو کہا گیا۔اس مثال میں شکل 4.3 میں بائیں جانب گول دائرے کے راستے $(1, 0, 2)$ سے $(0, 1, 2)$ تک $\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میدان میں $0.1\,\mathrm{C}$ کے بار کو منتقل کرنے کی خاطر درکار توانائی حاصل کریں۔گول دائرے کا راستہ $z = 2$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل:اکائی رداس کے گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = 1^2$ ہے۔یوں مساوات 4.2 سے حاصل تین تکملوں

$$W = -0.1 \int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x - 0.1 \int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y - 0.1 \int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z$$

میں پہلی تکمل میں $z = 2$ اور $y = \sqrt{1-x^2}$ پُر کرنا ہو گا۔یاد رہے کہ ربع اول[9] میں x اور y دونوں کی قیمتیں مثبت ہوتی ہیں۔اس طرح کے تکمل حل کرتے وقت ربع کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

$$\begin{aligned}
-0.1\int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x &= -0.1\int_1^0 (\sqrt{1-x^2}+2)\,\mathrm{d}x\\
&= -0.1\left(\frac{\sin^{-1}x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+2x\right)\Bigg|_1^0\\
&= -0.025\pi-0.2
\end{aligned}$$

جاول، دوسرے تکمل میں $z = 2$ ہی رہے گا جبکہ $x = \mp\sqrt{1-y^2}$ میں سے $x = \sqrt{1-y^2}$ کا استعمال ہو گا۔یوں

$$\begin{aligned}
-0.1\int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y &= -0.1\int_0^1 (\sqrt{1-y^2}+2)\,\mathrm{d}y\\
&= -0.1\left(\frac{\sin^{-1}y}{2}+\frac{y\sqrt{1-y^2}}{2}+2x\right)\Bigg|_0^1\\
&= 0.025\pi+0.2
\end{aligned}$$

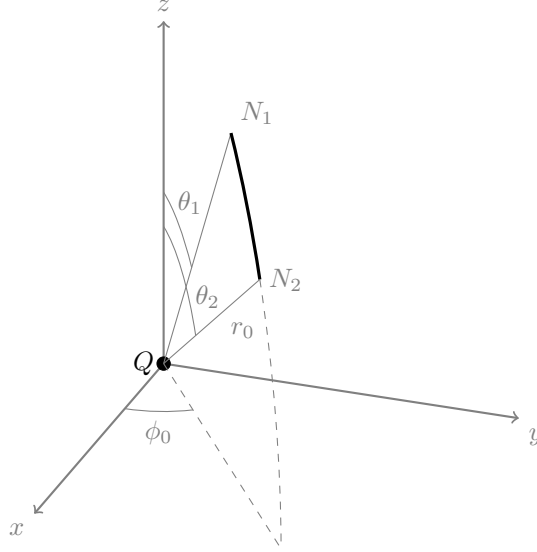
جاول حاصل ہوتا ہے۔ تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہٰذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1\int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z = 0\,\mathrm{J}$$

کل توانائی ان تین جوابات کا مجموعہ یعنی $0\,\mathrm{J}$ ہو گا۔

مشق 4.1: گزشتہ دو مثالوں میں ابتدائی نقطہ $(1,0,2)$ اور اختتامی نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2)$ تصور کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔

جوابات: $-0.1328\,\mathrm{J}$، $-0.1328\,\mathrm{J}$

[9] first quadrant

شکل 4.4: نقطہ بار کے گرد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے حرکت کا راستہ

محدد کے مرکز پر موجود نقطہ بار Q کا میدان ہم حاصل کر چکے ہیں جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{4.9}$$

آئیں دیکھیں کہ رداس تبدیل کئے بغیر اس میدان میں بار q کو حرکت دیتے ہوئے کتنی توانائی درکار ہو گی۔چونکہ میدان رداس کی سمت میں ہے اور رداس تبدیل کئے بغیر حرکت صرف اُس صورت ممکن ہے کہ ہم $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ یعنی $\boldsymbol{E}$ کے عمود میں سفر کریں۔ایسی صورت میں بار پر میدان سے رونما ہونے والی قوت اور طے فاصلہ عمودی ہوں گے لہٰذا درکار توانائی صفر کے برابر ہو گی۔آئیں تکمل کے ذریعہ یہی جواب حاصل کریں۔

تصور کریں کہ $r = r_0$ اور $\phi = \phi_0$ رکھتے ہوئے ہم θ کو θ_1 تا θ_2 ریڈیئن تبدیل کرتے ہوئے بار کو نقطہ N_1 سے N_2 تک حرکت دیتے ہیں۔یہ صورت حال شکل 4.4 میں دکھائی گئی ہے۔مساوات 1.3، مساوات 1.44 اور

مساوات 1.64 جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_{\rho} + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

کارتیسی، نلکی اور کروی متغیرات تبدیل کرنے سے پیدا چھوٹا فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دیتے ہیں۔یوں درکار توانائی

$$
\begin{aligned}
W &= -q\int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \\
&= -q\int_{r_0,\theta_1,\phi_0}^{r_0,\theta_2,\phi_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi}) \\
&= -q\int_{r_0}^{r_0} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

صفر ہی حاصل ہوتی ہے۔یہاں دوسرے قدم پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 1$ کے علاوہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\theta} = 0$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\phi} = 0$ کا استعمال کیا گیا۔

اس کے برعکس اگر نقطہ (r_1, θ_1, ϕ_1) تا نقطہ (r_2, θ_2, ϕ_2) بار کو حرکت دی جائے تب

$$
\begin{aligned}
W &= -q\int_{r_1,\theta_1,\phi_1}^{r_2,\theta_2,\phi_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi}) \\
&= -q\int_{r_1}^{r_2} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)
\end{aligned}
$$

ہو گا۔ یوں $r_1 > r_2$ کی صورت میں جواب مثبت ہو گا اور بار کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے منتقل کرنے کی خاطر بیرونی توانائی درکار ہو گی جبکہ $r_2 > r_1$ کی صورت میں جواب منفی حاصل ہوتا ہے لہٰذا بار کی حرکت سے ہمیں توانائی حاصل ہو گی۔

مشق 4.2: میدان $\boldsymbol{E} = 3x^2yz^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + x^3z^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2x^3yz\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میں محدد کے مرکز $(0, 0, 0)$ سے نقطہ $(2, 3, 5)$ تک دو کولمب کا بار مندرجہ ذیل راستوں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

- دو نقطوں کے مابین سیدھی لکیر۔
- ایسا راستہ جس پر $y = \frac{3}{4}x^2$ اور $z = \frac{x}{2} + x^2$ ہوں۔

جوابات: سیدھی لکیر پر $y = \frac{3}{2}x$ اور $z = \frac{5}{2}x$ لکھا جائے گا۔جوابات کے مطابق توانائی درکار نہیں بلکہ حاصل ہو گی۔$-1200\,\mathrm{J}$ ، $-1200\,\mathrm{J}$

4.3 برقی دباو

بار q کی منتقلی کے لئے درکار توانائی سے زیادہ اہم اکائی بار کی منتقلی کے لئے درکار توانائی ہے۔اس توانائی کو **برقی دباو**[10] کہتے ہیں۔برقی دباو کی اکائی $\mathrm{J/C}$ کو **وولٹ**[11] کا نام دیا گیا ہے جسے V سے ظاہر کیا جاتا ہے۔چونکہ توانائی غیر سمتی مقدار ہے لہٰذا برقی دباو بھی غیر سمتی ہے۔مساوات 4.2 سے برقی دباو یوں حاصل ہوتا ہے

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = -\int_B^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.11}$$

جہاں ابتدائی نقطے کو B، اختتامی نقطے کو A اور حاصل جواب کو V_{AB} لکھا گیا ہے۔V_{AB} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلے اختتامی نقطہ A اور بعد میں ابتدائی نقطہ B لکھا گیا ہے۔مساوات 4.6 میں فاصلہ $\boldsymbol{L}_{ON}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں ابتدائی نقطہ O پہلے اور اختتامی نقطہ N بعد میں لکھا گیا۔برقی دباو V_{AB} لکھتے ہوئے اس فرق کو مد نظر رکھنا ہو گا۔

برقی دباو دو نقطوں کے مابین ناپی جاتی ہے۔کسی نقطے کی مطلق برقی دباو معنی نہیں رکھتی۔برقی دباو بالکل اونچائی کے مترادف ہے۔یوں کسی پہاڑی کے قریب کھڑے ہو کر اگر اس کی اونچائی تین سو میٹر ناپی جائے تو اسی پہاڑی کی اونچائی سطح سمندر سے ناپتے ہوئے سات سو میٹر حاصل ہو سکتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اونچائی ناپتے ہوئے **نقطہ حوالہ**[12]، جہاں کی نسبت سے اونچائی ناپی جائے، نہایت اہمیت کا حامل ہے۔نقطہ حوالہ کی اونچائی صفر تصور کی جاتی ہے۔دو یا دو سے زیادہ عمارتوں کی اونچائی کا موازنہ کرتے وقت ان تمام عمارتوں کی اونچائی پہلے کسی ایک نقطے سے ناپی جاتی ہے۔یہ نقطہ عموماً زمین کی سطح ہوتا ہے۔اس کے برعکس مختلف شہروں یا پہاڑیوں کی اونچائی عموماً سطح سمندر سے ناپی جاتی ہے۔اگر تمام افراد کسی ایک نقطہ حوالہ پر اتفاق کریں تب اس نقطے کی نسبت سے کسی مقام کی اونچائی کو اس مقام

---

[10] voltage
[11] volt
[12] reference point

کی مطلق اونچائی تصور کی جاتی ہے۔ بالکل اسی طرح مختلف نقطوں کے برقی دباو کا موازنہ کرتے ہوئے ان تمام نقطوں کا برقی دباو کسی ایک نقطے کی نسبت سے ناپے جائیں گے۔ایسے نقطے کو برقی زمین[13] ، کہا جاتا ہے جہاں برقی زمین کو صفر برقی دباو پر تصور کیا جاتا ہے۔عموماً کرہ ارض کی سطح کو ہی برقی زمین تصور کیا جاتا ہے۔

موٹر گاڑی میں نسب بیٹری کے مثبت سرے کا برقی دباو، بیٹری کے منفی سرے کی نسبت سے ناپنا زیادہ مطلب آمیز ہو گا جبکہ گھریلو برقی دباو مہیا کردہ ٹھنڈی اور گرم تار کے مابین ناپنا مطلب رکھتا ہے۔کبھی کبھار برقی دباو ناپنا نسبتاً مشکل ہوتا ہے، مثلاً کرہ ارض کے برقی دباو کو کس نقطہ حوالہ سے ناپا جائے گا۔طبیعیات کے میدان میں عموماً ایسے ہی مسئلے درپیش آتے ہیں جہاں نقطہ حوالہ تعین کرنا دشوار ہوتا ہے۔ایسی صورت میں نقطہ حوالہ کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا جاتا ہے اور نقطہ A کے برقی دباو کو V_A لکھا جاتا ہے۔یوں لامحدود فاصلے سے اکائی بار کو کرہ ارض تک لانے کے لئے درکار توانائی دریافت کرتے ہوئے کرہ ارض کا برقی دباو حاصل کیا جائے گا۔

ہم محوری تار کے مسائل پر غور کرتے ہوئے عموماً اس کی بیرونی نلکی سطح کو نقطہ حوالہ لیا جاتا ہے۔اسی طرح کروی تناسب رکھنے والی سطحوں کے مابین برقی دباو حاصل کرتے وقت ان میں کسی ایک سطح کو حوالہ سطح چنا جائے گا۔

اگر نقطہ A کا برقی دباو V_A جبکہ نقطہ B کا برقی دباو V_B ہو تب ان کے مابین برقی دباو

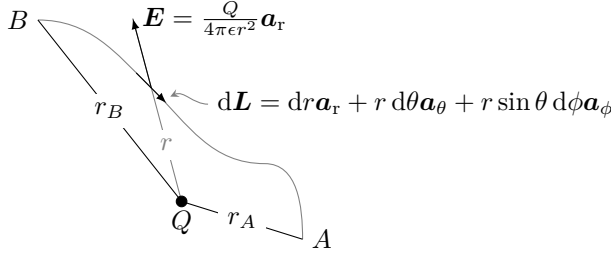
$$V_{AB} = V_A - V_B \tag{4.12}$$

ہو گا جہاں نقطہ B کو نقطہ حوالہ تصور کیا گیا ہے۔یہ مساوات صرف اور صرف اسی صورت درست ہو گی جب V_A اور V_B ازخود ایک ہی نقطہ حوالہ سے ناپے گئے ہوں۔

4.3.1 نقطہ بار کا برقی دباو

شکل 4.5 میں خلاء میں کروی محدد کے مرکز پر پائے جانے والے بار Q کے میدان میں کسی بھی راستے پر q کولمب کے پیمائشی بار کو نقطہ B سے نقطہ A لانا دکھایا گیا ہے۔Q سے r فاصلے پر اس راستے کی چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر اوسط برقی میدان $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ ہو گا۔یوں اتنا راستہ طے کرنے کے لئے

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= -q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\
&= -q\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\right)\cdot\left(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi\right)\\
&= -\frac{qQ\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

[13] electrical ground

شکل 4.5: نقطہ بار کی برقی دباو۔

توانائی درکار ہو گی۔اس طرح پورا راستہ طے کرنے کے لئے

$$W = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{qQ\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \left.\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}\right|_{r_B}^{r_A} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

توانائی درکار ہو گی جس سے ان دو نقطوں کے مابین برقی دباو $V_{AB} = \frac{W}{q}$ یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{4.13}$$

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ نقطہ بار Q کے میدان میں دو نقطوں کے مابین برقی دباو کا انحصار بار سے نقطوں کے فاصلوں r_A اور r_B پر ہے نا کہ ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچنے کے راستے پر۔یوں نقطہ B کے حوالے سے نقطہ A پر برقی دباو مساوات 4.13 سے حاصل ہوتا ہے۔اگر نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر رکھا جائے یعنی اگر $r_B = \infty$ لیا جائے تب $\frac{1}{\infty} = 0$ ہونے کی وجہ سے یہ مساوات

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \tag{4.14}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اگر ہم حوالہ نقطہ کے لامحدود فاصلے پر ہونے پہ اتفاق کریں تو ایسی صورت میں $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$ کو نقطہ A کی مطلق برقی دباو تصور کیا جا سکتا ہے جسے V_A لکھا جاتا ہے۔نقطہ حوالے کو لامحدود فاصلے پر رکھنے کا مطلب ہے کہ برقی زمین لامحدود فاصلے پر ہے۔ نقطہ حوالہ پر اتفاق کے بعد برقی دباو کی بات کرتے ہوئے بار بار برقی زمین کی نشاندہی کرنا ضروری نہیں لہٰذا برقی دباو لکھتے ہوئے زیر نوشت میں B لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے اور اسے صرف V_A لکھا جاتا ہے۔مساوات 4.14 نقطہ A کی مطلق برقی دباو دیتا ہے جو Q سے r_A فاصلے پر ہے۔یہ نقطہ کوئی بھی

نقطہ ہو سکتا ہے لہٰذا اسے r_A فاصلے پر نقطہ A کی بجائے r فاصلے پر نقطہ کہا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں مساوات 4.14 کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{4.15}$$

جو کروی محدد کے مرکز پر پائے جانے والے نقطہ بار Q سے r فاصلے پر برقی دباو V دیتا ہے جہاں نقطہ حوالہ لامحدود فاصلے پر ہے۔

برقی دباو غیر سمتی ہے لہٰذا مساوات 4.15 میں اکائی سمتیات نہیں پائے جاتے۔

ایسی سطح جس پر حرکت کرنے سے برقی دباو تبدیل نہ ہو کو ہم قوہ سطح[14] کہتے ہیں۔مساوات 4.15 کے مطابق کروی محدد کے مرکز پر نقطہ بار کے گرد کسی بھی رداس کا کرہ ہم قوہ سطح ہو گی۔ایسی سطح پر حرکت کرنے کی خاطر کسی توانائی کی ضرورت نہیں ہوتی۔

4.3.2 لکیری کثافتِ بار سے پیدا برقی دباو

z محدد پر لامحدود لمبائی کے لکیری کثافتِ بار کا میدان صفحہ 107 پر مساوات 3.15

$$\boldsymbol{E}_\rho=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho$$

دیتا ہے۔اس میدان میں ρ_0 اور ρ_1 سطحوں کے مابین

$$V=-\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{\rho_L\,\mathrm{d}\rho}{2\pi\epsilon_0\rho}=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{\rho_1} \tag{4.16}$$

برقی دباو پایا جائے گا۔

4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو

ہم محوری تار میں اندرونی اور بیرونی تاروں کے درمیانی جگہ پر برقی میدان صفحہ 108 پر مساوات 3.16 میں دیا گیا ہے جسے $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{4.17}$$

[14] equipotential surface

لکھا جا سکتا ہے جہاں اندرونی تار پر ρ_L لکیری کثافتِ بار پایا جاتا ہے۔اندرونی تار کی اکائی لمبائی پر $+Q$ جبکہ بیرونی تار کی اکائی لمبائی پر $-Q$ بار پایا جاتا ہے۔بیرونی تار کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی تار پر برقی دباو

$$V=-\int_{\rho_2}^{\rho_1}\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}\boldsymbol{a}_\rho\cdot\mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho=-\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

یعنی

$$V=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{4.18}$$

ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 اور بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

4.4 متعدد نقطہ باروں کی برقی دباو

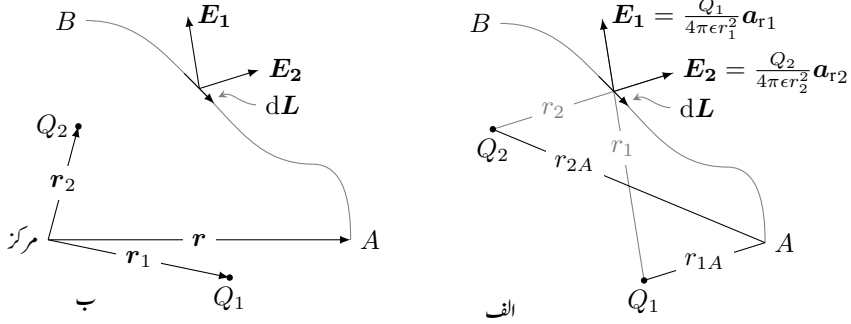
شکل 4.6-الف میں بار Q_1 اور Q_2 کے برقی میدان میں B سے A تک پیمائشی بار q کی حرکت دکھائی گئی ہے۔Q_1 کو کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے، B سے A تک راستے پر کسی بھی نقطہ N پر اس کا میدان $\boldsymbol{E}_1=\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_1 مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔اسی طرح Q_2 کو ایک اور کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے نقطے N پر اس کا میدان $\boldsymbol{E}_2=\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_2 اس محدد کے مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔شکل-الف میں B سے A تک راستے پہ نقطہ N پر Q_1 اور Q_2 کے میدان $\boldsymbol{E}_1$ اور $\boldsymbol{E}_2$ دکھائے گئے ہیں۔یوں N پر کل میدان $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$ ہو گا۔نقطہ N پر B سے A کے راستے چھوٹی سی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر کل میدان یہی ہو گا۔ جس کروی محدد کے مرکز پر Q_1 پایا جاتا ہے اس نظام میں اس چھوٹے فاصلے کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}r_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1}+r_1\,\mathrm{d}\theta_1\boldsymbol{a}_{\theta1}+r_1\sin\theta_1\,\mathrm{d}\phi_1\boldsymbol{a}_{\phi_1} \tag{4.19}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ جس کروی محدد کے مرکز پر Q_2 پایا جاتا ہے اس نظام میں اسی چھوٹے فاصلے کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}r_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2}+r_2\,\mathrm{d}\theta_2\boldsymbol{a}_{\theta2}+r_2\sin\theta_2\,\mathrm{d}\phi_2\boldsymbol{a}_{\phi_2} \tag{4.20}$$

لکھا جائے گا۔$\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ فاصلہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W&=-q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\&=-q(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\&-\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}-\frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\end{aligned}$$

شکل 4.6: دو نقطہ بار کے میدان میں مطلق برقی دباو۔

توانائی درکار ہو گی۔اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کرتے وقت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت مساوات 4.19 سے لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_1$ ملتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کرتے وقت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت مساوات 4.20 سے لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_2$ ملتا ہے۔ان قیمتوں کے پُر کرنے سے

$$\mathrm{d}W = -\frac{qQ_1\,\mathrm{d}r_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{qQ_2\,\mathrm{d}r_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں B سے A تک کا پورا راستہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} W = \int_B^A \mathrm{d}W &= -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_{1B}}^{r_{1A}} \frac{\mathrm{d}r_1}{r_1^2} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_{2B}}^{r_{2A}} \frac{\mathrm{d}r_2}{r_2^2} \\ &= \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}}\right) + \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{2A}} - \frac{1}{r_{2B}}\right) \end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر لیتے ہوئے یوں نقطہ A پر مطلق برقی دباو

$$V_A = \frac{W}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{1A}} + \frac{Q_2}{r_{2A}}\right) \tag{4.21}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 4.21 میں دائیں ہاتھ پہلا جزو Q_1 کے میدان میں نقطہ A کی مطلق برقی دباو جبکہ دوسرا جزو Q_2 کے میدان میں نقطہ A کی مطلق برقی دباو دیتا ہے۔مساوات 4.21 کے مطابق Q_1 اور Q_2 دونوں کی موجودگی میں نقطہ A کا برقی دباو حاصل کرنے کی خاطر ان دو باروں کو باری باری علیحدہ لیتے ہوئے A پر برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے

اور پھر دونوں برقی دباو کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہی طریقہ کار دو سے زیادہ نقطہ باروں کے لئے بھی بروئے کار لایا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی نقطہ N پر مختلف نقطہ باروں کا پیدا کردہ برقی دباو علیحدہ علیحدہ حاصل کرتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے N کا برقی دباو حاصل ہو گا۔

اگر کسی کروی محدد کے مرکز سے Q_1 تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_1$ جبکہ مرکز سے Q_2 تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_2$ اور مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہوں تب نقطہ A کے لئے مساوات 4.21 کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+\frac{Q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}\right) \tag{4.22}$$

جہاں Q_1 سے A تک فاصلہ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|$ اور Q_2 سے A تک فاصلہ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|$ ہے۔یہ صورت حال شکل 4.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔متعدد نقطہ باروں کے لئے مساوات 4.22

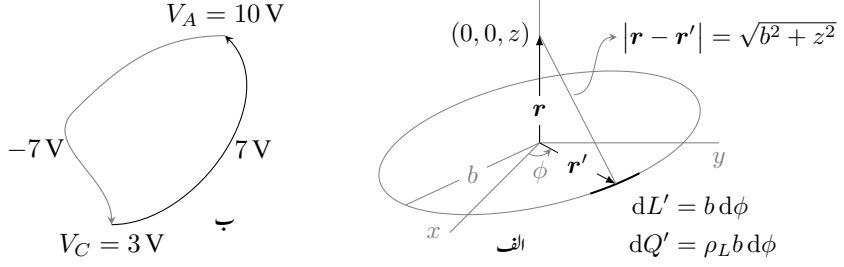
$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+\frac{Q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}+\cdots+\frac{Q_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|}\right)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|} \end{aligned} \tag{4.23}$$

لکھی جائے گی جہاں نقطہ A کا مقام زیر نوشت میں A لکھنے کی بجائے $V(\boldsymbol{r})$ میں $\boldsymbol{r}$ سے واضح کیا گیا ہے۔

متغیر حجمی کثافتِ بار ρ_h کے چھوٹے حجم Δh میں پائے جانے والے بار $\Delta Q = \rho_h \Delta h$ کو نقطہ بار تصور کیا جا سکتا ہے۔پورے حجم کے n چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے مساوات 4.23 کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_1)\Delta h_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+\frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_2)\Delta h_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}+\cdots+\frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_n)\Delta h_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|}\right) \tag{4.24}$$

جہاں $\boldsymbol{r}$ کو کثافت کا آزاد متغیرہ لیتے ہوئے مقام $\boldsymbol{r}_j$ پر کثافت کو $\rho_h(\boldsymbol{r}_j)$ اور چھوٹے حجم کو Δh_j لکھا گیا ہے۔چھوٹے حجم Δh کو کم سے کم کرتے ہوئے ایسے نقطوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ بناتے ہوئے اس مجموعہ سے مندرجہ ذیل حجمی تکمل حاصل ہوتا ہے۔

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho_h(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}h'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{4.25}$$

شکل 4.7: (الف) گول دائرے پر لکیری کثافتِ بار سے z محدد پر پیدا برقی دباو۔ (ب) بند دائرے کی برقی دباو صفر ہے۔

یہاں رک کر مندرجہ بالا مساوات کو دوبارہ دیکھتے ہیں۔ ρ_h حجمی کثافتِ بار ہے۔ مقام $\boldsymbol{r}'$ پر چھوٹے حجم $\mathrm{d}h'$ میں تھوڑا سا بار $\rho_h(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}h'$ پایا جاتا ہے جسے نقطہ بار تصور کیا جاتا ہے۔ مساوات 4.25 نقطہ $\boldsymbol{r}$ پر برقی دباو دیتا ہے جہاں برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا گیا ہے۔ یوں اکائی بار کو لامحدود فاصلے سے نقطہ $\boldsymbol{r}$ تک کسی بھی راستے لانے کے لئے اس مساوات سے حاصل $V(\boldsymbol{r})$ برابر توانائی درکار ہو گی۔

اگر حجمی کثافتِ بار کی جگہ سطحی کثافتِ بار ρ_S یا لکیری کثافتِ بار ρ_L پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\text{سطح}} \frac{\rho_S(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}S'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.26}$$

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\text{لکیر}} \frac{\rho_L(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}L'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.27}$$

لکھتے۔ ان مساوات میں $\mathrm{d}h'$، $\mathrm{d}S'$ اور $\mathrm{d}L'$ غیر سمتی مقدار ہیں۔ تینوں اقسام کی کثافتِ بار پائے جانے کی صورت میں باری باری ہر ایک سے پیدا برقی دباو حاصل کرتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

مثال 4.3: $z = 0$ سطح پر z محدد کے گرد b رداس کے گول دائرے پر ρ_L کثافتِ بار پایا جاتا ہے۔ $N(0,0,z)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔

حل: شکل 4.7-الف میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر کروی نظام کا رداس $\boldsymbol{r}$ اور نلکی محدد کا رداس $\boldsymbol{\rho}$ برابر ہوتے ہیں۔ گول دائرے پہ $\boldsymbol{r}'$ کے مقام پر چھوٹی لکیر $\mathrm{d}L' = b\,\mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔ برقی دباو $\boldsymbol{r}$ پر درکار

ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| = \sqrt{b^2 + z^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 4.27 استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(0, 0, z)$ پر

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L b \, \mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{b^2 + z^2}} = \frac{\rho_L b}{2\epsilon_0 \sqrt{b^2 + z^2}}$$

برقی دباو پایا جائے گا۔گول دائرے کے عین وسط یعنی $(0, 0, 0)$ پر یوں $\frac{\rho_L}{2\epsilon_0}$ وولٹ کا برقی دباو پایا جائے گا۔

مساوات 4.2 میں B کو لامحدود فاصلے پر لیتے ہوئے کسی بھی دو نقطوں A اور C کے مطلق برقی دباو یوں لکھے جا سکتے ہیں۔

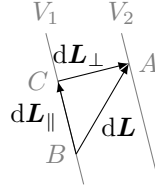
$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$
$$V_C = -\int_{\infty}^{C} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

شکل 4.7-ب میں یہ نقطے دکھائے گئے ہیں۔اب اگر V_A دس وولٹ جبکہ V_C تین وولٹ کے برابر ہو تب C کے حوالے سے A پر سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{AC} = 7\,\mathrm{V}$ ہو گا۔اسی طرح A کے حوالے سے C پر منفی سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{CA} = -7\,\mathrm{V}$ ہو گا۔یوں اگر کسی بھی راستے C سے A جایا جائے تو برقی دباو میں سات وولٹ کا اضافہ ہو گا جبکہ کسی بھی راستے واپس C لوٹنے سے برقی دباو میں سات وولٹ ہی کی کمی رونما ہو گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے سے شروع ہو کر بند دائرے پر چلتے ہوئے واپس اسی نقطے تک پہنچنے سے برقی دباو میں کل کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔اس حقیقت کو یوں لکھا جاتا ہے

$$V_{AC} + V_{CA} = -\int_{C}^{A} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} - \int_{A}^{C} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

جہاں پہلے C سے A اور پھر A سے واپس C پہنچا گیا۔بند دائرے کے تکمل کو دو ٹکڑوں میں لکھنے کی بجائے اسے بند تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے اسی مساوات کو یوں بہتر لکھا جا سکتا ہے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0 \tag{4.28}$$

جہاں تکمل کے نشان پر گول دائرہ بند تکمل کو ظاہر کرتا ہے۔

شکل 4.8: برقی دباو کی ڈھلوان برقی میدان ہے۔

مساوات 4.28 کہتی ہے کہ کسی بھی طرح پیدا کئے گئے برقی میدان میں بند دائرے پر پورا چکر لگانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوتی ہے۔حقیقت میں یہ مساوات صرف وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے برقی میدان یعنی ساکن برقی میدان[15] کے لئے درست ہے۔اس کتاب میں وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ایسے میدان جس میں بند دائرے پر چلنے کی خاطر کوئی توانائی درکار نہ ہو کو بقائی میدان[16] کہتے ہیں۔ساکن تجاذبی میدان بھی بقائی میدان[17] ہے۔یوں تجاذبی میدان میں پہاڑی کی چوٹی تک پہنچنے سے مخفی توانائی میں جتنا اضافہ پیدا ہو، چوٹی سے واپس اترنے پر مخفی توانائی میں اتنی ہی کمی رونما ہو گی اور یوں آپ کی ابتدائی اور اختتامی مخفی توانائی عین برابر ہوں گے۔

4.5 برقی دباو کی ڈھلوان

شکل 4.8 میں دو انتہائی قریب ہم قوہ سطحیں دکھائی گئی ہیں جن پر V_1 اور V_2 برقی دباو پایا جاتا ہے۔ہم قوہ سطح V_1 پر کسی نقطہ B سے ہم قوہ سطح V_2 پر کسی نقطہ A تک کا سمتی فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لیتے ہوئے B سے A تک حرکت کرنے سے برقی دباو میں $-\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ تبدیلی رونما ہو گی جہاں برقی میدان کو $\boldsymbol{E}$ لکھا گیا ہے۔

$$\mathrm{d}V = V_2 - V_1 = -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.29}$$

چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر برقی میدان کو غیر تغیر پذیر تصور کیا جا سکتا ہے۔چونکہ دو نقطوں کے مابین برقی دباو کا ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچنے کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہٰذا ہم B سے C اور پھر A کی طرف بھی جا سکتے تھے۔B سے C تک کے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel$ جبکہ C سے A تک فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp$ لکھتے ہوئے

$$\mathrm{d}V = -\boldsymbol{E}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel + \mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp) \tag{4.30}$$

---

[15] static electric field
[16] conservative field
[17] یہ جملہ لکھنے کے ٹھیک ایک دن بعد نرگھس مولولہ اوران کے ساتھیوں نے تجاذبی موجیں دریافت کی۔اس دریافت سے پہلے کسی بھی تجاذبی میدان کو بقائی میدان تصور کیا جاتا تھا۔آج سے ہم ساکن تجاذبی میدان کو ہی بقائی میدان کہیں گے۔

لکھا جا سکتا ہے۔$\boldsymbol{E}$ کو ہم قوہ توانائی کے متوازی اور اس کے عمودی اجزاء کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\parallel} + \boldsymbol{E}_{\perp} \tag{4.31}$$

جس سے

$$\mathrm{d}V = -(\boldsymbol{E}_{\parallel} + \boldsymbol{E}_{\perp}) \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\parallel} + \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\perp}) = -E_{\parallel}\,\mathrm{d}L_{\parallel} - E_{\perp}\,\mathrm{d}L_{\perp} \tag{4.32}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\parallel}$ کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{E}_{\parallel} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\parallel} = E_{\parallel}\,\mathrm{d}L_{\parallel}$ لکھا گیا ہے جبکہ $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\perp}$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{E}_{\parallel} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\perp} = 0$ ہے۔اس مساوات کا پہلا جزو $-E_{\parallel}\,\mathrm{d}L_{\parallel}$ نقطہ B اور C کے درمیان برقی دباو دیتا ہے۔ہم قوہ سطح پر ہر جگہ برابر برقی دباو پایا جاتا ہے لہٰذا B اور C کے درمیان کسی قسم کا برقی دباو نہیں پایا جاتا یعنی $-E_{\parallel}\,\mathrm{d}L_{\parallel}$ صفر کے برابر ہے۔اب چونکہ $\mathrm{d}L_{\parallel}$ صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا کسی بھی ہم قوہ سطح پر

$$\boldsymbol{E}_{\parallel} = 0 \tag{4.33}$$

ہو گا اور سطح پر صرف اور صرف عمودی برقی میدان پایا جائے گا یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\perp} \tag{4.34}$$

یوں

$$\mathrm{d}V = -E_{\perp}\,\mathrm{d}L_{\perp} \tag{4.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ ہم قوہ سطح پر صرف عمودی میدان پایا جاتا ہے، مندرجہ بالا مساوات میں $\boldsymbol{E}_{\perp}$ کی جگہ $\boldsymbol{E}$ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}V = -E\,\mathrm{d}L_{\perp} \tag{4.36}$$

اس مساوات سے

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}L_{\perp}} \tag{4.37}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ E درحقیقت V کے ڈھلوان کے برابر مگر الٹ سمت میں ہے۔یوں

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}L_{\perp}} \tag{4.38}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ ہم قوہ سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

کسی نقطہ کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے کسی دوسرے نقطے کی برقی دباو کو مطلق برقی دباو تصور کیا جاتا ہے جو نقطے کے مقام پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اسے $V(x,y,z)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں برقی دباو کے آزاد متغیرات x، y اور z ہیں۔ کسی بھی قابو متغیرہ کی طرح $V(x,y,z)$ کا تفرق

$$\mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{4.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی برقی دباو کو

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+E_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+E_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{4.40}$$

اور چھوٹی لمبائی کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{4.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں آپ صفحہ 8 پر دئے مساوات 1.3 پر دوبارہ نظر ڈال سکتے ہیں۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z=-E_x\,\mathrm{d}x-E_y\,\mathrm{d}y-E_z\,\mathrm{d}z \tag{4.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔ y اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $\mathrm{d}y=0$ اور $\mathrm{d}z=0$ لیتے ہوئے) x تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ اور $-E_x\,\mathrm{d}x$ تبدیل ہوتے ہیں لہٰذا یہ لازم ہے کہ یہ دونوں اجزاء برابر ہوں یعنی $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x=-E_x\,\mathrm{d}x$ جس سے $E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ اور $-E_x\,\mathrm{d}x$ برابر نہ ہوں تب مساوات کے ایک طرف کی تبدیلی دوسرے طرف کی تبدیلی کے برابر نہیں ہو گی اور یوں مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہیں گے۔ اسی طرح صرف y اور صرف z تبدیل کئے جا سکتا ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned}E_x&=-\frac{\partial V}{\partial x}\\E_y&=-\frac{\partial V}{\partial y}\\E_z&=-\frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned} \tag{4.43}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے مساوت 4.40 میں پُر کرتے

$$\boldsymbol{E}=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \tag{4.44}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اگر ہم

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \qquad \text{(4.45)}$$

مساوات کی ڈھلوان میں محدد کارتیسی

لکھیں جہاں کسی بھی غیر سمتی مقدار f کے لئے ∇f سے مراد $\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \qquad \text{(4.46)}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ∇V کو برقی دباو کی **ڈھلوان**[18] پڑھا جاتا ہے۔ مساوات 4.45 کا بایاں ہاتھ ڈھلوان کی علامت جبکہ اس کا دایاں ہاتھ ڈھلوان کے عمل کو ظاہر کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے ڈھلوان کا عمل برقی دباو اور برقی میدان کے لئے حاصل کیا، حقیقت میں یہ عمل سائنس کے دیگر متغیرات کے لئے بھی درست ثابت ہوتا ہے۔ اس کی مقبولیت اسی حقیقت کی وجہ سے ہے کہ یہ جگہ جگہ پیش آتا ہے۔ ڈھلوان کا عمل غیر سمتی مقدار پر کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے۔ صفحہ 116 پر مساوات 3.32 پھیلاو کی تعریف بیان کرتا ہے جہاں پھیلاو کا عمل سمتیہ پر کرتے ہوئے غیر سمتی مقدار[19] حاصل کی جاتی ہے۔ پھیلاو کی اس مساوات کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad \text{(4.47)}$$

مشق 4.3: تفاعل $f(x, y, z) = 3 + z^2 e^y \sin x$ کا ڈھلوان حاصل کریں۔

جواب: $z^2 e^y \cos x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z^2 e^y \sin x \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2ze^y \sin x \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

---

[18] gradient

[19] طلباء و طالبات عموماً ڈھلوان کے حاصل جواب کے اکائی سمتیات کو غائب کرتے ہوئے انہیں پھیلاو کے ساتھ منسلک کر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے گریز کریں۔

مثال 4.4: نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کا سمتی فاصلہ

$$\boldsymbol{R}_{21} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

ہے جبکہ ان کے مابین فاصلہ $R_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ہے۔نقطہ N_2 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کریں۔

حل:نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کرتے وقت x_2، y_2 اور z_2 کو متغیرات تصور کیا جاتا ہے جبکہ x_1، y_1 اور z_1 کو اٹل قیمتیں تصور کیا جاتا ہے۔یوں ڈھلوان کی تعریف

$$\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial}{\partial y_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

لکھی جائے گی جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 یاد دہانی کراتا ہے کہ نقطہ N_2 کے متغیرات ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے استعمال کئے جائیں گے۔ڈھلوان کا پہلا جزو

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{R_{21}} &= \frac{\partial}{\partial x_2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-\frac{3}{2}}\,[2(x_2 - x_1)] \\
&= \frac{-(x_2 - x_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

یعنی

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)}{R_{21}^3}$$

حاصل ہوتا ہے۔بقایا دو اجزاء بھی بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے

$$\nabla_2\frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{R_{21}^3}$$

یعنی

$$\nabla_2\frac{1}{R_{21}} = -\frac{\boldsymbol{R}_{21}}{R_{21}^3} = -\frac{\boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2} \tag{4.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 4.4: مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کی گئی۔اب آپ نقطہ N_1 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{R_{21}^3} \tag{4.49}$$

کے برابر ہے۔یوں

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \tag{4.50}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان

نلکی محدد میں برقی دباو کے آزاد متغیرات نلکی محدد کے متغیرات ہوں گے اور یوں برقی دباو $V(\rho, \phi, z)$ لکھا جائے گا۔مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو نلکی محدد میں یوں لکھ سکتے ہیں

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{4.51}$$

$$\boldsymbol{E} = E_\rho \boldsymbol{a}_\rho + E_\phi \boldsymbol{a}_\phi + E_z \boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \tag{4.52}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho \boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \tag{4.53}$$

جہاں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو صفحہ 39 پر مساوات 1.44 کی مدد سے لکھا گیا ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z = -\left(E_\rho\,\mathrm{d}\rho + E_\phi \rho\,\mathrm{d}\phi + E_z\,\mathrm{d}z\right) \tag{4.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ϕ اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $\mathrm{d}\phi = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ لیتے ہوئے) ρ تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho$ اور $-E_\rho\,\mathrm{d}\rho$ تبدیل ہوتے ہیں۔ اگر یہ اجزاء ہر صورت برابر رہیں، صرف اور صرف اسی صورت مندرجہ بالا مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہٰذا $-E_\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho$ ہو گا جس سے $E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح باری باری ϕ اور z تبدیل کرتے ہوئے

$$E_\phi \rho\,\mathrm{d}\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi$$
$$E_z\,\mathrm{d}z = -\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

لکھے جا سکتے ہیں جس سے E_ϕ اور E_z کی مساوات حاصل ہوتی ہیں۔ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\phi &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \tag{4.55}$$

انہیں مساوات 4.52 میں پُر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right) \tag{4.56}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس کو مساوات 4.46 کی شکل میں لکھتے ہوئے نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \qquad \text{نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات} \tag{4.57}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 4.45 اور مساوات 4.57 کا موازنہ کریں۔کارتیسی محدد کی مساوات نسبتاً آسان ہے۔

4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان

صفحہ 47 پر مساوات 1.64 کروی محدد میں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی مساوات ہے۔کروی محدد میں کسی بھی نقطے کے برقی دباو کو $V(r, \theta\phi)$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کی طرح $\boldsymbol{E}$ کو تین عمودی حصوں میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں ہم

مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو کروی محدد میں یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \tag{4.58}$$

$$\boldsymbol{E} = E_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + E_\theta \boldsymbol{a}_\theta + E_\phi \boldsymbol{a}_\phi \tag{4.59}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta \boldsymbol{a}_\theta + r \sin\theta\,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\phi \tag{4.60}$$

ان تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi = -\left(E_r\,\mathrm{d}r + E_\theta r\,\mathrm{d}\theta + E_\phi r \sin\theta\,\mathrm{d}\phi\right) \tag{4.61}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب اگر ہم صرف r کو تبدیل کریں تب $\mathrm{d}\theta = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہوں گے لٰہذا مندرجہ بالا مساوات کے بائیں دائیں بازو کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r$ اور $-E_r\,\mathrm{d}r$ تبدیل ہوں گے۔یہ اجزاء بالکل برابر ہونے کی صورت میں ہی مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لٰہذا ہم $\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r = -E_r\,\mathrm{d}r$ لکھ سکتے ہیں جس سے $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح باری باری اور تبدیل کرتے ہوئے مساوات کے دونوں بازو کے اجزاء برابر لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta &= -E_\theta r\,\mathrm{d}\theta \\ \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi &= -E_\phi r \sin\theta\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E_θ اور E_ϕ کی مساوات حاصل ہوتی ہیں۔ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\phi &= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \end{aligned}$$

ان قیمتوں کو مساوات 4.59 میں پُر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi\right) \tag{4.62}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے کروی محدد میں ڈھلوان کی مساوات یوں لکھی جا سکتی ہے۔

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} \qquad \text{مساوات کی ڈھلوان میں محدد کروی} \tag{4.63}$$

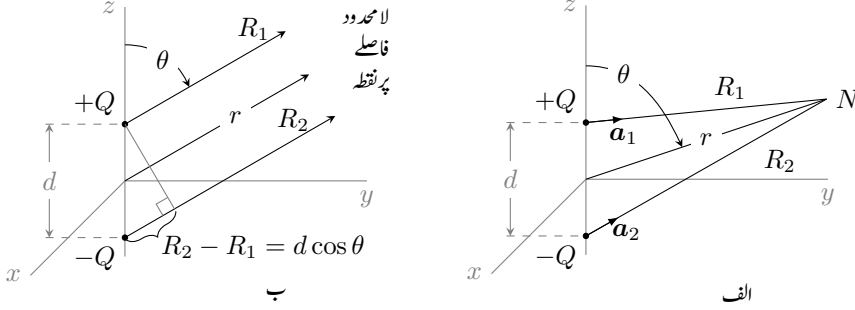
مشق 4.5: عمومی محدد کے متغیرات (u, v, w) اور اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ لیتے ہوئے صفحہ 119 پر حصہ 3.10 میں پھیلاو کی عمومی مساوات کا حصول دکھایا گیا۔ایسا ہی کرتے ہوئے ڈھلوان کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب:

$$\nabla = \frac{1}{K_1}\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{K_2}\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{a}_v + \frac{1}{K_3}\frac{\partial}{\partial w}\boldsymbol{a}_w \qquad \text{مساوات عمومی کی ڈھلوان}$$

مثال 4.5: صفحہ 143 پر مساوات 4.15 نقطہ بار کا برقی دباو دیتا ہے۔مساوات 4.62 کے استعمال سے کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ کی مساوات حاصل کریں۔

حل: برقی دباو $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ کروی محدد کے رداس پر منحصر ہے جبکہ θ اور ϕ کا اس میں کوئی کردار نہیں لہٰذا مساوات 4.62 میں $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ اور $\frac{\partial V}{\partial \phi}$ صفر کے برابر ہوں گے۔اس طرح $\frac{\partial V}{\partial r}$ لیتے ہوئے $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباو معلوم ہوتی ہے جس سے برقی میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔اس کی مثال بجلی کی دو تاریں ہو سکتی ہیں جن کے درمیان 220 V پایا جاتا ہے اور جن کے درمیان آپ برقی میدان جاننا چاہتے ہوں۔

شکل 4.9: جفت قطب

4.6 جفت قطب

شکل 4.9-الف میں محدد کے مبدا سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پہ z محدد پر ایک جانب $+Q$ اور دوسری جانب $-Q$ نقطہ بار دکھائے گئے ہیں۔یوں برابر مقدار مگر الٹ علامت کے نقطہ باروں کے درمیان d فاصلہ ہے۔ایسی جوڑی باروں کو جفت قطب[20] کہا جاتا ہے۔ہمیں جفت قطب سے دور نقطہ N پر برقی میدان اور برقی دباو کی قیمتیں درکار ہیں۔کسی بھی دور نقطے سے یہ دونوں بار تقریباً مبدا پر دکھائی دیتے ہیں۔دور نقطے سے ایسا نقطہ مراد ہے جہاں مبدا سے نقطے تک کا فاصلہ r جفت قطب باروں کے درمیان فاصلہ d سے بہت زیادہ ہو یعنی جب $r \gg d$ ہو۔ہم دیکھ سکتے ہیں کہ r یا θ تبدیل کرنے سے برقی میدان تبدیل ہو گا جبکہ ϕ تبدیل کرنے سے ایسا نہیں ہو گا۔شکل 4.9-الف میں R_1 اور R_2 دونوں r کی جانب جھک کر N پر آ ملتے ہیں۔نقطہ N کو جتنا دور لے جایا جائے اتنی ہی R_1 اور R_2 دونوں r کے متوازی صورت اختیار کرتے ہیں حتیٰ کہ آخر کار یہ شکل 4.9-ب کی طرح نظر آتے ہیں۔آئیں اس شکل کی مدد سے دور نقطے پر برقی دباو اور برقی میدان حاصل کریں۔

شکل 4.9-ب میں R_1، R_2 اور r تینوں z محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔بار $+Q$ سے R_2 پر عمود بناتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
R_2 - R_1 &= d\cos\theta \\
R_1 &= r - \frac{d}{2}\cos\theta \\
R_2 &= r + \frac{d}{2}\cos\theta
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

---

[20] dipole

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 4.9-الف میں N پر برقی دباو V مساوات 4.22 کی مدد سے

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \tag{4.65}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ مساوات 4.64 کی مدد سے اسے

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{(r - \frac{d}{2}\cos\theta)(r + \frac{d}{2}\cos\theta)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{(r^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{d\cos\theta}{(1 - \frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta)} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ نیچے قوسین میں $1 \leq \cos\theta$ اور $d \gg r$ کی وجہ سے $\frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta \gg 1$ ہو گا اور یوں $\frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta$ کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ یوں

$$V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.66}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.62 کو استعمال کرتے ہوئے اس مساوات سے برقی میدان لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{4.67}$$

ہم پہلے برقی دباو اور پھر ڈھلوان کی مدد سے برقی میدان حاصل کرنے کے بجائے پہلے برقی میدان اور پھر تکمل استعمال کرتے ہوئے برقی دباو حاصل کر سکتے ہیں البتہ ایسا کرنا اتنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔ شوق رکھنے والوں کے لئے مثال 4.6 میں اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے دور نقطے پر جفت قطب سے پیدا میدان اور برقی دباو حاصل کئے گئے ہیں۔

جفت قطب کا بار $|Q|$ ضرب باروں کے درمیان سمتی فاصلہ $\boldsymbol{d}$ کو معیار اثر جفت قطب[21] کہتے ہیں اور اسے $\boldsymbol{p}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d} \tag{4.68}$$

---

[21] dipole moment

کے برابر ہے جہاں سمتی فاصلہ منفی بار سے مثبت بار کی سمت میں ہوتا ہے لہٰذا شکل 4.9 میں $\boldsymbol{d} = d\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہے۔اس طرح چونکہ $\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{r}} = \cos\theta$ کے برابر ہے لہٰذا یوں ہم مساوات 4.66 کو

$$V = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.69}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی مساوات کو مزید یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2} \boldsymbol{p} \cdot \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{4.70}$$

جہاں $\boldsymbol{r}$ اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی دباو حاصل کیا جا رہا ہو جبکہ $\boldsymbol{r}'$ جفت قطب کے مرکز کی نشاندہی کرتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی محدد نظام سے آزاد مساوات ہے۔

مساوات 4.66 کے تحت r بڑھانے سے برقی دباو r^2 گنا کم ہوتا ہے۔یاد رہے کہ اکیلے بار کا برقی دباو ایسی صورت میں r گنا کم ہوتا ہے۔ہمیں تعجب نہیں ہونا چاہیے چونکہ دور سے جفت قطب کے دو بار نہایت قریب قریب نظر آتے ہیں جس سے مثبت بار کا اثر منفی بار کا اثر تقریباً ختم کرتا ہے۔یہی حقیقت مساوات 4.67 میں بھی نظر آتی ہے جہاں r بڑھانے سے $\boldsymbol{E}$ کی قیمت r^3 گنا کم ہوتی ہے۔

جب تک Q ضرب $\boldsymbol{d}$ کی قیمت تبدیل نہ ہو اس وقت تک دور کسی بھی نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔یوں Q کو کم یا زیادہ کرتے ہوئے اگر $\boldsymbol{d}$ کو یوں تبدیل کیا جائے کہ $Q\boldsymbol{d}$ تبدیل نہ ہو تو جفت قطب سے دور نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جائے گی۔اب اگر ہم $Q\boldsymbol{d}$ کی قیمت محدود رکھتے ہوئے $\boldsymbol{d}$ کو اتنا کم کر دیں کہ اسے صفر تصور کیا جا سکے اور ساتھ ہی ساتھ Q کو اتنا بڑھا دیں کہ اسے لامحدود تصور کیا جا سکے تو ایسی صورت میں ہمیں نقطہ جفت قطب حاصل ہو گا۔

4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط

ہم پہلے صفحہ 91 پر حصہ 2.7 میں سمت بہاو خط[22] پر غور کر چکے ہیں۔آئیں جفت قطب کے سمت بہاو خطوط کھینچنا دیکھیں۔برقی دباو کے سمت بہاو خط مساوات 4.66 کی مدد سے کھینچے جا سکتے ہیں۔اس مساوات میں $\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}$ مستقل ہے جسے ایک کے برابر لیتے ہوئے $V = \frac{\cos\theta}{r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔مختلف برقی دباو کی قیمتوں کے لئے اسے کھینچ کر برقی دباو کے سمت بہاو خط حاصل کئے جاتے ہیں۔شکل 4.10 میں $V = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ کے لئے اس مساوات کے

[22] streamlines

خط دکھائے گئے ہیں۔ مساوات 4.65 کے تحت دونوں بار سے برابر فاصلہ پر $V = 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں $z = 0$ لامحدود سطح پر برقی دباو صفر ہو گا اور یہ بطور برقی زمین کردار ادا کرے گی۔

جفت قطب کے میدان کی سمت بہاو خطوط مساوات 4.67 کی مدد سے کھینچے جاتے ہیں۔اس مساوات کا پہلا جزو کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سمت میں میدان E_r دیتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو اسی نقطے پر $\boldsymbol{a}_\theta$ سمت میں میدان E_θ دیتا ہے۔اس طرح اس نقطے پر ہم

$$\frac{E_r}{E_\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{r\,\mathrm{d}\theta} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

لکھ کر تکمل لیتے ہوئے

$$\ln r = 2\ln\sin\theta + \ln M$$

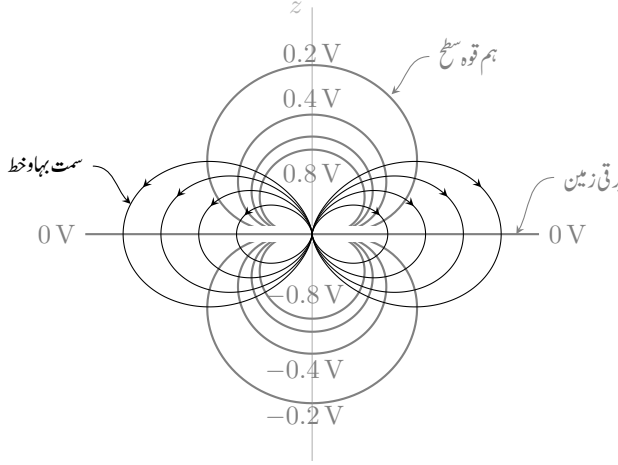
حاصل کرتے ہیں جہاں $\ln M$ تکمل کا مستقل ہے۔اسے مزید یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$r = M\sin^2\theta \tag{4.71}$$

یہ مساوات جفت قطب کے میدان کے سمت بہاو خط دیتا ہے جنہیں شکل 4.10 میں $M = 1, 1.5, 2, 2.5$ کے لئے کھینچا گیا ہے۔برقی زمین پر برقی میدان عمودی ہے۔

مثال 4.6: شکل 4.9-الف میں دکھائے گئے جفت قطب سے دور کسی نقطے N پر پہلے برقی میدان اور پھر اس برقی میدان کو استعمال کرتے ہوئے برقی دباو حاصل کریں۔

صفحہ 35 پر مثال 1.8 میں $\boldsymbol{R}_1 = R_1\boldsymbol{a}_1$ اور $\boldsymbol{R}_2 = R_2\boldsymbol{a}_2$ سمتیوں کو کروی نظام میں لکھنا دکھایا گیا ہے۔انہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{R}_1 = (r - \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$$
$$\boldsymbol{R}_2 = (r + \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$$

شکل 4.10: جفت قطب کے ہم قوہ اور سمت بہاو خط۔

جس سے $R_1 = |\boldsymbol{R}_1| = \sqrt{\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_1}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \sqrt{\left(r - \frac{d}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\sin\theta \boldsymbol{a}_\theta\right)^2} \\
&= r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{r^2}} \\
&\approx r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta} \qquad (d \ll r)
\end{aligned} \tag{4.72}
$$

آخری قدم پر $r \gg d$ کی بنا پر $\frac{d^2}{r^2}$ کو رد کیا گیا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ

$$
(a+b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \cdots
$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $a = 1$ اور $b = -\frac{d}{r}\cos\theta$ کے برابر ہوں تب مساوات 4.72 میں دئے R_1 کی طاقت تین کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$
R_1^3 = r^3(1 - \tfrac{d}{r}\cos\theta)^{\frac{3}{2}} = r^3\left(1 - \tfrac{3d}{2r}\cos\theta + \cdots\right)
$$

اس مساوات کے پہلے دو جزو دکھائے گئے ہیں۔اس کے تیسرے جزو میں $\frac{d^3}{r^3}$ چوتھے جزو میں $\frac{d^4}{r^4}$ پائے جاتے ہیں لہٰذا

پہلے دو اجزاء کے علاوہ تمام اجزاء کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$R_1^3 = r^3\left(1-\frac{3d}{2r}\cos\theta\right) \tag{4.73}$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔یہی عمل R_2^3 کے لئے کرنے سے

$$R_2^3 = r^3\left(1+\frac{3d}{2r}\cos\theta\right) \tag{4.74}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 64 پر مساوات 2.18 کو استعمال کرتے ہوئے دونوں باروں کا کل برقی میدان ان کے علیحدہ علیحدہ میدانوں کا مجموعہ لے کر یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2^3}\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\left[(r-\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+\frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right]}{r^3(1-\frac{3d}{2r}\cos\theta)} - \frac{\left[(r+\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{r}-\frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right]}{r^3(1+\frac{3d}{2r}\cos\theta)}\right)\\
&= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\frac{2\cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta}{(1-\frac{3d}{2r}\cos\theta)(1+\frac{3d}{2r}\cos\theta)}\right)
\end{aligned}$$

اس مساوات میں کسر کے نچلے حصے کو ضرب دیتے ہوئے $(1-\frac{9d^2}{4r^2}\cos^2\theta \approx 1)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $\frac{d^2}{r^2}$ والے جزو کو نظرانداز کیا گیا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta) \tag{4.75}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.67 ہی ہے۔

برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہوئے مساوات 4.75 سے نقطہ $N_0(r,\theta,\phi)$ پر برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔لامحدود فاصلے پر نقطہ $N_3(\infty,\theta',\phi')$ سے کروی محدد کے مبدا کی جانب سیدھا چلتے ہوئے ہم پہلے $N_2(r,\theta',\phi')$ تک پہنچتے ہیں۔اس کے بعد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے ہم $N_1(r,\theta,\phi')$ پہنچیں گے اور آخر کار r اور θ تبدیل کئے بغیر $N_0(r,\theta,\phi)$ پہنچیں گے۔

صفحہ 47 پر مساوات 1.64 کروی محدد میں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی مساوات ہے۔اسے یہاں دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.76}$$

N_3 سے N_2 تک چلتے ہوئے $\mathrm{d}\theta = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہوں گے لہٰذا N_3 کے حوالے سے N_2 پر برقی دباو V_{23}

$$V_{23} = -\int_{N_3}^{N_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_3}^{N_2} \frac{(2\cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta \boldsymbol{a}_{\theta}) \cdot \mathrm{d}r \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{r^3}$$
$$= -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_3}^{N_2} \frac{2\cos\theta \, \mathrm{d}r}{r^3} = \left. \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right|_{\infty,\theta',\phi'}^{r,\theta',\phi'} = \frac{Qd\cos\theta'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب N_2 سے N_1 چلتے ہیں۔ہم اس راستے $\mathrm{d}r = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ رکھتے ہیں لہٰذا

$$V_{12} = -\int_{N_2}^{N_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_2}^{N_1} \frac{(2\cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta \boldsymbol{a}_{\theta}) \cdot r \, \mathrm{d}\theta \boldsymbol{a}_{\theta}}{r^3}$$
$$= -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_2}^{N_1} \frac{\sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{r^2} = \left. \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \right|_{r,\theta',\phi'}^{r,\theta,\phi'} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\cos\theta - \cos\theta')}{r^2}$$

ہو گا۔اب N_1 سے N چلتے ہیں۔اس راستے $\mathrm{d}r = 0$ اور $\mathrm{d}\theta = 0$ رکھے گئے ہیں لہٰذا

$$V_{01} = -\int_{N_1}^{N_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_1}^{N_0} \frac{(2\cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta \boldsymbol{a}_{\theta}) \cdot r\sin\theta \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\phi}}{r^3} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 0$ اور $\boldsymbol{a}_{\theta} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 0$ کی بدولت تکمل صفر کے برابر لیا گیا ہے۔یوں V_{23}، V_{12} اور V_{01} جمع کرتے ہوئے N_3 سے N_0 تک کا برقی دباو

$$V_0 = V_{03} = V_{23} + V_{12} + V_{01} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.77}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.66 ہی ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے آپ نے دیکھ لیا ہو گا کہ پہلے برقی میدان اور بعد میں برقی دباو حاصل کرنا زیادہ مشکل کام ہے۔برقی دباو کی افادیت اس مثال سے صاف ظاہر ہے۔حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباو ہی معلوم ہوتی ہے جیسے دو متوازی دھاتی چادروں کے درمیان برقی دباو یا گھریلو صارفین کے ہاں دو برقی تاروں کے درمیان برقی دباو۔ہم ایسا برقی دباو جانتے ہوئے اس سے مختلف متغیرات حاصل کرتے ہیں۔

4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

برقی دباو پر غور کرتے ہوئے ہم نے دیکھا کہ برقی میدان میں لامحدود فاصلے سے بار کو کسی نقطہ پر منتقل کرنے کے لئے توانائی درکار ہوتی ہے۔یہ توانائی بار کو حرکت دینے والا محرک مہیا کرتا ہے۔چونکہ توانائی اٹل ہے لہٰذا یہ توانائی بصورت مخفی توانائی بار میں منتقل ہو جاتی ہے۔جب تک بیرونی قوت بار کو اس نقطے پر روکے رکھے یہ توانائی بار میں بطور مخفی توانائی رہے گی۔اگر بار کو بیرونی طاقت نہ روکے تو مخفی توانائی حرکی[23] توانائی میں تبدیل ہوتے ہوئے بار کو حرکت دے گی۔یوں اب بار ازخود کام کرنے کے قابل ہو گا۔

آئیں دیکھیں کہ اگر اسی طرح مختلف بار کو لامحدود فاصلے سے مختلف مقامات پر لا کر وہیں روکے رکھا جائے تو اس پورے نظام کی کل مخفی توانائی کتنی ہو گی۔یہ توانائی ان باروں کو اپنی اپنی جگہوں پر منتقل کرنے کے لئے درکار بیرونی توانائی کے مجموعے سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

شروع خلاء سے کرتے ہیں۔خلاء میں چونکہ کوئی بار نہیں پایا جاتا لہٰذا اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہو گا۔یوں پہلے بار Q_1 کو لامحدود فاصلے سے نقطہ N_1 منتقل کرنے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔اب چونکہ خلاء میں Q_1 موجود ہے لہٰذا دوسرے بار Q_2 کو نقطہ N_2 منتقل کرنے کے لئے $Q_2 V_{2,1}$ توانائی درکار ہو گی جہاں N_2 پر پہلے بار کی وجہ سے پیدا برقی دباو کو $V_{2,1}$ لکھا گیا ہے۔$V_{2,1}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلا عدد منتقل کئے جانے والے بار کی نشاندہی کرتا ہے جبکہ پہلا عدد منتقلی کے نقطے پر برقی دباو پیدا کرنے والے بار کی نشاندہی کرتا ہے۔یوں

$$\text{بار } Q_2 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_2 V_{2,1}$$

لکھی جائے گی۔اب خلاء میں دو عدد بار پائے جاتے ہیں لہٰذا نقطہ N_3 پر Q_1 سے پیدا $V_{3,1}$ اور Q_2 سے پیدا $V_{3,2}$ برقی دباو ہوں گے۔یوں N_3 پر کل $V_{3,1} + V_{3,2}$ برقی دباو ہو گا لہٰذا

$$\text{بار } Q_3 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$$

اور اسی طرح

$$\text{بار } Q_4 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}$$

ہو گا۔یہی طریقہ کار مزید بار منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا جائے گا۔کل مخفی توانائی W تمام باروں کو منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے برابر ہو گا جو مندرجہ بالا طرز کے تمام جوابات کا مجموعہ

[23] kinetic energy

ہو گا یعنی

$$
\begin{aligned}
W &= Q_2V_{2,1} + Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2} + Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3} + \cdots \\
&= Q_2(V_{2,1}) + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2}) + Q_4(V_{4,1} + V_{4,2} + V_{4,3}) + \cdots
\end{aligned} \tag{4.78}
$$

مندرجہ بالا مساوات میں کسی رکن مثلاً $Q_4V_{4,2}$ کو دیکھیں۔ اسے یوں

$$
Q_4V_{4,2} = Q_4\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0R_{42}} = Q_2\frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0R_{24}} = Q_2V_{2,4}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Q_2 اور Q_4 کے درمیان غیر سمتی فاصلے کو R_{42} یا R_{24} لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح $Q_4V_{4,2}$ کو $Q_2V_{2,4}$ لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح مساوات 4.78 کے ہر جزو کو تبدیل کرتے ہوئے اسے

$$
\begin{aligned}
W &= Q_1V_{1,2} + Q_1V_{1,3} + Q_2V_{2,3} + Q_1V_{1,4} + Q_2V_{2,4} + Q_3V_{3,4} + \cdots \\
&= Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots) + Q_2(V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots) + Q_3(V_{3,4} + \cdots)
\end{aligned} \tag{4.79}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 4.78 اور مساوات 4.79 کو جمع کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
2W = \quad & Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots) \\
& + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots) \\
& + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \cdots) \\
& + \cdots
\end{aligned} \tag{4.80}
$$

حاصل ہوتی ہے۔اس مساوات کے پہلے قوسین میں $V_{1,2}$ نقطہ N_1 پر Q_2 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے۔اسی طرح $V_{1,3}$ نقطہ N_1 پر Q_3 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے جبکہ $V_{1,4}$ یہیں پر Q_4 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے۔یوں قوسین میں بند قیمت نقطہ N_1 پر تمام باروں کا مجموعی برقی دباو V_1 ہے۔یاد رہے کہ N_1 پر برقی دباو حاصل کرتے وقت یہیں پر پائے جاتے بار Q_1 کو شامل نہیں کیا جاتا۔یوں

$$
V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots
$$

کے برابر ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات سے

$$
W = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + \cdots\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} Q_mV_m \tag{4.81}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots$$
$$V_2 = V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots$$
$$V_3 = V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \cdots$$

لکھے گئے ہیں۔

ایسی حجم جس میں حجمی کثافتِ بار ρ_h پائی جائے کی کل مخفی توانائی حاصل کرنے کی غرض سے چھوٹے چھوٹے حجم $\mathrm{d}h$ میں بار $\mathrm{d}Q = \rho_h \,\mathrm{d}h$ کو نقطہ بار تصور کرتے ہوئے مساوات 4.81 کا استعمال کیا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں یہ مساوات تکمل کی شکل اختیار کر لے گی یعنی

$$W = \frac{1}{2}\int_h \rho_h V \,\mathrm{d}h \tag{4.82}$$

جہاں تکمل پورے حجم h کے لئے حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 4.7 میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل مساوات کا ثبوت دکھایا گیا ہے۔

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V) \tag{4.83}$$

مساوات 4.83 اور صفحہ 116 پر مساوات 3.33 کے استعمال سے مساوات 4.82 کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{D}) V \,\mathrm{d}h \\ &= \frac{1}{2}\int_h [\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)] \,\mathrm{d}h \end{aligned} \tag{4.84}$$

اس مساوات میں تکمل کے دو اجزاء ہیں۔پہلے جزو کو مسئلہ پھیلاو، جسے صفحہ 123 پر مساوات 3.43 دیتی ہے، کی مدد سے بند سطحی تکمل کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{1}{2}\int_h \nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) \,\mathrm{d}h = \frac{1}{2}\oint_S (V\boldsymbol{D}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4.85}$$

یہاں بائیں جانب حجم h جبکہ دائیں جانب اس حجم کی سطح S پر تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔h اس حجم کو ظاہر کرتا ہے جس میں مساوات 4.82 کے تمام بار پائے جاتے ہیں۔مساوات 4.82 میں حجم کے ایسے حصے بھی ہوں گے جہاں کثافتِ

بار ρ_h کی قیمت صفر ہو گی۔ایسے حصوں کا تکمل $\rho_h = 0$ کی بنا پر صفر کے برابر ہو گا۔یوں اگر حجم کو لامحدود کر دیا جائے تب بھی تکمل کی قیمت وہی رہے گی چونکہ ایسی اضافی حجم میں $\rho_h = 0$ ہو گا۔مساوات 4.85 میں یوں حجم کو لامحدود لیا جا سکتا ہے۔لامحدود حجم کو گھیرتی سطح کو کرہ شکل کا تصور کرتے ہوئے ایسی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہو گی جہاں $r \to \infty$ ہو گا۔لامحدود رداس کی سطح سے دیکھتے ہوئے کسی بھی شکل کا کثافتِ بار نقطہ مانند بار Q نظر آئے گا جو سطح پر $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ میدان اور $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ برقی دباو پیدا کرے گا۔ یوں مساوات 4.85 کے دائیں جانب بند تکمل رداس کے ساتھ $\frac{1}{r}$ کا تعلق رکھتا ہے اور $r \to \infty$ کی صورت میں ایسا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔یوں مساوات 4.84 کو

$$W = -\frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D}\cdot(\nabla V)\,\mathrm{d}h$$

یا

$$W = \frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}h = \frac{\epsilon_0}{2}\int_h E^2\,\mathrm{d}h \tag{4.86}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 4.46 اور صفحہ 100 پر مساوات 3.3 کی مدد لی گئی ہے۔

مثال 4.7: مساوات 4.83

$$\nabla\cdot(V\boldsymbol{D}) = V(\nabla\cdot\boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D}\cdot(\nabla V)$$

کو ثابت کریں۔

حل:مساوات 4.83 کا بائیں بازو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(V\boldsymbol{D}) &= \nabla\cdot(V[D_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + D_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}])\\
&= \nabla\cdot(VD_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + VD_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + VD_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\\
&= \frac{\partial(VD_x)}{\partial x} + \frac{\partial(VD_y)}{\partial y} + \frac{\partial(VD_z)}{\partial z}\\
&= \frac{\partial V}{\partial x}D_x + V\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}D_y + V\frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}D_z + V\frac{\partial D_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

ایک جیسے اجزاء کو اکٹھے کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial V}{\partial x}D_x + \frac{\partial V}{\partial y}D_y + \frac{\partial V}{\partial z}D_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب مساوات 4.83 کا دایاں بازو حل کرتے ہیں جہاں

$$V\nabla \cdot \boldsymbol{D} = V\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)$$

اور

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D} \cdot \nabla V &= (D_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + D_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + D_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right) \\
&= D_x\frac{\partial V}{\partial x} + D_y\frac{\partial V}{\partial y} + D_z\frac{\partial V}{\partial z}
\end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔انہیں جمع کرتے ہوئے مساوات 4.83 کا بایاں بازو ہی ملتا ہے۔یاد رہے کہ $D_x\frac{\partial V}{\partial x}$ کو $\frac{\partial V}{\partial x}D_x$ لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 4.8: صفحہ 78 پر مساوات 2.44 دو لامحدود چادروں کے درمیان برقی میدان دیتا ہے جہاں ایک چادر پر $+\rho_S$ اور دوسری چادر پر $-\rho_S$ سطحی کثافت بار پایا جاتا ہے۔اگر ان چادروں کے مابین فاصلہ a ہو تب چادروں پر آمنے سامنے S سطح لیتے ہوئے حجم aS میں کل مخفی توانائی حاصل کریں۔

حل:چادروں کے مابین $E = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}$ ہے جو اٹل مقدار ہے لہٰذا اسے مساوات 4.86 میں تکمل سے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\rho_S^2}{\epsilon_0^2}\int_h \mathrm{d}h = \frac{\rho_S^2 Sa}{2\epsilon_0} \tag{4.87}$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اسی نتیجے کو مساوات 4.82 کی مدد سے حاصل کریں۔ منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر $Ea = \frac{\rho_S a}{\epsilon_0}$ برقی دباو ہو گا۔ منفی چادر پر برقی دباو چونکہ صفر لیا گیا ہے لہٰذا مساوات 4.82 کا تکمل لیتے ہوئے منفی چادر پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔اسی طرح دونوں چادروں کے درمیان برقی بار نہیں پایا جاتا لہٰذا اس حجم پر بھی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ مثبت چادر پر سطحی کثافتِ بار کو حجمی کثافتِ بار میں یوں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔الٹ قطب کے باروں کے مابین قوت کشش پائی جاتی ہے لہٰذا چادروں پر آپس میں قریبی سطحوں پر بار پایا جائے گا۔یوں مثبت چادر کے S حصے پر بار $\rho_S S$ کو t موٹائی اور S رقبے کے حجم پر تقسیم کرتے ہوئے $\frac{\rho_S}{t}$ حجمی کثافتِ بار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں t نہایت کم موٹائی ہے یعنی $t \to 0$ ہے۔اس بار کو $(a - t/2)$ تا $(a + t/2)$ خطے میں تصور کرتے ہوئے یوں

$$W = \frac{1}{2} \int_S \int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_S}{t} \frac{\rho_S a}{\epsilon_0} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}S = \frac{\rho_S^2 S a}{2\epsilon_0} \tag{4.88}$$

ہی دوبارہ حاصل ہوتا ہے۔

اس باب میں ہم مخفی توانائی کی بات کرتے رہے لیکن کہیں پر بھی یہ ذکر نہیں کیا کہ مخفی توانائی آخر کہاں ذخیرہ ہوتی ہے۔اس کا جواب آج تک کوئی نہیں بتلا سکا ہے۔آئیں دیکھیں کہ یہ بتلانا اتنا مشکل کیوں ہے۔

مساوات 4.87 سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ مخفی توانائی دو چادروں کے درمیان برقی میدان میں ذخیرہ ہے البتہ مساوات 4.88 کے حصول کو دیکھتے ہوئے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ منفی چادر اور چادروں کے درمیان صفر توانائی پائی جاتی ہے جبکہ تمام کی تمام مخفی توانائی مثبت چادر پر ہے۔اسی طرح اگر ہم مثبت چادر کو برقی زمین تصور کریں تب منفی چادر پر برقی دباو $-Ea$ ہو گا اور مخفی توانائی منفی چادر میں نظر آئے گی۔ہم دو چادروں کے بالکل درمیانی نقطے کو برقی زمین لے سکتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے مثبت چادر پر $\frac{Ea}{2}$ اور منفی چادر پر $\frac{-Ea}{2}$ برقی دباو حاصل ہوتی ہے اور مخفی توانائی برابر دونوں چادروں میں نظر آئے گی۔ برقی زمین کو دو چادروں کے درمیان کسی بھی نقطے پر رکھا جا سکتا ہے اور ایسا کرنے سے مثبت اور منفی چادروں میں مخفی توانائی کی تقسیم کے جوابات تبدیل ہوتے رہیں گے۔اگرچہ ان تمام طریقوں سے کل مخفی توانائی کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے لیکن ان سے کسی صورت یہ معلوم نہیں کیا جا سکتا ہے کہ مخفی توانائی ذخیرہ کہاں ہوتی ہے۔ اس حقیقت کے ساتھ ہی زندگی بسر کرنا سیکھ لیں۔

سوالات

سوال 4.1: میدان $\boldsymbol{E} = 5\boldsymbol{a}_\rho - 3\boldsymbol{a}_\phi + 2\boldsymbol{a}_\text{z} \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ میں $1\,\mu\text{C}$ بار کو نقطہ $N(5, 45°, 4)$ سے نقطہ $M(5, 45°, 6)$ کی جانب نہایت کم فاصلہ $1\,\mu\text{m}$ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کریں۔اسی طرح $(5, 45.3°, 4)$ ، $(7, 45°, 4)$ اور $(10, 66°, 12)$ کی جانب منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی بھی حاصل کریں۔

جوابات: $-2\,\text{pJ}$ ، $3.013\,\text{pJ}$ ، $-2.753\,\text{pJ}$ ، $3.013\,\text{pJ}$

سوال 4.2: میدان $\boldsymbol{E} = 100\boldsymbol{a}_\text{x} - 250\boldsymbol{a}_\text{y} + 50\boldsymbol{a}_\text{z}) \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ دیا گیا ہے۔بار $25\,\text{C}$ کو نہایت کم فاصلہ $1\,\text{mm}$ نقطہ $(3, 4, 6)$ سے نقطہ $(5, 10, -2)$ کی سمت میں منتقل کرنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_\text{x}$ ، $\boldsymbol{a}_\text{y}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{x} + \boldsymbol{a}_\text{y} + 2\boldsymbol{a}_\text{z}$ سمت میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی بھی حاصل کریں۔

جوابات: $-0.2\,\text{J}$ ، $0.5\,\text{J}$ ، $0.115\,\text{J}$

سوال 4.3: میدان $\boldsymbol{E} = 0.2x(\sin 0.1z\boldsymbol{a}_\text{x} - 2\cos 0.15x\boldsymbol{a}_\text{y} + 0.02z\boldsymbol{a}_\text{z}) \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ دیا گیا ہے۔نقطہ $N(3, 2, 4)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔اس نقطے سے $(5, 6, -2)$ جانب $12\,\text{C}$ بار نہایت کم فاصلہ $2.5\,\mu\text{m}$ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: $0.177\boldsymbol{a}_\text{x} - 1.081\boldsymbol{a}_\text{y} + 0.048\boldsymbol{a}_\text{z}$ ، $17.06\,\mu\text{J}$

سوال 4.4: میدان $\boldsymbol{E} = (2x^3 + yz^2)\boldsymbol{a}_\text{x} - 3z^2\boldsymbol{a}_\text{y} + xy^2z\boldsymbol{a}_\text{z} \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ کا لکیری تکمل $\int \boldsymbol{E} \cdot \text{d}\boldsymbol{L}$ نقطہ $N(1, 2, 3)$ تا نقطہ $P(6, 1, 2)$ مندرجہ ذیل دو راستوں پر حاصل کریں۔(الف) پہلے x محدد کے متوازی چلیں، اس کے بعد y محدد کے متوازی چلیں اور آخر میں z محدد کے متوازی چلیں۔(ب) پہلے نقطہ سے بالکل سیدھا دوسرے نقطے کی طرف چلتے ہوئے تکمل حاصل کریں۔ایسی مساوات $z = y + 1$ اور مساوات $x = 11 - 5y$ پر بیک وقت چلتے ہوئے ممکن ہو گا۔

جوابات: 749.5 ، 698.9

سوال 4.5: میدان $\boldsymbol{E} = 2x\boldsymbol{a}_\text{x} - 3z\boldsymbol{a}_\text{y} + 2\boldsymbol{a}_\text{z} \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ میں $5\,\mu\text{C}$ کا بار نقطہ $(0, 2, -4)$ تا نقطہ $(2, 4, -12)$ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔(الف) باری باری x ، y اور z محدد کے متوازی چلیں۔(ب) ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک بہ راستہ $z = x^2 - y^2$ ، $y = x + 2$ چلیں۔

جوابات: $-60\,\mu\text{J}$ ، $-180\,\mu\text{J}$

سوال 4.6: برقی میدان $\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ میں $-0.1\,\text{C}$ کے بار کو نقطہ $(1,0,2)$ سے نقطہ $(0,0,2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0,1,2)$ لایا جاتا ہے۔دونوں راستوں کی علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: $0.2\,\text{J}$، $-0.2\,\text{J}$ اور $0\,\text{J}$

سوال 4.7: میدان $\boldsymbol{E} = 2x^2y\boldsymbol{a}_{\text{X}} + y^2\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ میں بار $-2.2\,\mu\text{C}$ کو نقطہ $N(2,1,1)$ سے $P(4,3,1)$ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کریں۔راستہ $6y = x^2+2$، $z=1$ اختیار کیا گیا ہے۔

جواب: $191.9\,\mu\text{J}$

سوال 4.8: محدد کے مبدا پر Q بار پایا جاتا ہے۔اس کے میدان میں بار q کو نقطہ N سے P منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں جہاں ان نقطوں کی تفصیل اور راستے کی تفصیل کچھ یوں ہے۔ الف) $N(r_1,\theta_1,\phi_1)$ تا $P(r_2,\theta_1,\phi_1)$ ایسے راستے پر جس پر θ اور ϕ تبدیل نہیں ہوتے۔ب) $N(r_1,\theta_1,\phi_1)$ تا $P(r_1,\theta_2,\phi_1)$ ایسے راستے پر جس پر r اور ϕ تبدیل نہیں ہوتے۔پ) $N(r_1,\theta_1,\phi_1)$ تا $P(r_1,\theta_1,\phi_2)$ ایسے راستے پر جس پر r اور θ تبدیل نہیں ہوتے۔

جوابات: $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$ ، 0 ، 0

سوال 4.9: محدد کے مبدا پر $r = 5\,\text{mm}$ رداس کے کرہ پر سطحی کثافت بار $25\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $A(0.015,30°,45°)$ پر مطلق برقی دباو V_A اور نقطہ $B(0.035,60°,15°)$ پر مطلق برقی دباو V_B حاصل کریں۔نقطہ A کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے برقی دباو V_{BA} حاصل کریں۔

جوابات: $4.706\,\text{V}$ ، $2.017\,\text{V}$ ، $-2.689\,\text{V}$

سوال 4.10: میدان $\boldsymbol{E} = 50z\sin\phi\boldsymbol{a}_\rho + 50z\cos\phi\boldsymbol{a}_\phi + 50\rho\sin\phi\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ میں محدد کے مبدا پر صفر وولٹ تصور کرتے ہوئے نقطہ $N(2,150°,3)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔ایسا کرتے ہوئے تکمل بہ راستہ $\rho = \frac{12\phi}{5\pi}$ ، $z = \frac{18\phi}{5\pi}$ حاصل کریں۔

جواب: $-150\,\mathrm{V}$

سوال 4.11: سطح $x=0$ پر سطحی کثافت بار $2\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ پائی جاتی ہے۔نقطہ $A(5,3,-6)$ کو صفر وولٹ لیتے ہوئے نقطہ $N(6,-2,9)$ پر برقی دباو V_{NA} حاصل کریں۔

جواب: $112.94\,\mathrm{V}$

سوال 4.12: کارتیسی y محدد پر لکیری کثافت بار $15\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $P(5,2,6)$ کو صفر وولٹ اور پر تصور کرتے ہوئے نقطہ $N(10,8,10)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔اگر نقطہ $P(5,2,6)$ پر $200\,\mathrm{V}$ وولٹ کا برقی دباو ہوتا تب نقطہ $N(10,8,10)$ پر برقی دباو کیا ہوتا؟

جواب: $-160\,\mathrm{V}$ ، $40\,\mathrm{V}$

سوال 4.13: کارتیسی z محدد پر $5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ اور x محدد پر $-2\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ لکیری کثافت بار پائے جاتے ہیں۔نقطہ $A(5,3,6)$ پر $50\,\mathrm{V}$ ہونے کی صورت میں نقطہ $N(8,-2,5)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔

جواب: $10.954\,\mathrm{V}$

سوال 4.14: سطح $z=0$ پر رداس a کی گول ٹکیا پر سطحی کثافت بار ρ_S پائی جاتی ہے۔نقطہ $(0,0,z)$ پر مطلق برقی دباو حاصل کریں۔

جواب: $\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}(\sqrt{z^2+a^2}-z)$

سوال 4.15: سطح $z=0$ پر رداس $a\le\rho\le b$ کی گول ٹکیا پر سطحی کثافت بار ρ_S پائی جاتی ہے۔نقطہ $(0,0,z)$ پر مطلق برقی دباو حاصل کریں۔

جواب: $\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}(\sqrt{z^2+b^2}-\sqrt{z^2+a^2})$

سوال 4.16: لکیری کثافت بار $15x\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ محدد x کے متوازی $0\le x\le 2$، $y=4$ ، $z=2$ پر پائی جاتی ہے۔محدد کے مبدا پر مطلق برقی دباو حاصل کریں۔

جواب: $57.54\,\mathrm{V}$

سوال 4.17: ہمیں برقی دباو $V(x,y,z) = 3x^2y^2 + 5xz^2 - 10\ln(x-y)\,\mathrm{V}$ معلوم ہے۔نقطہ $N(5,-3,8)$ پر V ، $\boldsymbol{E}$ ، $\boldsymbol{D}$ اور ρ_h کی قیمتیں حاصل کریں۔

جوابات: $2254\,\mathrm{V}$ ، $-589\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 449\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 400\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $-5.21\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3.97\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 3.54\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ ، $1.48\,\mathrm{nC/m^3}$

سوال 4.18: ہمیں $V(\rho,\phi,z) = 10\rho^2\sin\phi$ معلوم ہے۔ $\boldsymbol{E}$ اور ρ_h کے مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $-20\rho\sin\phi\boldsymbol{a}_\rho - 10\rho\cos\phi\boldsymbol{a}_\phi$ ، $-30\epsilon_0\sin\phi$

سوال 4.19: مکعب $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ ، $0 < z < 1$ میں $V(x,y,z) = x^3 + y^3 + 3z$ ہے۔اس مکعب میں کل بار حاصل کریں۔

جواب: $-53\,\mathrm{pC}$

سوال 4.20: سطح $2x^2 - 4y^3 + 2z = -100$ ہم قوہ سطح ہے جس پر برقی دباو $220\,\mathrm{V}$ ہے۔نقطہ $N(7,4,29)$ پر $|E| = 30\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہونے کی صورت میں اس نقطے پر $\boldsymbol{E}$ کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $4.3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 29.7\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.31\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 4.21: نقطہ $(0,0,-10)$ پر $\boldsymbol{p}_1 = 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{nC\,m}$ اور نقطہ $(0,0,5)$ پر $\boldsymbol{p}_2 = -25\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{nC\,m}$ جفت قطب پائے جاتے ہیں۔نقطہ $(0,0,-5)$ پر V اور $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $7.64\,\mathrm{V}$ ، $1.71\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 4.22: محدد کے مبدا پر $\boldsymbol{p} = 15\epsilon_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جفت قطب پایا جاتا ہے۔ان سطحوں کی مساوات حاصل کریں جن پر $E_z = 0$ کے برابر ہے۔صرف $\boldsymbol{E} \neq 0$ کی صورت پر غور کریں۔

جواب: $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ یعنی ایسی مخروط جس کا $\theta = 54.7°$ یا $\theta = 125.3°$ ہو۔

سوال 4.23: سیدھی لکیر پر تین یکساں بار Q پائے جاتے ہیں۔قریبی باروں کے درمیان فاصلہ d ہے۔اس نظام میں کل توانائی دریافت کریں۔اگر چار عدد بار اسی طرح رکھے جائیں تب توانائی کتنی ہو گی؟

جوابات: $\frac{5}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d}\,\mathrm{J}$ ، $\frac{13}{3}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d}\,\mathrm{J}$

سوال 4.24: مثال 4.8 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں مخفی توانائی حاصل کریں۔اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

جواب: $W = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$

سوال 4.25: خطہ $a \le r \le b$ میں $V = \frac{0.1}{r^2}\,\mathrm{V}$ برقی دباو پایا جاتا ہے جہاں $0 < a$ ، $0 < b$ ہیں۔اس خطے میں کل مخفی توانائی دریافت کریں۔

جواب: $\frac{0.08\pi\epsilon_0}{3}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)$

باب 5

موصل، ذو برق اور برق گیر

اس باب میں ہم برقی رو اور کثافت برقی رو سے شروع ہو کر بنیادی استمراری مساوات[1] حاصل کریں گے۔اس کے بعد اوہم کے قانون کی نقطہ شکل اور اس کی بڑی شکل حاصل کریں گے۔دو اجسام کے سرحد پر سرحدی شرائط[2] حاصل کرتے ہوئے عکس[3] کے طریقے کا استعمال دیکھیں گے۔

ذو برق[4] کی تقطیب[5] پر غور کرتے ہوئے جزو برقی مستقل حاصل کریں گے۔اس کے بعد برق گیر[6] (کپیسٹر) پر غور کیا جائے گا۔ گزشتہ ابواب میں حاصل کئے گئے نتیجوں کو استعمال کرتے ہوئے سادہ شکل و صورت رکھنے والے برق گیروں (کپیسٹر) کی قیمتیں حاصل کی جائیں گیں۔

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو

جیسے پانی کی حرکت کو پانی کا بہاو کہتے ہیں، اسی طرح برقی بار کی حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔برقی رو کو i اور I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔برقی رو کی اکائی ایمپیئر (A) ہے۔کسی نقطے یا سطح سے ایک کولمب بار فی سیکنڈ کے گزر کو ایک ایمپیئر

continuity equation[1]
boundary conditions[2]
images[3]
dielectric[4]
polarization[5]
capacitor[6]

کہتے ہیں۔یوں مساوات

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.1}$$

لکھی جائے گی۔

ایسی موصل تار جس کی ایک سرے سے دوسرے سرے تک موٹائی مسلسل کم ہوتی ہو کے بالکل محور پر برقی بار محوری سمت میں حرکت کرے گا جبکہ محور سے دور بار کی حرکت تار کی موٹائی کم یا زیادہ ہونے کی وجہ سے قدرِ ترچھی ہو گی۔یوں اگرچہ تار میں ہر مقام پر برقی رو کی مقدار برابر ہے لیکن برقی رو کی سمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔اسی بنا پر ہم برقی رو کو غیر سمتی تصور کریں گے۔اگر تار کی موٹائی انتہائی کم ہو تب برقی رو سمتیہ مانند ہو گی لیکن ایسی صورت میں بھی ہم اسے غیر سمتی ہی تصور کرتے ہوئے تار کی لمبائی کو سمتیہ لیں گے۔

کثافتِ برقی رو[7] سے مراد برقی رو فی اکائی مربع سطح $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right)$ ہے اور اسے J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اگر چھوٹی سطح ΔS سے عمودی سمت میں ΔI برقی رو گزرے تب

$$\Delta I = J_n \Delta S \tag{5.2}$$

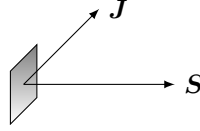
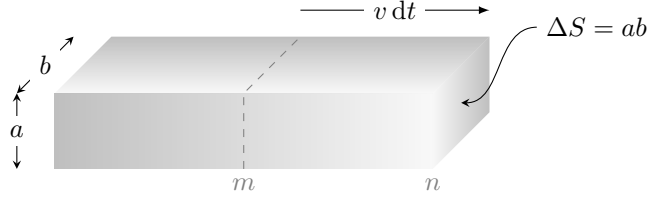
کے برابر ہو گا۔اگر کثافت برقی رو اور سمتی رقبہ کی سمتیں مختلف ہوں تب

$$\Delta I = \boldsymbol{J} \cdot \Delta \boldsymbol{S} \tag{5.3}$$

لکھا جائے گا اور پوری سطح سے کل گزرتی برقی رو تکمل کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.4}$$

مثال 5.1: شکل 5.1 میں سیدھی سطح $\boldsymbol{S} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ دکھائی گئی ہے جہاں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پائی جاتی ہے۔ سطح سے گزرتی برقی رو اور اس کی سمت دریافت کریں۔اگر سطح کی دوسری سمت کو سطح کی سمت لی جائے تب برقی رو کی مقدار اور اس کی سمت کیا ہوں گی۔

[7] current density

شکل 5.1: سطح سے گزرتی برقی رو۔

شکل 5.2: حرکت کرتے بار کی رفتار اور کثافت برقی رو۔

حل: چونکہ یہاں $\boldsymbol{J}$ مستقل مقدار ہے لہٰذا اسے مساوات 5.4 میں تکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے اور یوں اس تکمل سے

$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = 2\,\mathrm{A}$$

حاصل ہوتی ہے۔ برقی رو چونکہ مثبت ہے لہٰذا یہ سطح کی سمت میں ہی سطح سے گزر رہی ہے۔

اگر سطح کی دوسری طرف کو سطح کی سمت لی جائے تب $\boldsymbol{S} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ لکھا جائے گا اور یوں

$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = -2\,\mathrm{A}$$

حاصل ہو گی۔ برقی رو کی مقدار اب بھی دو ایمپیئر ہی ہے البتہ اس کی علامت منفی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ برقی رو سطح کے سمت کی الٹی سمت میں ہے۔ یوں اب بھی برقی رو بائیں سے دائیں ہی گزر رہی ہے۔

اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{S}$ کی سمت میں برقی رو کو مثبت برقی رو کہا جاتا ہے۔

شکل 5.2 میں a اور b اطراف کی تار میں لمبائی کی سمت میں v رفتار سے بار حرکت کر رہا ہے۔ شکل میں اس تار کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ یوں $\mathrm{d}t$ دورانیہ میں بار $v\,\mathrm{d}t$ فاصلہ طے کرے گا۔ اس طرح اس دورانیہ میں m پر لگائی گئی نقطہ دار لکیر n پہنچ جائے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیہ میں m اور n کے درمیان موجود بار سطح ΔS سے

گزر جائے گا۔ m سے n تک حجم $abv\,\mathrm{d}t$ کے برابر ہے۔ اگر تار میں بار کی حجمی کثافت ρ_h ہو تب اس حجم میں کل بار $\rho_h abv\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔ یوں برقی رو

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_h abv\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \rho_h \Delta S v$$

لکھتے ہوئے کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{\Delta S} = \rho_h v$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{5.5}$$

ہے۔ اس مساوات میں $\boldsymbol{J}$ **کثافت اتصالی رو**[8] کو ظاہر کرتی ہے۔

یہ مساوات کہتی ہے کہ حجمی کثافتِ بار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ اسی طرح بار کی رفتار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ یہ ایک عمومی نتیجہ ہے۔ یوں سڑک پر زیادہ لوگ گزارنے کا ایک طریقہ انہیں تیز چلنے پر مجبور کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ انہیں قریب قریب کر دیا جائے۔

5.2 استمراری مساوات

قانون بقائے برقی بار کہتا ہے کہ برقی بار کو نہ تو پیدا اور نا ہی اسے ختم کیا جا سکتا ہے، اگرچہ برابر مقدار میں مثبت اور منفی برقی بار کو ملا کی انہیں ختم کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح برابر مقدار میں انہیں پیدا بھی کیا جا سکتا ہے۔

یوں اگر ڈبے میں ایک جانب $5\,\mathrm{C}$ اور دوسری جانب $-3\,\mathrm{C}$ بار موجود ہو تو اس ڈبے میں کل $2\,\mathrm{C}$ بار ہے۔ اگر ہم $3\,\mathrm{C}$ کو $-3\,\mathrm{C}$ کے ساتھ ملا کر ختم کر دیں تب بھی ڈبے میں کل $2\,\mathrm{C}$ ہی بار رہے گا۔

[8] convection current density

مثال 5.2: ایک ڈبہ جس کا حجم $5\,\mathrm{m}^3$ ہے میں حجمی کثافت بار $3\,\mathrm{C/m}^3$ ہے۔اس ڈبے سے بار کی نکاسی ہو رہی ہے۔دو سیکنڈ میں حجمی کثافت بار $1\,\mathrm{C/m}^3$ رہ جاتی ہے۔ان دو سیکنڈوں میں ڈبے سے خارج برقی رو کا تخمینہ لگائیں۔

حل:شروع میں ڈبے میں $Q_1 = 3 \times 5 = 15\,\mathrm{C}$ بار ہے جبکہ دو سیکنڈ بعد اس میں $Q_1 = 1 \times 5 = 5\,\mathrm{C}$ رہ جاتا ہے۔یوں دو سیکنڈ میں ڈبے سے $10\,\mathrm{C}$ بار خارج ہوتا ہے۔اس طرح ڈبے سے خارج برقی رو $\frac{10}{2} = 5\,\mathrm{A}$ ہے۔اسی کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{(5-15)}{2} = 5\,\mathrm{A}$$

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ ڈبے میں ΔQ منفی ہونے کی صورت میں خارجی برقی رو کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔آئیں اس حقیقت کو بہتر شکل دیں۔

حجم کو مکمل طور پر گھیرتی سطح کو بند سطح کہتے ہیں۔کسی بھی مقام پر ایسی سطح کی سمت سطح کے عمودی باہر کو ہوتی ہے۔مساوات 5.4 کے تحت برقی رو کو کثافت برقی رو کے سطحی تکمل سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$I = \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.6}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں حجم کی سطح بند سطح ہونے کی بنا پر بند تکمل کی علامت استعمال کی گئی ہے اور Q حجم میں کل بار ہے۔

مساوات 5.6 استمراری مساوات[9] کی تکمل شکل ہے۔آئیں اب اس کی نقطہ شکل حاصل کریں۔

مسئلہ پھیلاو کو صفحہ 123 پر مساوات 3.43 میں بیان کیا گیا ہے۔مسئلہ پھیلاو کسی بھی سمتی تفاعل کے لئے درست ہے لہٰذا اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.6 میں بند سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h$$

[9] continuity equation

اگر حجم میں حجمی کثافت بار ρ_h ہو تب اس میں کل بار

$$Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h$$

ہو گا۔ان دو نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \,\mathrm{d}h = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h$$

لکھی جا سکتی ہے۔اس مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ دو متغیرات پر لاگو ہو گا۔یہ متغیرات تکمل کے اندر حجمی کثافتِ بار ρ_h اور حجم h ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ دو متغیرات کے تفرق کو جزوی تفرق کی شکل میں

$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} v + u \frac{\partial v}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں v کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial u}{\partial t}$ اور u کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial v}{\partial t}$ حاصل کیا جاتا ہے۔

اگر ہم یہ شرط لاگو کریں کہ حجم کی سطح تبدیل نہیں ہو گی تب حجم بھی تبدیل نہیں ہو گا اور یوں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ کو جزوی تفرق میں تبدیل کرتے ہوئے تکمل کے اندر لکھتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \,\mathrm{d}h = \int_h -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \,\mathrm{d}h$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات ہر ممکنہ حجم کے لئے درست ہے لہٰذا یہ نہایت چھوٹے حجم کے لئے بھی درست ہے۔نہایت چھوٹے حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے تکمل

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \,\mathrm{d}h = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \,\mathrm{d}h$$

ہی ہے جس سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \tag{5.7}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.7 استمراری مساوات کی نقطہ شکل ہے۔

پھیلاو کی تعریف کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.7 کہتی ہے کہ ہر نقطے پر چھوٹے سے حجم سے فی سیکنڈ بار کا اخراج، یعنی برقی رو، فی اکائی حجم مساوی ہے بار کے گھٹاو فی سیکنڈ فی اکائی حجم۔

5.3 موصل

بے بار موصل میں منفی الیکٹران اور مثبت ساکن ایٹوں کی تعداد برابر ہوتی ہے البتہ اس میں برقی رو آزاد الیکٹران کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔موصل میں الیکٹران آزادی سے بے ترتیب حرکت کرتا رہتا ہے۔یہ حرکت کرتا ہوا لمحہ بہ لمحہ ساکن ایٹم سے ٹکراتا ہے اور ہر ٹکر سے اس کی حرکت کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔یوں ایسے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر کے برابر ہوتی ہے۔آئیں دیکھیں کہ برقی میدان کی موجودگی میں کیا ہوتا ہے۔

برقی میدان $\boldsymbol{E}$ میں الیکٹران پر قوت

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E} \tag{5.8}$$

عمل کرے گی جہاں الیکٹران کا بار $-e$ ہے۔ الیکٹران کی رفتار اس قوت کی وجہ سے اسراع کے ساتھ قوت کی سمت میں بڑھنے شروع ہو جائے گی۔یوں بلا ترتیب رفتار کے ساتھ ساتھ قوت کی سمت میں الیکٹران رفتار پکڑے گا۔موصل میں پائے جانے والا الیکٹران جلد کسی ایٹم سے ٹکرا جاتا ہے اور یوں اس کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔جس لمحہ الیکٹران کسی ایٹم سے ٹکراتا ہے اگر لا گو میدان کو صفر کر دیا جائے تو الیکٹران دوبارہ بلا ترتیب حرکت کرتا رہے گا اور اس کی اوسط رفتار دوبارہ صفر ہی ہو گی، البتہ اس کی رفتار اب پہلے سے زیادہ ہو گی۔اگر الیکٹران ایٹم سے نہ ٹکراتا تب برقی میدان صفر کرنے کے بعد یہ برقرار قوت کی سمت میں حاصل کردہ رفتار سے حرکت کرتا رہتا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ٹکر سے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر ہو جاتی ہے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}$ کی موجودگی میں موصل میں الیکٹران کی رفتار مسلسل نہیں بڑھتی بلکہ یہ قوت کی سمت میں اوسط رفتار $\boldsymbol{v}_d$ حاصل کرتا ہے اور جیسے ہی میدان صفر کر دیا جائے الیکٹران کی اوسط رفتار بھی صفر ہو جاتی ہے۔$\boldsymbol{v}_d$ کو رفتار بہاو[10] کہتے ہیں۔رفتار بہاو کا دارومدار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت پر ہے لہٰذا ہم

$$\boldsymbol{v}_d = -\mu_e\boldsymbol{E} \tag{5.9}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات کے مستقل μ_e کو الیکٹران کی حرکت پذیری[11] کہتے ہیں۔حرکت پذیری کی مقدار مثبت ہے ۔چونکہ $\boldsymbol{v}_d$ کو میٹر فی سیکنڈ اور $\boldsymbol{E}$ کو وولٹ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے لہٰذا حرکت پذیری کو $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{V\,s}}$ میں ناپا جائے گا۔

مساوات 5.9 کو صفحہ 180 پر دئے مساوات 5.5 میں پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = -\rho_e\mu_e\boldsymbol{E} \tag{5.10}$$

---

[10] drift velocity
[11] mobility

حاصل ہوتی ہے جہاں موصل میں آزاد الیکٹران کی حجمی کثافتِ بار کو ρ_e لکھا گیا ہے۔ ρ_e منفی مقدار ہے۔یاد رہے کہ بے بار موصل میں حجمی کثافت بار صفر کے برابر ہے چونکہ اس میں منفی الیکٹران اور مثبت ایٹم کے بار برابر ہوتے ہیں۔اس مساوات کو عموماً

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{5.11}$$

لکھی جاتی ہے جو اوہم کے قانون کی نقطہ شکل ہے اور جہاں

$$\sigma = -\rho_e \mu_e \tag{5.12}$$

لکھا گیا ہے۔مساوات 5.11 میں $\boldsymbol{J}$ کو **کثافتِ ایصالی برقی رو** یا[12] ہے جبکہ σ کو **موصلیت کا مستقل**[13] کہتے ہیں اور اس کی اکائی[14] سیمنز فی میٹر $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے۔سیمنز کو بڑے S سے جبکہ سیکنڈ کو چھوٹے s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ آپ ان میں غلطی نہیں کریں گے۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 829 پر دیے ضمیمے میں کئی موصل اور غیر موصل اشیاء کی موصلیت پیش کی گئی ہیں۔

مثال 5.3: تانبے[15] کی موصلیت کے مستقل کی قیمت $5.8 \times 10^7 \, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے جبکہ اس کی کمیتی کثافت $8940 \, \mathrm{kg/m^3}$ اور ایٹمی کمیت $63.5 \, \mathrm{g}$ ہیں۔اگر ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہو تب تانبے میں الیکٹران کی حرکت پذیری حاصل کریں۔برقی میدان $E = 0.1 \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں الیکٹران کا رفتار بہاو حاصل کریں۔

حل: ایٹمی کمیت 6.023×10^{23} یعنی ایک مول[16] ایٹم کی کمیت کو کہتے ہیں۔چونکہ ایک مربع میٹر میں $8940 \, \mathrm{kg}$ ہیں لہٰذا ایک مربع میٹر میں

$$\frac{8940 \times 6.023 \times 10^{23}}{0.0635} = 8.48 \times 10^{28}$$

ایٹم پائیں جائیں گے۔ہر ایٹم ایک الیکٹران آزاد کرتا ہے لہٰذا $0.1 \, \mathrm{nm}$ اطراف کے مربع میں اوسطاً 0.848 یعنی تقریباً ایک عدد آزاد الیکٹران پایا جائے گا۔ اس طرح ایک مربع میٹر میں کل آزاد الیکٹران بار یعنی حجمی آزاد کثافتِ بار

$$\rho_e = -1.6 \times 10^{-19} \times 8.48 \times 10^{28} = -1.36 \times 10^{10} \, \mathrm{C/m^3} \tag{5.13}$$

---

[12] conduction current density
[13] conductivity
[14] یہ اکائی جرمنی کے جناب ارنسٹ ورنر وان سیمنز (1816-1892) کے نام ہے جنہوں نے موجودہ سیمنز ادارے کی بنیاد رکھی۔
[15] copper
[16] mole

ہو گی۔ایک مربع میٹر میں یوں انتہائی زیادہ آزاد بار پایا جاتا ہے۔ اس طرح مساوات 5.12 کی مدد سے

$$\mu_e = -\frac{\sigma}{\rho_e} = \frac{5.8 \times 10^7}{-1.36 \times 10^{10}} = 0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$$

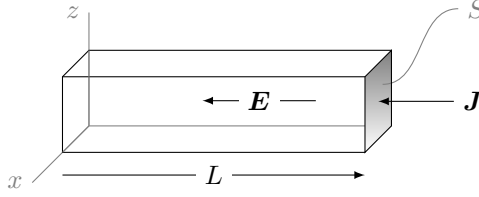
حاصل ہوتی ہے جہاں $0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2\,S}}{\mathrm{C}}$ کو $0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ لکھا گیا ہے۔آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ یہ برابر مقدار ہیں۔اب مساوات 5.9 استعمال کرتے ہوئے الیکٹران کی رفتار بہاو

$$v_d = -0.00427 \times 0.1 = -0.000\,427\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ منفی رفتار کا مطلب ہے کہ الیکٹران $\boldsymbol{E}$ کے الٹ سمت حرکت کر رہا ہے۔اس رفتار[17] سے الیکٹران ایک کلو میٹر کا فاصلہ ستائیس دن و رات چل کر طے کرے گا۔ یہاں یہ بتلاتا چلوں کہ عام درجہ حرارت مثلاً $300\,\mathrm{K}$ پر تانبے میں حرارتی توانائی سے حرکت کرتے الیکٹران کی رفتار تقریباً $1000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ ہوتی ہے۔

یوں موصل میں آزاد الیکٹرانوں کو نئی جگہ منتقل ہوتے شہد کے مکھیوں کا جھنڈ سمجھا جا سکتا ہے۔ایسے جھنڈ میں کوئی ایک مکھی نہایت تیز رفتار سے آگے پیچھے اڑتی ہے جبکہ پورا جھنڈ نسبتاً آہستہ رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہے۔موصل میں بھی کوئی ایک الیکٹران نہایت تیز رفتار سے ایٹموں سے ٹکراتا ہوا حرارتی توانائی کی وجہ سے نہایت تیزی سے اِدھر اُدھر حرکت کرتا ہے جبکہ بیرونی لاگو میدان کی وجہ سے ایسے تمام الیکٹران نہایت آہستہ رفتار سے میدان کی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

اگر موصل میں آزاد الیکٹران اتنے کم رفتار سے بیرونی لاگو میدان کی سمت میں صفر کرتے ہیں تب بجلی چالو کرتے ہی بلب کس طرح روشن ہوتا ہے۔اس کو سمجھنے کی خاطر برقی تار کو پانی بھرے ایک لمبے پائپ مانند سمجھیں۔ایسے پائپ میں جیسے ہی ایک جانب سے مزید پانی داخل کیا جائے، اسی وقت پائپ کے دوسرے سرے سے برابر پانی خارج ہو گا۔امید ہے سمجھ آ گئی ہو گی۔

مندرجہ بالا مثال میں بتلایا گیا کہ تانبے کا ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہے۔اس حقیقت کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ تانبے کا ایٹمی عدد 29 ہے۔ایٹم کے کسی بھی مدار میں $2n^2$ الیکٹران ہو سکتے ہیں جہاں پہلے مدار کے لئے $n=1$، دوسرے مدار کے لئے $n=2$ وغیرہ لیا جاتا ہے۔یوں اس کے پہلے مدار میں 2، دوسرے مدار میں 8، تیسرے مدار

شکل 5.3: اوہم کے قانون کی بڑی شکل۔

میں 18 اور آخری مدار[18] میں 1 الیکٹران ہو گا۔ایٹم آخری مدار میں واحد الیکٹران کو آزاد کرتا ہے۔آئیں اب بڑی شکل میں اوہم کا قانون حاصل کریں۔

شکل 5.3 میں موصل سلاخ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L اور رقبہ عمودی تراش S ہیں۔سلاخ کو $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ سمت میں لیٹا تصور کریں۔سلاخ میں لمبائی کی سمت میں مستقل اور یکساں برقی میدان $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = -J\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ پائے جاتے ہیں۔یوں اگر سلاخ کا بایاں سرا برقی زمین تصور کیا جائے تب اس کے دائیں سرے پر برقی دباو کو صفحہ 140 پر دئے مساوات 4.11 سے یوں

$$V = -\int_0^L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^L E\boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\text{y}} = \int_0^L E \,\mathrm{d}y = E\int_0^L \mathrm{d}y = EL$$

حاصل کرتے ہیں۔رقبہ عمودی تراش کو شکل میں گہرے رنگ سے اجاگر کیا گیا ہے۔سمتی رقبہ عمودی تراش بند سطح نہیں ہے لہٰذا اس کے دو ممکنہ رخ ہیں۔سلاخ کے دائیں سرے سے داخل برقی رو حاصل کرنے کی غرض سے رقبہ عمودی تراش کو $\boldsymbol{S} = -S\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ لکھتے ہیں۔یوں دائیں سرے سے داخل برقی رو کی مقدار مثبت ہو گی۔برقی رو

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = JS$$

حاصل ہوتی ہے۔ان معلومات کو شکل 5.11 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{I}{S} = \sigma\frac{V}{L}$$

یا

$$V = I\frac{L}{\sigma S}$$

[17] کھودا پہاڑ، نکلا چوہا۔آزاد الیکٹران تو کچھوے سے بھی آہستہ چلتا ہے۔

[18] چوتھے مدار میں 32 الیکٹران ممکن ہیں لیکن تانبے کے ایٹم میں اس مدار کے لئے صرف ایک عدد الیکٹران بچتا ہے۔

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$R=\frac{L}{\sigma S} \tag{5.14}$$

کو مزاحمت لکھتے ہوئے

$$V=IR \tag{5.15}$$

حاصل ہوتا ہے جو اوہم کے قانون کی جانی پہچانی شکل ہے۔

مساوات 5.14 یکساں رقبہ عمودی تراش رکھنے والے موصل سلاخ کی مزاحمت[19] دیتا ہے جہاں مزاحمت کی اکائی اوہم[20] ہے جسے Ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یکساں رقبہ عمودی تراش کی سلاخ میں برقی میدان یکساں ہوتا ہے۔اگر سلاخ کا رقبہ عمودی تراش یکساں نہ ہو تب اس میں برقی میدان بھی یکساں نہ ہو گا اور ایسی صورت میں مساوات 5.14 استعمال نہیں کیا جا سکتا البتہ ایسی صورت میں بھی مزاحمت کو مساوات 5.15 کی مدد سے برقی دباو فی اکائی برقی رو سے بیان کیا جاتا ہے۔یوں مساوات 4.11 اور مساوات 5.4 استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے b سے a سرے تک مزاحمت

$$R=\frac{V}{I}=\frac{-\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}=\frac{-\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int_S \sigma\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}} \tag{5.16}$$

سے حاصل ہو گی جہاں برقی رو سلاخ کے مثبت برقی دباو والے سرے سے سلاخ میں داخل ہوتے برقی رو کو کہتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات میں سطحی تکمل سلاخ کے مثبت سرے پر حاصل کی جائے گی جہاں سطح عمودی تراش کی سمت سلاخ کی جانب لی جائے گی۔

مثال 5.4: تانبے کی ایک کلو میٹر لمبی اور تین ملی میٹر رداس کے تار کی مزاحمت حاصل کریں۔

حل: یہاں $L=1000\,\mathrm{m}$ جبکہ $S=\pi r^2=2.83\times10^{-7}\,\mathrm{m^2}$ اور $\sigma=5.8\times10^{7}$ ہے لہٰذا

$$R=\frac{1000}{5.8\times10^{7}\times2.83\times10^{-7}}=0.61\,\Omega$$

---

[19] resistance
[20] ohm

حاصل ہوتا ہے۔

مشق 5.1: المونیم میں کثافت برقی رو مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔(الف) برقی میدان کی شدت $50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ (ب) آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$ ہے۔ (پ) ایک ملی میٹر موٹی تار جس میں $2\,\mathrm{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔

جوابات: $1.91\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$، $3.82\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$ اور $2.55\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ موصل کے اندر داخل کیا گیا بار جلدی موصل کی سطح پر پہنچ کر سطحی کثافتِ بار پیدا کرتا ہے۔یہ جانتے ہوئے کہ حقیقت میں موصل کے اندر بار کا پیدا ہونا یا وہاں بار داخل کرنا معمول کی بات ہرگز نہیں ہے، ہم ایسے داخل کئے گئے بار کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔

اوہم کے قانون

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

اور استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

دونوں میں صرف آزاد بار کی بات کی جاتی ہے۔ان مساوات سے

$$\nabla \cdot \sigma \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \boldsymbol{D} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھی جا سکتی ہے۔اگر موصل میں σ اور ϵ کی قیمتیں اٹل ہوں تب یہ مساوات یوں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھی جا سکتی ہے۔صفحہ 116 پر مساوات 3.33 جو میکس ویل کی پہلی مساوات ہے کی مدد سے یوں

$$\rho_h = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.12 کہتی ہے کہ موصلیت کی قیمت آزاد الیکٹران کی حجمی کثافتِ بار ρ_e اور الیکٹران کی حرکت پذیری پر منحصر ہے۔مساوات 5.13 تانبے میں $\rho_e = -1.36 \times 10^{10}\,\mathrm{C/m^3}$ دیتا ہے جو انتہائی بڑی مقدار ہے۔اتنے بار میں بیرونی داخل بار نمک برابر بھی حیثیت نہیں رکھتا لہٰذا σ کی قیمت کو اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو نئی شکل

$$\frac{\partial \rho_h}{\rho_h} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \partial t$$

میں لکھتے ہوئے، اس کا تکمل

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں وقت $t = 0$ پر داخل کئے گئے بار کا حجمی کثافتِ بار ρ_0 ہے۔اس مساوات کے تحت حجمی کثافتِ بار $\frac{\sigma}{\epsilon}$ **وقتی مستقل**[21] رکھتا ہے۔تقطیر شدہ پانی کا وقتی مستقل صفحہ 829 پر دیے ضمیمے کی مدد سے

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80}{36\pi \times 10^9 \times 10^{-4}} = 7.07\,\mathrm{\mu s}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگرچہ تقطیر شدہ پانی انتہائی کم موصل ہے لیکن اس میں بھی کثافت بار صرف سات مائیکرو سیکنڈ میں ابتدائی قیمت کے صرف 37 فی صد رہ جاتا ہے۔یوں کسی بھی موصل کے اندر انتہائی کم دورانیے کے لئے اضافی بار پایا جا سکتا ہے۔اس لمحاتی کثافتِ بار کے علاوہ اندرون موصل کو بار سے پاک تصور کیا جا سکتا ہے۔

ذو برق میں مختلف وجوہات کی بنا پر لگاتار آزاد بار پیدا ہوتے رہتے ہیں جس کی بنا پر ذو برق صفر سے زیادہ موصلیت رکھتے ہوئے برقی رو گزارتا ہے۔ذو برق کے اندر بار بھی آخر کار سطح پر پہنچ جاتا ہے۔

---

[21] time constant

5.4 موصل کی خصوصیات اور سرحدی شرائط

بے بار موصل میں کل آزاد الیکٹران اور مثبت ایٹم برابر تعداد میں پائے جاتے ہیں۔یوں اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔فرض کریں کہ بے بار موصل کے اندر کسی طرح چند الیکٹران نمودار ہو جاتے ہیں۔یہ الیکٹران برقی میدان $\boldsymbol{E}$ پیدا کریں گے جس کی وجہ سے موصل میں آزاد الیکٹران موصل کی سطح کی جانب چل پڑیں گے۔ سطح کے باہر غیر موصل خلاء پائی جاتی ہے جس میں الیکٹران حرکت نہیں کر سکتے لہٰذا الیکٹران موصل کی سطح پر پہنچ کر رک جائیں گے۔موصل میں نمودار ہونے والے الیکٹران کی برابر تعداد میں الیکٹران موصل کی سطح پر منتقل ہوں گے جس کے بعد موصل میں دوبارہ منفی الیکٹران اور مثبت ایٹموں کی تعداد برابر ہو جائے گی اور یہ بے بار صورت اختیار کر لے گا۔

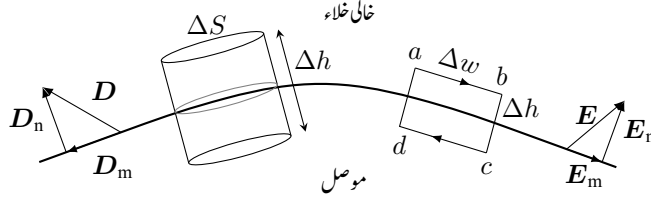
آپ نے دیکھا کہ اضافی بار موصل میں زیادہ دیر نہیں رہ سکتا اور یہ جلد سطح پر منتقل ہو جاتا ہے۔یوں اضافی بار موصل کی سطح پر بیرونی جانب چمٹا رہتا ہے۔یہ موصل کی پہلی اہم خاصیت ہے۔

موصل کی دوسری خاصیت **برقی سکون**[22] کی حالت کے لئے بیان کرتے ہیں۔برقی سکون سے مراد ایسی صورت ہے جب بار حرکت نہ کر رہا ہو یعنی جب برقی رو صفر کے برابر ہو۔برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر ساکن برقی میدان صفر رہتا ہے۔اگر ایسا نہ ہوتا تو میدان کی وجہ سے اس میں آزاد الیکٹران حرکت کر کے برقی رو کو جنم دیتے جو غیر ساکن حالت ہے۔

یوں برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر اضافی بار اور برقی میدان دونوں صفر کے برابر ہوتے ہیں البتہ اس کی سطح پر بیرونی جانب بار پایا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ سطح پر پائے جانے والا بار موصل کے باہر کس قسم کا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔

موصل کی سطح پر بار، موصل کے باہر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ سطح پر کسی بھی نقطے پر ایسے میدان کو دو اجزاء کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔پہلا جزو سطح کے مماسی اور دوسرا جزو سطح کے عمودی رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مماسی جزو صفر ہو گا۔اگر ایسا نہ ہو تو اس میدان کی وجہ سے سطح پر پائے جانے والے آزاد الیکٹران حرکت میں آئیں گے جو غیر ساکن حالت ہو گی۔یوں ہم

$$E_{\text{مماسی}} = 0 \tag{5.17}$$

[22] electrostatic

شکل 5.4: موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی شرائط۔

لکھ سکتے ہیں۔ سطح پر عمودی برقی میدان گاوس کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے کل برقی بہاو کا اخراج، سطح میں گھیرے بار کے برابر ہوتا ہے۔چونکہ سطح پر مماسی برقی میدان صفر ہے اور موصل کے اندر بھی برقی میدان صفر ہے لہٰذا سطح پر بار سے برقی بہاو کا اخراج صرف عمودی سمت میں ہو سکتا ہے۔یوں ΔS سطح سے عمودی اخراج $D\Delta S$ اسی سطح پر چار $\rho_S \Delta S$ کے برابر ہو گا جس سے

$$D_{\text{عمودی}} = \rho_S \tag{5.18}$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اسی بحث کو بہتر جامہ پہنائیں۔ایسا کرتے ہوئے ہم ایک عمومی ترکیب سیکھ لیں گے جو مختلف اقسام کی اشیاء کی سرحد پر میدان کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 5.4 میں موصل اور خلاء کے درمیان سرحد موٹی لکیر سے دکھائی گئی ہے۔اس سرحد پر خلاء میں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ دکھائے گئے ہیں۔خلاء میں $\boldsymbol{E}$ کو $\boldsymbol{E}_m$ اور $\boldsymbol{E}_n$ کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جو بالترتیب سرحد کے مماسی اور عمودی اجزاء ہیں۔اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کو بھی مماسی اور عمودی اجزاء کے مجموعہ کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ہم صرف اس حقیقت کو لے کر آگے بڑھتے ہیں کہ موصل کے اندر $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ دونوں صفر کے برابر ہیں۔آئیں اس حقیقت کی بنا پر خلاء میں $\boldsymbol{E}$ کی قیمت حاصل کریں۔ہم $\boldsymbol{E}$ کے مجموعے $\boldsymbol{E}_m$ اور $\boldsymbol{E}_n$ حاصل کریں گے۔پہلے $\boldsymbol{E}_m$ حاصل کرتے ہیں۔

سرحد پر $abcd$ مستطیل بنایا گیا ہے جہاں ab اور cd سرحد کے مماسی جبکہ bc اور da سرحد کے عمودی ہیں۔ab خلاء میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر جبکہ cd موصل میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہیں۔ab اور cd کی لمبائیاں Δw ہیں جبکہ bc اور da کی لمبائیاں Δh ہے۔صفحہ 148 پر دئے مساوات 4.28

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

کو $abcd$ پر لاگو کرتے ہیں۔اس تکمل کو چار ٹکڑوں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_b^c \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_c^d \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_d^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

اب a سے b تک

$$\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w$$

حاصل ہوتا ہے۔ خلاء میں نقطہ b پر عمودی میدان کو $E_{n,b}$ لکھتے ہوئے b سے c تک

$$\int_b^c \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -E_{n,b}\frac{\Delta h}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ bc کی آدھی لمبائی موصل کے اندر ہے جہاں $\boldsymbol{E}=0$ ہے۔ c سے d تک تکمل صفر کے برابر ہے چونکہ یہ راستہ موصل کے اندر ہے جہاں $\boldsymbol{E}=0$ ہے۔

$$\int_c^d \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

خلاء میں نقطہ a پر عمودی میدان کو $E_{n,a}$ لکھتے ہوئے d سے a تک

$$\int_d^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_{n,a}\frac{\Delta h}{2}$$

ان چار نتائج سے

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w + \left(E_{n,a}-E_{n,b}\right)\frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ سرحد کے قریب میدان حاصل کرنے کی خاطر ہمیں سرحد کے قریب تر ہونا ہو گا یعنی Δh کو تقریباً صفر کے برابر کرنا ہو گا۔ ایسا کرنے سے $\left(E_{n,a}-E_{n,b}\right)\frac{\Delta h}{2}$ کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ ہم Δw کو اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ اس کی پوری لمبائی پر میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسا کرتے ہوئے اس مساوات سے

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w = 0$$

یعنی

$$E_m = 0 \tag{5.19}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب E_n حاصل کریں۔ E_n کی بجائے گاوس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

کی مدد سے D_n کا حصول زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہٰذا ہم اسی کو حاصل کرتے ہیں۔

شکل 5.4 میں موصل اور خلاء کی سرحد پر Δh لمبائی کا بیلن دکھایا گیا ہے۔اس بیلن کے ڈھکنوں کا رقبہ ΔS ہے۔اگر سرحد پر ρ_S پایا جائے تب بیلن $\rho_S \Delta S$ بار کو گھیرے گا۔گاوس کے قانون کے تحت بیلن سے اسی مقدار کے برابر برقی بہاو کا اخراج ہو گا۔برقی بہاو کا اخراج بیلن کے دونوں سروں اور اس کے نلکی نما سطح سے ممکن ہے۔یوں

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{نچلا ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{بالائی ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \rho_S \Delta S$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب بیلن کی نچلی سطح موصل کے اندر ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نچلا ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔مساوات 5.19 کے تحت سرحد پر خلاء میں مماسی میدان صفر ہوتا ہے۔موصل میں بھی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔بیلن کے بالائی سرے پر

$$\int_{\text{بالائی ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_n \Delta S$$

ہو گا۔ان تین نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_n \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_n = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ $D = \epsilon_0 E$ ہوتا ہے لہٰذا یوں

$$D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S \tag{5.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.19 اور مساوات 5.20 موصل اور خلاء کی سرحد پر برقی میدان کے شرائط بیان کرتے ہیں۔موصل اور خلاء کی سرحد پر برقی میدان موصل سے عمودی خارج ہوتا ہے جبکہ اس کی سرحد کے مماسی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔نتیجتاً موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے۔یوں موصل کی سطح پر دو نقطوں کے مابین کسی بھی راستے پر برقی میدان کا تکمل صفر کے برابر ہو گا یعنی $\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$ ہو گا۔یاد رہے کہ برقی میدان کا تکمل برقی دباو دیتا ہے جو تکمل کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہٰذا اس راستے کو موصل کی سطح پر ہی رکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}_{\text{مماسی}} = 0$ ہونے کی وجہ سے تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

مشق 5.2: نقطہ $N(2, -3, 5)$ موصل کی سطح پر پایا جاتا ہے جہاں $\boldsymbol{E} = 210\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 350\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 99\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کے برابر ہے۔اس نقطے پر E_m، E_n اور ρ_S حاصل کریں۔

جوابات: 0، $420 \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $3.71 \,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$

5.5 عکس کی ترکیب

جفت قطب کے خطوط صفحہ 162 پر شکل 4.10 میں دکھائے گئے ہیں جہاں دونوں باروں سے برابر فاصلے پر لامحدود برقی زمینی سطح دکھائی گئی ہے۔برقی زمین پر انتہائی باریک موٹائی کی لامحدود موصل سطح رکھی جا سکتی ہے۔ایسی موصل سطح پر برقی دباو صفر وولٹ ہو گا اور اس پر میدان عمودی ہو گا۔موصل کے اندر برقی میدان صفر رہتا ہے اور اس سے برقی میدان گزر نہیں پاتا۔

اگر اس موصل سطح کے نیچے سے جفت قطب کا منفی بار ہٹا دیا جائے تب بھی سطح کے بالائی جانب میدان عمودی ہی ہو گا۔یاد رہے برقی زمین صفر وولٹ پر ہوتی ہے۔موصل سطح سے اوپر میدان جوں کا توں رہے گا جبکہ اس سے نیچے میدان صفر ہو جائے گا۔اسی طرح سطح سے اوپر جفت قطب کا مثبت بار ہٹانے سے سطح کے نچلے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ سطح سے اوپر میدان صفر ہو جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو دوسری نقطہ نظر سے دیکھیں۔فرض کریں کہ لامحدود موصل سطح یا برقی زمین سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پر اوپر مثبت نقطہ بار $+Q$ پایا جاتا ہے۔چونکہ ایسی صورت میں سطح سے اوپر برقی میدان بالکل جفت قطب کے میدان کی طرح ہو گا لہٰذا ہم $\frac{d}{2}$ فاصلے پر برقی زمین سے نیچے عین مثبت بار کے نیچے منفی بار $-Q$ رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹا سکتے ہیں۔اوپر کی جانب کے میدان پر ان اقدام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔یوں جفت قطب کے تمام مساوات بروئے کار لاتے ہوئے زمین کے اوپر جانب کا میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔یاد رہے کہ سطح کے نیچے برقی زمین کو صفر ہی تصور کیا جائے گا۔اگر برقی زمین کی سطح کو آئینہ تصور کیا جائے تب مثبت بار کا عکس اس آئینہ میں اسی مقام پر نظر آئے گا جہاں ہم نے تصوراتی منفی بار رکھا۔یوں اس منفی بار کو حقیقی بار کا **عکس**[23] کہتے ہیں۔

ایسی ہی ترکیب لامحدود زمینی سطح کی ایک جانب منفی بار سے پیدا میدان حاصل کرنے کی خاطر بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں زمین کی دوسری جانب عین منفی بار کے سامنے، اتنے ہی فاصلے پر برابر مقدار مگر مثبت بار رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹایا جا سکتا ہے۔

کسی بھی بار کو نقطہ باروں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔لہٰذا لامحدود برقی زمین یا لامحدود موصل سطح کی ایک جانب کسی بھی شکل کے باروں کا میدان، سطح کی دوسری جانب باروں کا عکس رکھتے اور زمین کو ہٹاتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس ترکیب کو **عکس کی ترکیب** کہتے ہیں۔یاد رہے کہ کسی بھی لامحدود موصل سطح جس کے ایک جانب بار پایا جاتا ہو پر سطحی بار پایا جائے گا۔عموماً مسئلے میں لامحدود سطح اور سطح کے باہر بار معلوم ہوں گے۔ایسے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر سطح پر سطحی باروں کا علم بھی ضروری ہوتا ہے۔سطحی بار دریافت کرنا نسبتاً مشکل کام ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا عقلمندی ہو گی۔عکس کی ترکیب میں سطحی بار کا جاننا ضروری نہیں لہٰذا اس ترکیب سے مسئلہ کو حل کرنا عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

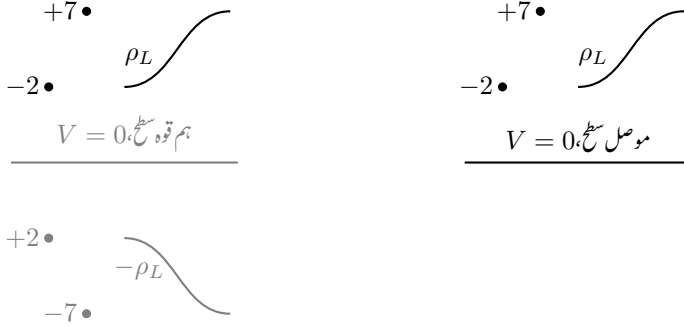
شکل 5.5 میں لامحدود موصل سطح سے اوپر مختلف اقسام کے بار دکھائے گئے ہیں۔اسی شکل میں مسئلے کو عکس کے ترکیب کی نقطہ نظر سے بھی دکھایا گیا ہے۔موصل سطح کے مقام پر دونوں صورتوں میں صفر وولٹ ہی رہتے ہیں۔

مثال 5.5: لامحدود موصل سطح $z = 3$ کے قریب $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\text{C}$ بار پایا جاتا ہے۔موصل کی سطح پر نقطہ $M(2,4,3)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے اسی مقام پر موصل کی سطحی کثافت بار حاصل کریں۔

[23] image

$+7\bullet$ ρ_L $-2\bullet$ $V=0$، موصل سطح

$+7\bullet$ ρ_L $-2\bullet$ $V=0$، ہم قوہ سطح

$+2\bullet$ $-\rho_L$ $-7\bullet$

شکل 5.5: عکس کی ترکیب۔

حل: 5 µC کا عکس −5 µC لامحدود سطح کے دوسری جانب نقطہ $P(5,7,-2)$ پر رکھتے ہوئے موصل سطح ہٹاتے ہیں۔اب N سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MN}$ اور P سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MP}$

$$\boldsymbol{R}_{MN} = -3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\text{z}}$$
$$\boldsymbol{R}_{MP} = -3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{z}}$$

ہیں۔یوں 5 µC نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_{+} = \frac{5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\text{z}})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\text{z}})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

پیدا کرے گا۔اسی طرح −5 µC بار نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_{-} = \frac{-5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{z}})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{z}})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کرے گا۔چونکہ برقی میدان خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی نقطے پر مختلف باروں کے پیدا کردہ میدان جمع کرتے ہوئے کل میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں نقطہ M پر کل میدان

$$\boldsymbol{E}_{\text{کل}} = \boldsymbol{E}_{+} + \boldsymbol{E}_{-} = \frac{-50\times10^{-6}\boldsymbol{a}_{\text{z}}}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔موصل کی سطح پر میدان عمودی ہوتا ہے۔موجودہ جواب اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔یوں موصل کی سطح پر

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} = \frac{-50\times10^{-6}\boldsymbol{a}_{\text{z}}}{4\pi(43)^{\frac{3}{2}}} = -14.13\times10^{-9}\boldsymbol{a}_{\text{z}}$$

حاصل ہوتا ہے جو سطح میں داخل ہونے کی سمت میں ہے۔یوں مساوات 5.20 کے تحت سطح پر

$$\rho_S = -14.3 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

پایا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں اگر $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\text{C}$ پایا جاتا اور لامحدود سطح موجود نہ ہوتا تب $M(2,4,3)$ پر میدان $\boldsymbol{E}_+$ ہوتا۔لامحدود موصل سطح کی موجودگی میں یہ قیمت تبدیل ہو کر مثال میں حاصل کی گئی $\boldsymbol{E}_{\text{کل}}$ ہو جاتی ہے۔درحقیقت سطح کے قریب بار کی وجہ سے سطح پر سطحی کثافتِ بار پیدا ہو جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر بیرونی بار اور سطحی بار دونوں کے میدان کا مجموعہ حقیقی میدان ہوتا ہے۔

مثال 5.6: لامحدود موصل سطح $z = 0$ میں $(0,0,z)$ پر Q نقطہ بار سے پیدا کثافت سطحی بار حاصل کریں۔

حل:اس مسئلے کو عکس کی ترکیب سے حل کرنے کی خاطر $(0,0,-z)$ پر $-Q$ بار رکھتے ہوئے موصل سطح کو ہٹا کر حل کرتے ہیں۔ایسی صورت میں سطح کے مقام پر عمومی نقطہ $(\rho,\phi,0)$ پر Q اور $-Q$ بار

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{Q(\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\text{Z})}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

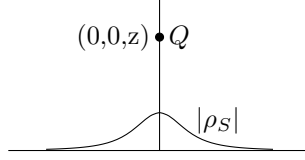
$$\boldsymbol{E}_- = \frac{-Q(\rho \boldsymbol{a}_\rho + z\boldsymbol{a}_\text{Z})}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کریں گے۔$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ استعمال کرتے ہوئے کل

$$\boldsymbol{D} = \frac{-2Qz\boldsymbol{a}_\text{Z}}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $-\boldsymbol{a}_\text{Z}$ ہے جو موصل میں اوپر سے داخل ہونے کی سمت ہے۔یوں موصل سطح پر

$$\rho_S = \frac{-2Qz}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \tag{5.21}$$

$(0,0,z)$ Q $|\rho_S|$

شکل 5.6: نقطہ بار سے لا محدود موصل سطح میں پیدا سطحی کثافت بار۔

پایا جائے گا۔ شکل 5.6 میں بار Q اور موصل سطح پر ρ_S دکھائے گئے ہیں۔

مساوات 5.21 کو استعمال کرتے ہوئے لا محدود موصل سطح پر کل بار حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یقینی طور پر اس کی مقدار $-Q$ ہی حاصل ہو گی۔

5.6 نیم موصل

نیم موصل اشیاء مثلاً خالص سلیکان اور جرمینیم میں آزاد باروں کی تعداد موصل کی نسبت سے کم جبکہ غیر موصل کی نسبت سے زیادہ ہوتی ہے۔ یوں ان کی موصلیت موصل اور غیر موصل کی موصلیت کے درمیان میں ہوتی ہے۔ نیم موصل کی خاص بات یہ ہے کہ ان میں انتہائی کم مقدار کے **ملاوٹ**[24] سے ان کی موصلیت پر انتہائی گہرا اثر پڑتا ہے۔ نیم موصل **دوری جدول**[25] کے چوتھی **جماعت**[26] سے تعلق رکھتے ہیں۔ دوری جدول کے پانچویں جماعت کے عناصر مثلاً نائٹروجن اور فاسفورس کا ایٹم ایک عدد الیکٹران عطا کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں انہیں **عطا کنندہ**[27] عناصر کہتے ہیں۔ نیم موصل میں ایسا ہر عطا کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد الیکٹران کو جنم دیتا ہے۔ ایسے عنصر کی نہایت کم مقدار کی ملاوٹ سے نیم موصل میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھ جاتی ہے جس سے ان کی موصلیت بہت بڑھ جاتی ہے۔ ایسے نیم موصل جن میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھا دی گئی ہو کو n نیم موصل کہتے ہیں۔ اس کے برعکس تیسری جماعت کے عناصر مثلاً المونیم کا ایٹم ایک عدد الیکٹران قبول کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں المونیم کو **قبول کنندہ**[28] عنصر کہا جاتا ہے۔ ملاوٹی المونیم کا ایٹم نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران حاصل کرتے ہوئے الیکٹران کی جگہ خالی جگہ پیدا کر دیتا ہے جسے **خول**[29] کہا جاتا ہے۔ نیم موصل میں ایسا ہر قبول کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد خول کو جنم دیتا ہے۔ ایسا

---

[24] doping
[25] periodic table
[26] group
[27] donor
[28] acceptor
[29] hole

آزاد خول مثبت ذرے کی مانند معلوم ہوتا ہے جس کا برقی بار e الیکٹران کے برقی بار $-e$ کے برابر مگر الٹ قطب کا ہوتا ہے اور جس کی کمیت m_h لی جا سکتی ہے۔ اسی طرح آزاد خول کی حرکت پذیری μ_h لکھی جاتی ہے۔ بالکل آزاد الیکٹران کی طرح برقی میدان کی موجودگی میں آزاد خول رفتار بہاو $\boldsymbol{v}_d = \mu_h \boldsymbol{E}$ سے حرکت کرتا ہے جو موصلیت $\sigma = \rho_h \mu_h$ کو جنم دیتا ہے۔ یاد رہے کہ مثبت خول $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہی حرکت کرے گا لہٰذا اس کی رفتار بہاو کی سمت $\boldsymbol{E}$ کی سمت ہی ہو گی۔ تیسری جماعت کے عناصر کی ملاوٹ کردہ نیم موصل کو p نیم موصل کہا جاتا ہے۔ آزاد الیکٹران اور آزاد خول مل کر

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \tag{5.22}$$

موصلیت پیدا کرتے ہیں جہاں ρ_h آزاد خول کی حجمی کثافتِ بار ہے۔ خالص نیم موصل میں حرارتی توانائی سے نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران خارج ہو کر آزاد الیکٹران کی حیثیت اختیار کرتا ہے جبکہ ایسے الیکٹران کا خالی کردہ مقام آزاد خول کی حیثیت اختیار کرتا ہے۔ یوں خالص نیم موصل میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد برابر ہوتی ہے۔

خالص نیم موصل اوہم کے قانون کی نقطہ شکل پر پورا اترتا ہے۔ یوں کسی ایک درجہ حرارت پر نیم موصل کی موصلیت تقریباً اٹل قیمت رکھتی ہے۔

آپ کو یاد ہو گا کہ درجہ حرارت بڑھانے سے موصل میں آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے جس سے موصلیت کم ہو جاتی ہے۔ درجہ حرارت کا موصل میں آزاد الیکٹران کے حجمی کثافتِ بار پر خاص اثر نہیں ہوتا۔ اگرچہ نیم موصل میں بھی درجہ حرارت بڑھانے سے آزاد بار کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ آزاد بار کی مقدار نسبتاً زیادہ مقدار میں بڑھتی ہے جس کی وجہ سے نیم موصل کی موصلیت درجہ حرارت بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ یہ موصل اور نیم موصل کی خصوصیات میں واضح فرق ہے۔

مشق 5.3: $300\,\mathrm{K}$ درجہ حرارت پر خالص سلیکان میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد 1.5×10^{16} فی مربع میٹر، الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{Vs}}$ جبکہ خول کی رفتار بہاو $0.025\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{Vs}}$ ہے۔ جرمینیم کے لئے یہی قیمتیں بالترتیب 2.4×10^{19} فی مربع میٹر، $0.36\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{Vs}}$ اور $0.17\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{Vs}}$ ہیں۔ خالص سلیکان اور خالص جرمینیم کی موصلیت دریافت کریں۔

جوابات: $0.348\,\frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$ اور $2\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

5.7 ذو برق

اس باب میں اب تک ہم موصل اور نیم موصل کی بات کر چکے ہیں جن میں آزاد بار پائے جاتے ہیں۔یوں ایسی اشیاء پر برقی دباو لاگو کرنے سے ان میں برقرار برقی رو پیدا کی جا سکتی ہے۔آئیں ایسی اشیاء کی بات کریں جن میں آزاد بار نہیں پائے جاتے لہٰذا ان میں برقرار برقی رو پیدا کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

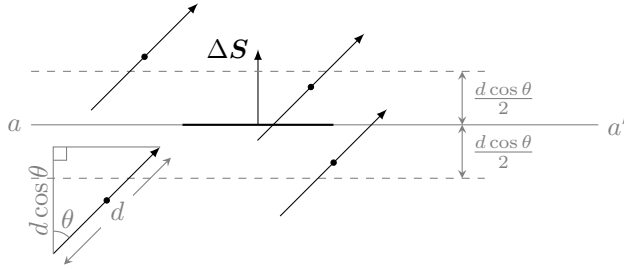
بعض اشیاء مثلاً پانی کے مالیکیول میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز پائے جاتے ہیں۔ایسے مالیکیول کو قطبی[30] مالیکیول کہتے ہیں۔قطبی مالیکیول کو جفت قطب تصور کیا جا سکتا ہے۔بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں کسی بھی چیز میں قطبی مالیکیول بلا ترتیب پائے جاتے ہیں۔ بیرونی میدان E لاگو کرنے سے مالیکیول کے مثبت سرے پر میدان کی سمت میں جبکہ منفی سرے پر میدان کی الٹ سمت میں قوت عمل کرتی ہے۔ان قوتوں کی وجہ سے مالیکیول کے مثبت اور منفی مراکز ان قوتوں کی سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے گھوم جاتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ مراکز کے درمیان فاصلہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ٹھوس قطبی اشیاء میں ایٹموں اور مالیکیول کے درمیان قوتیں ان حرکات کو روکنے کی کوشش کرتی ہیں۔اسی طرح مثبت اور منفی بار کے مابین قوت کشش ان کے درمیان فاصلہ بڑھنے کو روکتا ہے۔جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہوں وہاں مثبت اور منفی مراکز رک جاتے ہیں۔بیرونی میدان ان تمام بلا ترتیب جفت قطب کو ایک سمت میں لانے کی کوشش کرتا ہے۔

بعض اشیاء میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز نہیں پائے جاتے البتہ انہیں بیرونی میدان میں رکھنے سے ان میں ایسے مراکز پیدا ہو جاتے ہیں۔ایسی اشیاء کو غیر قطبی[31] کہتے ہیں۔ بیرونی میدان مالیکیول کے الیکٹرانوں کو ایک جانب کھینچ کر منفی مرکز جبکہ باقی ایٹم کو مثبت چھوڑ کر مثبت مرکز پیدا کرتا ہے۔مثبت اور منفی بار کے مابین قوت کشش اس طرح مراکز پیدا ہونے کے خلاف عمل کرتا ہے۔جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہو جائیں وہیں پر بار کی حرکت کا سلسلہ رک جاتا ہے۔یہ اشیاء قدرتی طور پر غیر قطبی ہیں البتہ انہیں بیرونی میدان قطبی بنا دیتا ہے۔پیدا کردہ جفت قطب بیرونی میدان کی سمت میں ہی ہوں گے۔

ایسے تمام اشیاء جو یا تو پہلے سے قطبی ہوں اور یا انہیں بیرونی میدان کی مدد سے قطبی بنایا جا سکے ذو برقی[32] کہلاتے ہیں۔

ذو برق میں بیرونی میدان سے مالیکیول کے اندر حرکت پیدا ہوتی ہے البتہ مالیکیول ازخود اسی جگہ رہتا ہے۔ایسا بار جو بیرونی میدان کی وجہ سے اپنی جگہ پر معمولی حرکت کرتا ہو کو مقید بار[33] کہتے ہیں۔ اس کے برعکس آزاد بار بیرونی میدان میں مسلسل حرکت کرتا ہے۔

---

polar[30]
non polar[31]
dielectric[32]
bound charge[33]

شکل 5.7: بیرونی میدان کی موجودگی میں مقید بار کی حرکت۔

ذو برق کے جفت قطب کا معیار اثر کو صفحہ 159 میں دئے مساوات 4.68

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d} \tag{5.23}$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں Q ذو برق کے جفت قطب میں مثبت مرکز کا بار ہے۔

اگر اکائی حجم میں n جفت قطب پائے جائیں تب Δv حجم میں $n\Delta v$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی معیار اثر جفت قطب تمام کے سمتی مجموعے

$$\boldsymbol{p}_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.24}$$

کے برابر ہو گا جہاں انفرادی $\boldsymbol{p}$ مختلف ہو سکتے ہیں۔ تقطیب[34] سے مراد اکائی حجم میں کل معیار اثر جفت قطب ہے یعنی

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.25}$$

جس کی اکائی کولمب فی مربع میٹر ہے۔ Δv کو کم سے کم[35] کرتے ہوئے نقطے پر تقطیب حاصل کی گئی ہے۔ حقیقت میں Δv کو اتنا رکھا جاتا ہے کہ اس میں جفت قطب کی تعداد $(n\Delta v)$ اتنی ہو کہ انفرادی جفت قطب کے اثر کو نظر انداز کرنا ممکن ہو۔ یوں تقطیب کو یکساں تفاعل تصور کیا جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

---

[34] polarization

[35] یہ ایسے ہی ہے جیسے لمحاتی رفتار $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حاصل کرتے وقت $\Delta t \to 0$ لیا جاتا ہے۔

شکل 5.7 کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ تصور کریں کہ ذو برق میں غیر قطبی مالیکیول پائے جاتے ہیں جن کا مقام بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں $\boldsymbol{P} = 0$ ہو گا۔ذو برق کے اندر تصوراتی سطح $\Delta \boldsymbol{S}$ لیتے ہیں جسے موٹی گہری سیاہی کی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کے دونوں جانب ہلکی سیاہی سے a تا a' لکیر بھی دکھائی گئی ہے۔بیرونی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب $\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d}$ پیدا ہوتے ہیں جن کا $\boldsymbol{d}$ اور $\boldsymbol{p}$ سطح $\Delta \boldsymbol{S}$ کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ان جفت قطب کو سمتیوں سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں سمتیہ کی نوک مثبت جبکہ اس کی دم منفی بار کا مقام دیتی ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ aa' سے $\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے نیچے تک تمام مثبت بار بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے اوپر چلے جائیں گے۔ اسی طرح aa' سے $\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے اوپر تک تمام منفی بار بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے نیچے چلے جائیں گے۔یوں ΔS رقبہ اور $d\cos\theta$ گہرائی کے حجم $d\Delta S\cos\theta$ میں جتنے بھی جفت قطب ہوں ان تمام کا ایک سرا $\Delta \boldsymbol{S}$ سے گزرے گا۔چونکہ اکائی حجم میں n جفت قطب ہیں لہٰذا اتنی حجم میں $nd\Delta S\cos\theta$ جفت قطب ہوں گے۔یوں $\frac{nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ بار ΔS سے گزر کر اوپر جبکہ $\frac{-nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ بار ΔS سے گزر کر نیچے جائے گا۔مثبت بار کا اوپر جانب حرکت اور منفی بار کا نیچے جانب حرکت ایک ہی معنی رکھتے ہیں لہٰذا کل

$$\Delta Q_m = nQd\Delta S\cos\theta = nQ\boldsymbol{d}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.26}$$

بار سطح سے گزرتے ہوئے اوپر جانب جائے گا جہاں ΔQ_m لکھتے ہوئے اس حقیقت کی یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ ہم مقید بار کی بات کر رہے ہیں۔چونکہ تمام جفت قطب ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا اس حجم کی تقطیب

$$\boldsymbol{P} = nQ\boldsymbol{d} \tag{5.27}$$

ہو گی۔یوں مساوات 5.26 درج ذیل

$$\Delta Q_m = \boldsymbol{P}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.28}$$

لکھی جا سکتی ہے۔اگر $\Delta \boldsymbol{S}$ کو بند سطح کا ٹکڑا سمجھا جائے جہاں $\boldsymbol{a}_S$ بیرونی سمت کو ہو تب اس بند سطح سے کل بار کا اخراج

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کے برابر ہو گا۔یوں بند سطح میں مقید بار کا اضافہ

$$Q_m = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.29}$$

ہو گا۔یہ مساوات گاوس کے قانون کی شکل رکھتی ہے لہٰذا ہم کثافت برقی بہاو کی تعریف یوں تبدیل کرتے ہیں کہ یہ خلاء کے علاوہ دیگر صورتوں میں بھی قابل استعمال ہو۔گاوس کا قانون صفحہ 102 پر مساوات 3.6 میں دیا گیا ہے۔ہم پہلے اس قانون کو $\epsilon_0 \boldsymbol{E}$ اور کل گھیرے بار $Q_{\text{کل}}$ کی شکل میں لکھتے ہیں

$$Q_{\text{کل}} = \oint_S \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.30}$$

جہاں

$$Q_{\text{کل}} = Q + Q_m \tag{5.31}$$

کے برابر ہے۔مساوات 5.30 میں بند سطح $\boldsymbol{S}$ آزاد بار Q اور مقید بار Q_m کو گھیرے ہوئے ہے۔مساوات 5.31 میں مساوات 5.29 اور مساوات 5.30 پر کرتے ہوئے

$$Q = Q_{\text{کل}} - Q_m = \oint_S (\epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.32}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم کثافت برقی بہاو کو اب

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{5.33}$$

بیان کرتے ہیں جو زیادہ کارآمد اور عمومی مساوات ہے۔یوں ذو برق اشیاء کے لئے کثافت برقی بہاو میں اضافی جزو $\boldsymbol{P}$ شامل ہو جاتا ہے۔اس طرح

$$Q = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.34}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Q گھیرا ہوا آزاد بار ہے۔

ہم آزاد، مقید اور کل باروں کے لئے آزاد، مقید اور کل حجمی کثافت بیان کرتے ہوئے

$$Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h$$
$$Q_m = \int_h \rho_m \,\mathrm{d}h$$
$$Q_{\text{کل}} = \int_h \rho_{\text{کل}} \,\mathrm{d}h$$

لکھ سکتے ہیں۔

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مساوات 5.29، مساوات 5.30 اور مساوات 5.34 کے نقطہ اشکال

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} = -\rho_m$$
$$\epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_{\text{کل}}$$

اور

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{5.35}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

قلم میں دہراتے طرز پر ایٹم پائے جاتے ہیں۔ قلم میں عموماً کسی ایک سمت میں باآسانی جبکہ بقایا سمتوں میں مشکل سے تقطیب پیدا کرنا ممکن ہوتا ہے۔ جس سمت میں باآسانی تقطیب پیدا کی جا سکے اسے **آسان محور**[36] یا **آسان سمت** یا نرم محور کہتے ہیں۔ ایسے اشیاء جو مختلف اطراف میں مختلف خصوصیات رکھتے ہوں **سمتی**[37] اشیاء کہلاتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ یہ ضروری نہیں کہ بیرونی لاگو میدان اور تقطیب ایک ہی سمت میں ہوں۔ کچھ ایسی اشیاء بھی پائی جاتی ہیں جو **برقی چال**[38] کی خاصیت رکھتی ہیں۔ ان میں تقطیب کی قیمت ان اشیاء کی گزشتہ تاریخ پر مبنی ہوتی ہے۔ یہ عمل بالکل مقناطیسی مادے کی مقناطیسی چال کی طرز کی خصوصیت ہے۔

کچھ ذو برق اشیاء میں لاگو بیرونی میدان $\boldsymbol{E}$ اور تقطیب $\boldsymbol{P}$ ہر صورت ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔ ان اشیاء کی خصوصیات ہر طرف بالکل ایک ہی طرح ہوتی ہیں۔ ایسے اشیاء **غیر سمتی**[39] اشیاء کہلاتی ہیں۔ انجنیئرنگ میں استعمال ہونے والی ذو برق اشیاء عموماً ایسی ہی ہوتی ہیں۔ اس کتاب میں صرف انہیں پر تبصرہ کیا جائے گا۔ ایسی اشیاء میں تقطیب اور لاگو برقی میدان راست تناسب تعلق

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \chi_e \epsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{5.36}$$

رکھتا ہے جہاں مساوات کے مستقل کو $\chi_e \epsilon_0$ یا $(\epsilon_R - 1)\epsilon_0$ لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات 5.33

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

---

[36] easy axis
[37] anisotropic
[38] ferroelectric
[39] isotropic

یا

$$D = \epsilon_R \epsilon_0 E = \epsilon E \tag{5.37}$$

شکل اختیار کرتی ہے جہاں ذو برق کا **برقی مستقل**

$$\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0 \tag{5.38}$$

کے برابر ہے۔ماہر طبیعیات عموماً χ_e جبکہ انجنیئر عموماً ϵ_R استعمال کرتے ہیں۔ان کا تعلق

$$\chi_e = \epsilon_R - 1 \tag{5.39}$$

ہے۔

χ_e **برقی اثر پذیری**[40]، ϵ_R **جزوی برقی مستقل**[41] جبکہ ϵ_0 **خلاء کا برقی مستقل**[42] کہلاتے ہیں۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 829 پر دیے ضمیمے میں چند مخصوص اشیاء کے برقی مستقل دئے گئے ہیں۔

غیر یکساں[43] خاصیت رکھنے والی اشیاء اتنی سادہ مساوات سے نہیں نپٹی جاتی۔ان اشیاء میں $\boldsymbol{E}$ کا ہر کارتیسی جزو $\boldsymbol{D}$ کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہٰذا ان کا تعلق یوں

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \tag{5.40}$$

لکھا جاتا ہے جہاں نو اعدادی ϵ_{ij} کو مجموعی طور پر **تناوی مستقل**[44] کہا جاتا ہے۔اسی طرح مساوات 5.40 کے طرز کی مساوات **تناوی** مساوات کہلاتی ہیں۔غیر سمتی اشیاء میں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ (اور $\boldsymbol{P}$) آپس میں متوازی نہیں ہوتے اور اگرچہ $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ ان کے لئے بھی درست ہے، $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ استعمال کرتے وقت اس حقیقت کا خیال رکھنا ہو گا کہ ϵ اب تناوی مستقل ہے۔غیر سمتی اشیاء پر ایک مثال کے بعد بحث روکتے ہیں۔

---

[40] electric susceptibility
[41] relative electric constant, relative permittivity
[42] permittivity of vacuum, electric constant of vacuum
[43] non homogeneous
[44] tensor

مثال 5.7: ایک غیر سمتی ذو برق کا تناوی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{E} = \sqrt{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{E} = \sqrt{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{E} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{D} = 4\sqrt{3}\epsilon_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{D} = 9\epsilon_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0(4\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 9\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 9\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})$

اس مثال میں تینوں بار $|E| = \sqrt{3}$ رہا جبکہ D کی قیمتیں خاصی مختلف ہیں۔ یہی غیر سمتی ذو برق کی پہچان ہے۔

مشق 5.4: مندرجہ ذیل صورتوں میں تقطیب حاصل کریں۔ (الف) ذو برق میں $E = 5\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں $D = 1.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ پایا جاتا ہے۔ (ب) $D = 2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ اور $\chi_e = 1.5$ ہیں۔ (پ) ذو برق میں 6×10^{20} مالیکیول فی مربع میٹر ہیں جہاں $E = 100\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ پر ہر مالیکیول کا معیار جفت قطب $1.2 \times 10^{-26}\,\mathrm{C\,m}$ ہے۔

جوابات: $1.156\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$، $1.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ اور $7.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$

5.8 کامل ذو برق کی سرحد پر برقی شرائط

دو مختلف ذو برق کے سرحدی برقی شرائط[45] شکل 5.8 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں پہلے ذو برق کا برقی مستقل ϵ_1 جبکہ دوسرے ذو برق کا برقی مستقل ϵ_2 ہے۔پہلے مماسی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر مستطیلی راستہ $abcd$ پر

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

یعنی

$$E_{m1}\Delta w - E_{n1,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{n2,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{m2}\Delta w + E_{n2,a}\frac{\Delta h}{2} + E_{n1,a}\frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھتے ہیں جس سے

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w + (E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔Δw اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ اس پر مماسی میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ مستطیل کے بائیں اور دائیں اطراف کے میدان کو زیر نوشت میں a اور b سے ظاہر کیا گیا ہے۔سرحدی شرائط حاصل کرنے کی خاطر سطح کے قریب تر جانا ہو گا۔ایسا کرنے سے $\Delta h \to 0$ ہو گا جس سے

$$(E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} \to 0$$

ہو کر قابل نظر انداز ہو گا۔یوں

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w = 0$$

رہ جاتا ہے جس سے

$$E_{m1} = E_{m2} \tag{5.41}$$

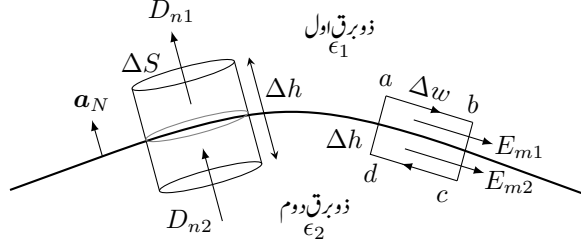
حاصل ہوتا ہے جسے

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{E}1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \tag{5.42}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے

$$\frac{D_{m1}}{\epsilon_1} = E_{m1} = E_{m2} = \frac{D_{m2}}{\epsilon_2}$$

---

[45] boundary conditions

شکل 5.8: دو مختلف ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط۔

یعنی

$$\frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{5.43}$$

یا

$$\boldsymbol{a}_N \times \left(\boldsymbol{D}_1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \boldsymbol{D}_2 \right) = 0 \tag{5.44}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.41 کہتی ہے کہ ایک ذو برقی سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے سرحد پر مماسی برقی شدت بلا جوڑ[46] ہوتا ہے۔اس کے برعکس مساوات 5.43 کہتی ہے کہ دو ذو برق کی سرحد پر مماسی برقی بہاو جوڑ دار[47] ہوتا ہے۔یوں ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے مماسی برقی بہاو میں سیڑھی نما[48] تبدیلی پائی جاتی ہے۔

عمودی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر گاوس کا قانون شکل میں رقبہ ΔS گھیرتے بیلن پر لاگو کرتے ہوئے

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\Delta S} \rho_S \,\mathrm{d}S \tag{5.45}$$

---

continuous[46]
discontinuous[47]
step[48]

لکھا جا سکتا ہے۔ چھوٹے رقبہ پر میدان کو یکساں تصور کرتے ہوئے تکمل کے باہر لے جاتے ہوئے مساوات 5.45 کے پہلے جزو سے

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_{n1} \Delta S$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ بند سطح کی سمت باہر کو ہوتی ہے لہٰذا $\boldsymbol{D}_{n1}$ اور بیلن کا بالائی ڈھکن ایک ہی سمت رکھتے ہیں جبکہ $\boldsymbol{D}_{n2}$ اور بیلن کا نچلا ڈھکن الٹ سمت میں ہیں۔ مساوات 5.45 کا دوسرا جزو

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -D_{n2} \Delta S$$

دیتا ہے۔ سطح کے قریب سے قریب ہونے سے $\Delta h \to 0$ ہو گا جس سے نلکی سطح کا رقبہ قابل نظر انداز ہو گا جس سے مساوات 5.45 کا تیسرا جزو صفر ہو جاتا ہے جبکہ

$$\int_{\Delta S} \rho_S \, \mathrm{d}S = \rho_S \Delta S$$

کے برابر ہے۔ ان تمام نتائج سے

$$D_{n1} \Delta S - D_{n2} \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_S \tag{5.46}$$

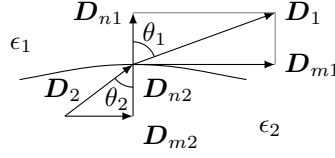
حاصل ہوتا ہے جسے

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{5.47}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $D = \epsilon E$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\epsilon_1 \boldsymbol{E}_1 - \epsilon_2 \boldsymbol{E}_2) = \rho_S \tag{5.48}$$

حاصل ہوتا ہے۔

جزوی برقی مستقل کی مدد سے مقید بار کا حساب رکھا جاتا ہے۔ اس طرح مقید بار کا علیحدہ طور پر خیال رکھنے کی ضرورت نہیں رہتی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں ρ_S مقید بار نہیں ہے۔ ρ_S سرحد پر با مقصد طور رکھی گئی سطحی

شکل 5.9: $\epsilon_1 > \epsilon_2$ کی صورت میں $D_1 > D_2$ ہو گا۔ اسی طرح $\theta_1 > \theta_2$ جبکہ $E_1 < E_2$ ہو گا۔

کثافتِ بار ہے۔ اس منفرد صورت، جہاں سرحد پر از خود بار رکھا جائے، کے علاوہ دو ذو برق کی سرحد پر کبھی بار نہیں پایا جاتا۔ انجنیئرنگ مسائل میں عموماً $\rho_S = 0$ ہی ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات نسبتاً سادہ شکل

$$D_{n1} = D_{n2} \tag{5.49}$$

اختیار کر لیتی ہے جس سے

$$\epsilon_1 E_{n1} = D_{n1} = D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2} \tag{5.50}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں سرحد پار کرتے وقت E_n میں سیڑھی نما تبدیلی پائی جاتی ہے۔ اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ سرحد پر E_n جوڑ دار[49] ہے۔ اس کے برعکس D_n سرحد پر بلا جوڑ ہے۔

آئیں ان جوابات کی مدد سے سرحد کے دونوں جانب برقی میدان کا تعلق حاصل کریں۔ شکل 5.9 کو دیکھتے ہوئے ہم

$$\begin{aligned}
D_{m1} &= D_1 \sin\theta_1 \\
D_{n1} &= D_1 \cos\theta_1 \\
D_{m2} &= D_2 \sin\theta_2 \\
D_{n2} &= D_2 \cos\theta_2
\end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں جن سے

$$\begin{aligned}
\frac{D_{n1}}{D_{n2}} &= \frac{D_1 \cos\theta_1}{D_2 \cos\theta_2} = 1 \\
\frac{D_{m1}}{D_{m2}} &= \frac{D_1 \sin\theta_1}{D_2 \sin\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 5.49 اور مساوات 5.43 کا استعمال کیا گیا ہے۔ انہیں

$$\begin{aligned}
D_1 \cos\theta_1 &= D_2 \cos\theta_2 \\
\epsilon_2 D_1 \sin\theta_1 &= \epsilon_1 D_2 \sin\theta_2
\end{aligned} \tag{5.51}$$

[49] discontinuous

لکھ سکتے ہیں۔ان میں دوسری مساوات کو پہلی مساوات سے تقسیم کرتے ہیں

$$\frac{\epsilon_2 D_1 \sin\theta_1}{D_1 \cos\theta_1} = \frac{\epsilon_1 D_2 \sin\theta_2}{D_2 \cos\theta_2}$$

جس سے

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{5.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات سرحد کے دونوں جانب میدان کے زاویوں کا تعلق بیان کرتی ہے۔چونکہ $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ ہوتا ہے لہٰذا سرحد کے کسی بھی طرف، اس طرف کا $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ ایک ہی سمت رکھتے ہیں۔ شکل میں $\epsilon_1 > \epsilon_2$ تصور کیا گیا ہے لہٰذا اس میں $\theta_1 > \theta_2$ ہے۔

مساوات 5.51 کے پہلے جزو کا مربع لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} D_1^2 \cos^2\theta_1 &= D_2^2 \cos^2\theta_2 \\ &= D_2^2 (1 - \sin^2\theta_2) \\ &= D_2^2 - D_2^2 \sin^2\theta_2 \end{aligned}$$

اس میں مساوات 5.51 کے دوسرے جزو سے $D_2 \sin\theta_2$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$D_1^2 \cos^2\theta_1 = D_2^2 - D_1^2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \tag{5.53}$$

ملتا ہے۔چونکہ $E = \frac{D}{\epsilon}$ ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\begin{aligned} E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} &= \frac{D_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \\ &= \frac{\epsilon_1 E_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \end{aligned}$$

یعنی

$$E_2 = E_1 \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 \cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} \tag{5.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔

جس جانب برقی مستقل کی قیمت زیادہ ہو، سرحد کے اسی طرف D کی قیمت بھی زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ہوں جس صورت میں $D_2 = D_1$ ہوتا ہے۔اسی طرح کم ϵ جانب E کی قیمت زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 90$ ہوں جس صورت میں $E_2 = E_1$ ہوتا ہے۔

5.9 موصل اور ذو برق کی سرحدی شرائط

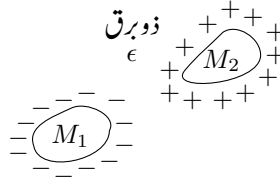
موصل اور ذو برق کی سرحد پر صورت حال تقریباً ویسے ہی ہے جیسے موصل اور خلاء کی سرحد پر تھی۔موصل میں $\boldsymbol{E} = 0$ ہونے کی وجہ سے سرحد پر مستطیلی راستے پر کرخوف کے قانون سے ذو برق میں $E_m = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $D_m = \frac{E_m}{\epsilon} = 0$ ہو گا۔

اسی طرح سرحد پر چھوٹا بیلن $\rho_S \Delta S$ بار کو گھیرے گا جو گاوس کے قانون کی مدد سے بیلن کے ذو برق جانب ڈھکن پر عمودی بہاو $D_n \Delta S$ پیدا کرے گا۔یوں $D_n = \rho_S$ حاصل ہوتا ہے جس سے $E_n = \frac{D_n}{\epsilon} = \frac{\rho_S}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔

ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موصل اور ذو برق کی سرحد پر برقی میدان کے جوابات موصل اور خلاء کی سرحد کے جوابات میں ϵ_0 کی جگہ ϵ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} D_m &= E_m = 0 \\ D_n &= \epsilon E_n = \rho_S \end{aligned} \tag{5.55}$$

5.10 برق گیر (کپیسٹر)

شکل 5.10 میں دو عدد موصل M_1 اور M_2 دکھائے گئے ہیں جن کے گرد ذو برق پایا جاتا ہے۔M_1 پر کل $-Q$ اور M_2 پر کل $+Q$ بار پایا جاتا ہے۔ان باروں کے علاوہ پورے نظام میں کوئی اور بار نہیں پایا جاتا۔یوں پورا نظام بے بار ہے۔چونکہ موصل پر صرف سطحی بار پایا جاتا ہے لہٰذا دونوں موصل پر بار سطحی کثافتِ بار کی صورت میں پایا جائے گا۔

ذو برق
ϵ
M_2
M_1

شکل 5.10: برقی گنجائش (کپیسٹنس) کی تعریف۔

گاوس کے قانون کے تحت M_2 سے عمودی سمت میں $+Q$ کے برابر برقی بہاو کا اخراج اور M_1 پر عمودی سمت میں اتنے ہی برقی بہاو کا دخول ہو گا۔ یوں موصل کے گرد ذو برق میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ پائی جائے گی۔ $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کی ابتدا M_2 سے ہو گی اور ان کا اختتام M_1 پر ہو گا۔

اس برقی میدان میں کسی بھی راستے ایک کولمب کا بار M_1 تا M_2 منتقل کرنے کی خاطر V_0 توانائی درکار ہو گی۔ موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے لہٰذا پہلے موصل کی سطح سے کسی بھی نقطے سے دوسرے موصل کی سطح پر کسی بھی نقطے تک بار منتقل کرنے کی خاطر برابر توانائی درکار ہوتی ہے۔

برقی گنجائش[50] (کپیسٹنس) C کی تعریف

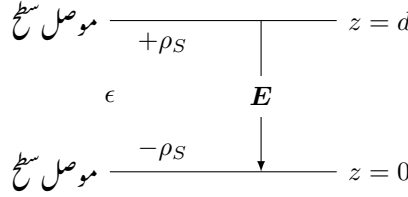
$$C = \frac{Q}{V_0} \tag{5.56}$$

ہے جہاں M_1 کو صفر برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے M_2 کی برقی دباو V_0 اور مثبت موصل یعنی M_2 کا بار Q ہے۔ منفی موصل سے مثبت موصل تک اکائی مثبت بار منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی V_0 کو تکمل کے ذریعے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح مثبت موصل پر بار Q کو گاوس کے قانون کی مدد سے بذریعہ سطحی تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں صفحہ 102 پر مساوات 3.6 اور صفحہ 140 پر مساوات 4.11 کی مدد سے برقی گنجائش (کپیسٹنس) کی عمومی مساوات

$$C = \frac{\oint_S \epsilon \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{-\int_{-}^{+} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}} \tag{5.57}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

---

[50] capacitance

شکل 5.11: متوازی چادر برق گیر۔

دونوں موصل پر بار دگنا کرنے سے گاوس کے قانون کے تحت برقی بہاو بھی دگنا ہو جائے گا۔یوں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ بھی دگنے ہوں گے جس سے دونوں موصل کے مابین برقی دباو بھی دگنا ہو گا۔اس طرح دگنا بار تقسیم دگنا دباو ایک بار پھر وہی برقی گنجائش (کپیسٹنس) دے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ برق گیر[51] کے برقی گنجائش (کپیسٹنس) کی قیمت کا دارومدار موصل کی اشکال، ان کے درمیان فاصلہ اور برقی مستقل پر منحصر ہے نا کہ موصل پر کل بار کے۔

برقی گنجائش (کپیسٹنس) کی اکائی فیراڈ[52] ہے جسے F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ایک کولمب فی وولٹ ایک فیراڈ[53] کے برابر ہے۔ایک فیراڈ نہایت بڑی قیمت ہے اور عام طور برقی گنجائش (کپیسٹنس) کو مائیکرو فیراڈ µF یا پیکو فیراڈ pF میں ناپا جاتا ہے۔

5.10.1 متوازی چادر برق گیر

شکل 5.11 میں دو لامحدود متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں۔نچلی چادر $z=0$ پر ہے اور اس پر سطحی کثافتِ بار $-\rho_S$ پائی جاتی ہے جبکہ بالائی چادر $z=d$ پر ہے اور اس پر سطحی کثافتِ بار $+\rho_S$ پائی جاتی ہے۔اس مسئلے کو ہم پہلے تفصیلی طور پر دیکھ چکے ہیں۔دو چادروں کے درمیان میدان صفحہ 78 پر مساوات 2.44 دیتی ہے جہاں مثبت چادر $x=0$ اور منفی چادر $x=x_1$ پر رکھے گئے تھے۔یوں موجودہ شکل کے مطابق مساوات 2.44 کی صورت

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\rho_S}{\epsilon}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہو گی۔میدان مثبت سے منفی چادر کی سمت میں ہے۔مثبت سطح سے خارج برقی بہاو کی کثافت مثبت ہے یعنی اس سطح پر عمودی $D_+=\rho_S$ کے برابر ہے جبکہ منفی چادر پر برقی بہاو داخل ہوتا ہے لہٰذا یہاں $D_-=-\rho_S$ ہو گا۔

[51] capacitor
[52] Farad
[53] یہ اکائی انگلستانی ماہر طبیعیات مائکل فیراڈے کے نام سے منسوب ہے۔

منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر

$$V=-\int_0^d \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\int_0^d \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\epsilon}\cdot \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}=\int_0^d \frac{\rho_S}{\epsilon}\,\mathrm{d}z=\frac{\rho_S d}{\epsilon}$$

برقی دباو ہو گا۔لامحدود چادر پر لامحدود بار پایا جائے گا جس سے چادر لامحدود برقی گنجائش (کپیسٹنس) کا حامل ہو گا۔ حقیقی برق گیر محدود رقبے کی چادر سے بنائے جاتے ہیں۔اگر محدود رقبے کے متوازی چادروں کے اطراف کی لمبائیاں سطحوں کے مابین فاصلے سے زیادہ ہو تو ایسی صورت میں چادروں کے درمیانی خطے میں برقی میدان لامحدود چادروں کے میدان کی مانند ہی ہو گا۔ S رقبے کے چادروں کے برق گیر کو لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مثبت چادر پر کل

$$Q=\int_S \rho_S\,\mathrm{d}S=\rho_S S$$

بار پایا جائے گا۔یوں اس کی برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\epsilon S}{d} \tag{5.58}$$

ہو گی۔ برق گیر کے کناروں کے قریب میدان پھول کر برق گیر سے باہر نکلے گا۔میدان کے پھولنے[54] کو ہم نے نظرانداز کیا ہے۔ برقی گنجائش (کپیسٹنس) کی قیمت رقبہ بڑھا کر اور چادروں کے درمیان فاصلہ کم کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اسی طرح چادروں کے درمیان زیادہ سے زیادہ برقی مستقل کا ذو برق استعمال کرتے ہوئے برقی گنجائش (کپیسٹنس) بڑھائی جا سکتی ہے۔

بلند تر تعدد پر چلنے والے برق گیر ابرق استعمال کرتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔ابرق برق گیر[55] انتہائی کم برقی طاقت ضائع کرتا ہے۔ابرق کی پتری کے دونوں جانب موصل مادے کی تہہ چڑھا[56] کر برق گیر تیار کیا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک ملی میٹر کے ایک چوتھائی موٹا اور ایک سنٹی میٹر اطراف کے مربع ابرق کے پتری کے دونوں جانب المونیم کی تہہ چڑھا کر برق گیر تیار کیا گیا۔اس کی برقی گنجائش (کپیسٹنس) دریافت کریں۔

---

[54] fringing
[55] mica capacitor
[56] deposit

حل: کتاب کے آخر میں صفحہ 829 پر دیے ضمیمے سے ابرق کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 5.4$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$C = \frac{5.4 \times 0.01^2}{36\pi \times 10^9 \times 0.25 \times 10^{-3}} = 19.1\,\text{pF}$$

حاصل ہوتا ہے۔

5.10.2 ہم محوری برق گیر

صفحہ 144 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہم محوری تار کے دو تاروں کے درمیان برقی دباو دیتا ہے جہاں اندرونی تار پر لکیری کثافتِ بار ρ_L ہے۔بیرونی تار کو برقی زمین تصور کیا گیا ہے۔L لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی تار پر یوں $Q = \rho_L L$ بار پایا جائے گا۔اس طرح اتنی تار کی برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_L L}{\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{5.59}$$

ہو گی جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 جبکہ بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

5.10.3 ہم محوری کرہ برق گیر

محدد کے مبدا پر r_A اور r_B رداس کے موصل کرہ سطح ہیں جہاں $r_B > r_A$ ہے۔اندرونی سطح پر $+Q$ اور بیرونی سطح پر $-Q$ بار پایا جاتا ہے۔گاوس کے قانون کے تحت اندرونی سطح کے اندر یعنی $r < r_A$ اور بیرونی سطح باہر یعنی $r > r_B$ پر میدان صفر ہو گا۔دونوں سطحوں کے درمیان میدان بالکل ایسا ہی ہو گا جیسے محدد کے مبدا پر نقطہ بار $+Q$ کا میدان ہوتا ہے۔یوں بیرونی سطح کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی سطح پر برقی دباو صفحہ 142 پر مساوات 4.13

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس طرح ان سطحوں کا برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$C=\frac{Q}{V_{AB}}=\frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}} \tag{5.60}$$

ہو گا۔

ایک دلچسپ صورت حال کو دیکھتے ہیں۔اگر r_B کو لامحدود کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات سے

$$C=4\pi\epsilon R \qquad \text{کرہ کی برقی گنجائش (کپیسٹنس)} \tag{5.61}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں r_A کی جگہ R لکھا گیا ہے۔یہ مساوات رداس R کرہ کی برقی گنجائش (کپیسٹنس) دیتی ہے۔یاد رہے کہ اس برق گیر کی دوسری سطح لامحدود فاصلے پر ہے۔

مثال 5.9: آپ نے بچپن میں بلور تو کھیلیں ہوں گے۔بلور کا قطر تقریباً ایک سنٹی میٹر ہوتا ہے۔خلاء میں موصل بلور کی برقی گنجائش (کپیسٹنس) حاصل کریں۔

حل:

$$C=\frac{0.5\times10^{-2}}{9\times10^{9}}=0.55\,\text{pF}$$

---

r_A رداس کے بار بردار موصل بلور کے اوپر r_A تا r_1 برقی مستقل ϵ_1 کے ذو برق کی تہہ چڑھانے سے $\boldsymbol{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\text{r}}$ کی بدولت

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}\boldsymbol{a}_{\text{r}} & (r_A<r<r_1)\\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\text{r}} & (r>r_1)\end{cases}$$

ہو گا۔ برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہوئے بلور کا برقی دباو

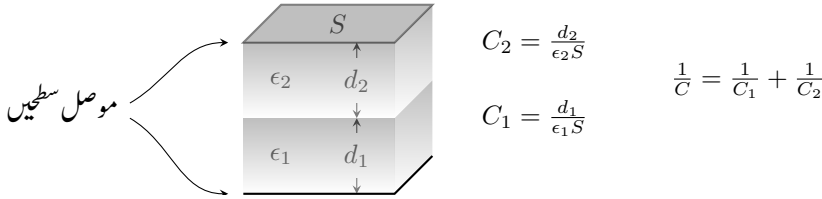
$$
\begin{aligned}
V &= -\int_{\infty}^{r_1} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{r_1}^{r_A} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_1 r^2} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right)
\end{aligned}
$$

ہو گا جس سے برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$
C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right)} \tag{5.62}
$$

حاصل ہوتی ہے۔

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے برق گیر

متوازی چادر برق گیر میں دو مختلف ذو برق بھرنے کی برقی گنجائش (کپیسٹنس) پر اثر دیکھتے ہیں۔ایسا برق گیر شکل 5.12 میں دکھایا گیا ہے۔چادروں کے درمیان فاصلہ چادر کے اطراف کی لمبائیوں سے نہایت کم ہونے کی صورت میں انہیں لامحدود چادروں کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔منفی چادر پر ϵ_1 برقی مستقل کی d_1 موٹائی کی تہہ اور مثبت چادر پر ϵ_2 برقی مستقل کی d_2 موٹائی کی تہہ ہیں۔نفی چادر پر $-\rho_S$ جبکہ مثبت چادر پر $+\rho_S$ سطحی کثافتِ بار کی صورت میں چادروں کے درمیان $D = \rho_S$ ہو گا۔یوں ϵ_1 ذو برق کے خطے میں

شکل 5.12: سلسلہ وار برق گیر۔

$$
E_1 = \frac{\rho_S}{\epsilon_1}
$$

جبکہ ϵ_2 ذو برق کے خطے میں

$$
E_2 = \frac{\rho_S}{\epsilon_2}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\rho_S d_1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_S d_2}{\epsilon_2}$$

ہو گا جبکہ مثبت چادر پر بار $Q = \rho_S S$ ہو گا جس سے برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

یعنی

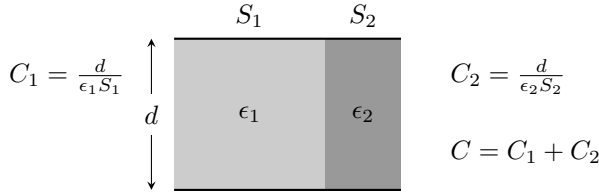
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{5.63}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{d_1}{\epsilon_1 S} \\ C_2 &= \frac{d_2}{\epsilon_2 S} \end{aligned} \tag{5.64}$$

کے برابر ہیں۔یہی جواب شکل 5.12 میں سلسلہ وار جڑے C_1 اور C_2 کی نشاندہی کرتے ہوئے لکھا جا سکتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل متوازی دو چادروں کے درمیان تیسرے اور چوتھے ذو برق کی تہہ دئے جا سکتے ہیں۔انہیں سلسلہ وار برق گیر تصور کرتے ہوئے حل کیا جا سکتا ہے۔

S_1 S_2
$C_1 = \frac{d}{\epsilon_1 S_1}$
d
ϵ_1 ϵ_2
$C_2 = \frac{d}{\epsilon_2 S_2}$
$C = C_1 + C_2$

شکل 5.13: متوازی جڑے برق گیر۔

شکل 5.13 میں دو چادروں کے درمیان دو مختلف ذو برق اس طرح بھرے گئے ہیں کہ یہ متوازی جڑے برق گیر کو جنم دیں۔ہم شکل کو دیکھ کر ہی

$$C = C_1 + C_2 \tag{5.65}$$

لکھ سکتے ہیں۔آئیں اتنی جلدی کرنے کی بجائے اس مسئلے کا ریاضیاتی حل نکالیں۔دونوں موصل چادر ہم قوہ ہیں لہٰذا نچلی چادر کو برقی زمین یعنی صفر وولٹ اور دوسری چادر کو V_0 برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں چادروں کے درمیان خطے میں $E = \frac{V_0}{d}$ ہو گا جس سے بائیں ہاتھ، یعنی ϵ_1 برقی مستقل کے ذو برق میں $D_1 = \epsilon_1 E$ جبکہ دائیں ہاتھ کے ذو برق میں $D_2 = \epsilon_2 E$ ہوں گے۔D_1 اور D_2 موصل چادروں کے عمودی ہیں لہٰذا سرحدی شرائط کے تحت مثبت چادر کے S_1 حصے پر $\rho_1 = D_1$ جبکہ اس کے S_2 حصے پر $\rho_2 = D_2$ ہو گا۔یوں مثبت چادر پر کل بار

$$Q = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2 = \epsilon_1 \frac{V_0}{d} S_1 + \epsilon_2 \frac{V_0}{d} S_2$$

سے برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$

یعنی

$$C = C_1 + C_2 \tag{5.66}$$

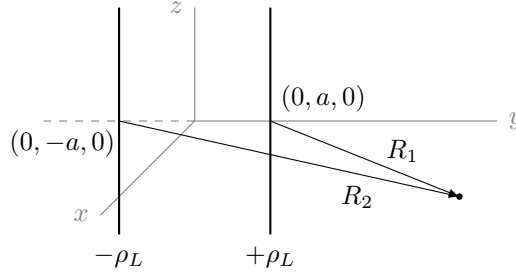
لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\epsilon_1 S_1}{d} \\ C_2 &= \frac{\epsilon_2 S_2}{d} \end{aligned} \tag{5.67}$$

کے برابر ہیں۔

5.12 دو متوازی تاروں کی برقی گنجائش (کپیسٹنس)

شکل 5.14 میں دو لامحدود لمبائی کی تار z محدد کے متوازی دکھائے گئے ہیں۔ہم ایسی متوازی جوڑی کی برقی گنجائش (کپیسٹنس) حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ہم قوہ تار کی طرح دو متوازی تار بھی انتہائی اہم ہیں اور ان سے زندگی میں بار بار واسطہ پڑتا ہے۔

ایک تار جو $(0, a, 0)$ سے گزرتی ہے پر مثبت لکیری کثافتِ بار $+\rho_L$ پایا جاتا ہے جبکہ دوسری تار جو $(0, -a, 0)$ سے گزرتی ہے پر منفی لکیری کثافتِ بار $-\rho_L$ پایا جاتا ہے۔z محدد پر لامحدود لمبائی کے لکیری کثافتِ بار سے پیدا

شکل 5.14: دو متوازی تاروں کی برقی گنجائش (کپیسٹنس)۔

برقی دباو صفحہ 143 پر مساوات 4.16

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

دیتا ہے جہاں برقی میدان کو ρ_0 پر تصور کیا گیا۔اس مساوات کو شکل 5.14 کے لئے ترتیب دیتے ہوئے دونوں تاروں کا مجموعی برقی دباو

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{R_{10}}{R_1} - \ln \frac{R_{20}}{R_2} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_{10} R_2}{R_{20} R_1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $R_{10} = R_{20}$ رکھا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ سطح $y = 0$ پر $R_{10} = R_{20}$ ہو گا لہٰذا دراصل ہم برقی زمین کو $y = 0$ سطح پر رکھ رہے ہیں۔اب R_1 اور R_2 کو x اور y کی صورت

$$\boldsymbol{R}_1 = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (y - a)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$
$$\boldsymbol{R}_2 = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (y + a)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

میں لکھتے ہوئے

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2} \tag{5.68}$$

یا

$$e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\rho_L}} = \frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2} \tag{5.69}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

ہم قوہ سطحیں حاصل کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو کسی اٹل برقی دباو مثلاً V_1 کے لئے لکھ کر حل کرتے ہیں۔چونکہ V_1 اٹل یا مستقل قیمت ہے جو تبدیل نہیں ہوتا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں

$$K_1 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\rho_L}} \tag{5.70}$$

لکھ کر اسے

$$K_1 = \frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے حل کرتے ہوئے

$$x^2+y^2-2ay\frac{K_1+1}{K_1-1} = -a^2$$

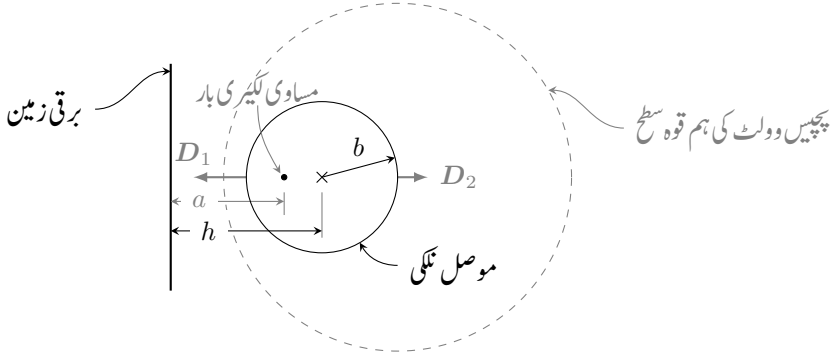
لکھا جا سکتا ہے۔مساوات کے دونوں جانب $a^2\frac{(K_1+1)^2}{(K_1-1)^2}$ جمع کرتے ہوئے یوں

$$x^2+\left[y-a\left(\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)\right]^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\right)^2 \tag{5.71}$$

لکھا جا سکتا ہے جو رداس $\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}$ کے گول دائرے کی مساوات ہے جس کی وسط $[0, \frac{a(K_1+1)}{K_1-1}]$ پر ہے۔یہ مساوات کہتی ہے کہ ہم قوہ سطح z کی قیمت پر منحصر نہیں ہے یعنی یہ نلکی شکل رکھتی ہے۔مساوات 5.71 میں

$$\begin{aligned} b &= \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1} \\ h &= a\left(\frac{K_1+1}{K_1-1}\right) \end{aligned} \tag{5.72}$$

لکھتے ہوئے اسے

$$x^2+(y-h)^2 = b^2 \tag{5.73}$$

شکل 5.15: زمین کے قریب موٹی تار کی برقی گنجائش (کپیسٹنس)۔

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں ان نتائج پر غور کریں۔

شکل 5.14 کو عکس کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے $y = 0$ پر برقی زمین رکھتے ہوئے منفی کثافتِ بار کی تار کو ہٹانے سے زمین کے دائیں جانب میدان میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔دائیں جانب اب بھی ہم قوہ سطحیں b رداس کے دائرے بنائے گیں جن کا وسط زمین سے h فاصلے پر ہو گا۔ہم قوہ سطح کے رداس اور h کا دارومدار K_1 پر ہے جو ازخود V_1 پر منحصر ہے۔ہم مختلف برقی دباو $V_2, V_3, \dots$ کے لئے $K_2, K_3, \dots$ حاصل کرتے ہوئے ایسے ہم قوہ سطحوں کے رداس اور زمین سے ان کی وسط کے فاصلے حاصل کر سکتے ہیں۔ہم V_1 ہم قوہ سطح کی جگہ V_1 برقی دباو کی موصل سطح رکھ سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے میدان پر کہیں بھی کوئی اثر نہیں آئے گا۔

آئیں ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود سیدھی موصل سطح سے h فاصلے پر b رداس کے موصل نلکی کی برقی گنجائش (کپیسٹنس) حاصل کریں۔یہ صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔یہاں h اور b دئے گئے ہیں جن سے مساوات 5.72 کی مدد سے a، K_1 اور یوں V_1 معلوم کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 5.72 کو حل کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{h^2 - b^2} \\
K_1 &= \left(\frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} \right)^2
\end{aligned}
\tag{5.74}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سے

$$
V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}
$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ زمین صفر وولٹ اور موصل نلکی V_1 وولٹ پر ہے لہٰذا ان کے درمیان V_1 برقی دباو ہو گا۔

شکل 5.14 میں مثبت تار کی L لمبائی پر کل بار $Q = \rho_L L$ پایا جاتا ہے۔ شکل 5.15 میں بھی برقی زمین کے اتنی ہی لمبائی پر اتنی ہی مقدار مگر منفی بار ہو گا جبکہ b رداس کے موصل نلکی پر یہی $Q = \rho_L L$ بار ہو گا۔یوں L لمبائی کی موصل نلکی اور زمین کے درمیان

$$C = \frac{Q}{V_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\cosh^{-1}\frac{h}{b}} \tag{5.75}$$

برقی گنجائش (کپیسٹنس) پایا جائے گا۔

زمین سے دور کم موٹائی کی تار کی صورت میں $h \gg b$ ہو گا لہٰذا مساوات 5.75

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\frac{2h}{b}} \qquad h \gg b \tag{5.76}$$

صورت اختیار کر لے گی جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔شکل 5.14 میں دو تاروں کے درمیان برقی گنجائش (کپیسٹنس) مساوات 5.75 کے جواب کا نصف ہو گا چونکہ مثبت تار اور زمین کے مابین برق گیر اور منفی تار اور زمین کے مابین برق گیر کو سلسلہ وار جڑا تصور کیا جا سکتا ہے۔

کچھ حقائق مثال کی مدد سے بہتر سمجھ آتے ہیں۔آئیں مثال 5.10 کی مدد سے ایسی چند باتیں سیکھیں۔

مثال 5.10: برقی زمین کی متوازی خلاء میں دس میٹر کے فاصلے پر پانچ میٹر رداس کی موصل نلکی پائی جاتی ہے جس پر پچاس وولٹ کا برقی دباو ہے۔

- نلکی پر لکیری کثافتِ بار حاصل کریں۔
- ایک میٹر لمبائی کے لئے نلکی اور زمین کے مابین برقی گنجائش (کپیسٹنس) حاصل کریں۔
- پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کا رداس اور زمین سے اس کی وسط کا فاصلہ حاصل کریں۔

- زمین سے ایسی لکیری کثافتِ بار کا فاصلہ دریافت کریں جو ہوبہو ایسی ہی ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔
- نلکی پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم سطحی کثافتِ بار حاصل کریں۔

حل: صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔

- یہاں $h = 10$ جبکہ $b = 5$ ہیں لٰہذا مساوات 5.74 کی مدد سے

$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8.66\,\text{m}$$
$$K_1 = \left(\frac{10 + \sqrt{10^2 - 5^2}}{5}\right)^2 = 13.92$$

حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 5.70 کے استعمال سے یوں

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\ln K_1} = \frac{50}{9 \times 10^9 \times \ln 13.92} = 2.11\,\frac{\text{nC}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

- مساوات 5.75 یا برقی گنجائش (کپیسٹنس) کی تعریف سے فی میٹر برقی گنجائش حاصل کرتے ہیں۔

$$C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2.11 \times 10^{-9} \times 1}{50} = 4.22\,\text{nF}$$

- پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کے لئے مساوات 5.70 سے

$$K_2 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_2}{\rho_L}} = e^{\frac{25}{9 \times 10^9 \times 2.11 \times 10^{-9}}} = 3.73$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 5.72 سے پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح کے لئے

$$b = \frac{2 \times 8.66 \times \sqrt{3.73}}{3.73 - 1} = 12.25\,\text{m}$$
$$h = 8.66 \times \left(\frac{3.73 + 1}{3.73 - 1}\right) = 15\,\text{m}$$

حاصل ہوتے ہیں۔پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح جس کا رداس سوا بارہ میٹر اور جو زمین سے پندرہ میٹر کے فاصلے پر ہے کو شکل میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دار گول دائرے سے دکھایا گیا ہے۔

- برقی زمین سے $8.66\,\mathrm{m}$ فاصلے پر $2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ لکیری کثافتِ بار کی باریک تار بالکل اسی طرز کے ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گی۔
- کسی بھی جگہ $\boldsymbol{E}$ کو مساوات 5.68

$$V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln(x^2+(y+a)^2) - \ln(x^2+(y-a)^2)\right]$$

کے ڈھلوان $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس سے

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} = -\epsilon_0 \nabla V = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)$$

بھی حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2x}{x^2+(y+a)^2} - \frac{2x}{x^2+(y-a)^2}\right]\\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(y+a)}{x^2+(y+a)^2} - \frac{2(y-a)}{x^2+(y-a)^2}\right]\end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔

چونکہ موصل کی سطح پر $\boldsymbol{D}$ عمودی ہوتا ہے اور اس کی قیمت سطحی کثافتِ بار کے برابر ہوتی ہے لہٰذا ہم موصل نلکی پر برقی زمین کے قریبی جانب $\boldsymbol{D}_1$ اور اس سے دور جانب $\boldsymbol{D}_2$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔انہیں شکل 5.15 میں دکھایا گیا ہے۔زمین سے نلکی کا قریبی فاصلہ $h - b = 5\,\mathrm{m}$ ہے۔یوں $x = 0$ اور $y = 5$ ہو گا جس سے

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\times 0}{0^2+(5+8.66)^2} - \frac{2\times 0}{0^2+(5-8.66)^2}\right] = 0\\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(5+8.66)}{0^2+(5+8.66)^2} - \frac{2(5-8.66)}{0^2+(5-8.66)^2}\right] = \frac{0.693\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{D}_1 = -\frac{0.693\rho_L}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

ہو گا۔زمین سے دور نلکی پر $x=0$ اور $y=h+b=10+5=15\,\mathrm{m}$ ہیں جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\times 0}{0^2+(15+8.66)^2}-\frac{2\times 0}{0^2+(15-8.66)^2}\right]=0$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(15+8.66)}{0^2+(15+8.66)^2}-\frac{2(15-8.66)}{0^2+(15-8.66)^2}\right]=-\frac{0.231\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

یا

$$\boldsymbol{D}_2=\frac{0.231\rho_L}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

حاصل ہوتا ہے۔دونوں جوابات سے ظاہر ہے کہ بہاو کا اخراج سطح کے عمودی ہے۔یوں موصل نلکی پر

$$\rho_{S\text{قریبی}}=\frac{0.693\rho_L}{4\pi}$$
$$\rho_{S\text{دور}}=\frac{0.231\rho_L}{4\pi}$$

پایا جائے گا۔یاد رہے کہ قریبی جانب منفی جواب کا مطلب ہے کہ اخراج زمین کی جانب ہے جبکہ دور جانب مثبت جواب کا مطلب ہے کہ اخراج $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب ہے۔دونوں جانب اخراج ہی ہے لہٰذا سطحی کثافتِ بار دونوں جگہوں پر مثبت ہی ہے۔

اس مثال سے صاف ظاہر ہے کہ نلکی کا بار بالکل اس طرح عمل کرتا ہے جیسے برقی زمین سے $8.66\,\mathrm{m}$ فاصلے پر باریک بار بردار تار جس پر $2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہو۔نلکی سے پیدا ہم قوہ سطحیں اسی فرضی لکیری کثافتِ بار کی تار سے حاصل کی جاتی ہیں۔

مشق 5.5: مساوات 5.74 کو ثابت کریں۔

سوالات

سوال 5.1: نلکی محدد میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = 50e^{-1.5z}(\rho^2 \boldsymbol{a}_\rho + \boldsymbol{a}_\text{z}) \,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ دی گئی ہے۔الف) سطح $z = 0$ اور $z = 1$ پر رداس $0 < \rho < 1$ کی ٹکیا سے $\boldsymbol{a}_\text{z}$ سمت میں گزرتی برقی رو دریافت کریں۔ ب) بند بیلن $0 \le \rho \le 1$ ، $0 \le z \le 1$ سے خارج کل برقی رو حاصل کریں۔

جوابات: $157\,\text{A}$ ، $35\,\text{A}$ ، $41\,\text{A}$

سوال 5.2: کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = \frac{550 \sin 2\theta}{r^2+6} \,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ دی گئی ہے۔کروی سطح $r = 0.5$ ، $0.1\pi \le \theta \le 0.25\pi$ ، $0 \le \phi \le 2\pi$ سے رداسی سمت میں خارج کل برقی رو حاصل کریں۔اس سطح پر اوسط کثافت برقی رو دریافت کریں۔

جوابات: $29.86\,\text{A}$ ، $77.9\,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

سوال 5.3: دو متوازی سطحیں $z = 0$ اور $z = 10\,\text{mm}$ پر پائے جاتے ہیں جن کے درمیان $1000\,\text{V}$ کا برقی دباو ہے۔نچلی سطح سے الیکٹران صفر ابتدائی رفتار کے ساتھ خارج ہو کر بالائی سطح کی جانب اسراع پذیر ہوتے ہیں جہاں انہیں وصول کیا جاتا ہے۔الیکٹران کا بار $-1.6 \times 10^{-19}\,\text{C}$ جبکہ اس کی کمیت $9.1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$ ہے۔نچلی سطح سے کل $50\,\mu\text{A}$ برقی رو $0.1\,\text{mm}$ رداس کے شعاع کی صورت میں خارج ہوتی ہے۔چادروں کے درمیان E حاصل کریں۔اسراع پذیر الیکٹران کی رفتار $v(t)$ کی مساوات حاصل کریں۔اسی طرح $z(t)$ اور $v(z)$ بھی حاصل کریں۔کثافت برقی رو اور حجمی کثافت بار کے مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $a(t) = -10^5 \boldsymbol{a}_\text{z} \,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $v(t) = 1.758 \times 10^{16} t \,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $z(t) = 8.792 \times 10^{15} t^2\,\text{m}$ ، $v(z) = 1.87 \times 10^8 \sqrt{z} \,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $1592\,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ ، $\frac{-8.51 \times 10^{-6}}{\sqrt{z}}\,\text{C}/\text{m}^3$

سوال 5.4: کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = \frac{J_0 e^{-\alpha z}}{(y+1)(x+1)} \boldsymbol{a}_\text{z}$ کی صورت میں سطح $z = 0$ ، $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ سے گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: $0.48 J_0$

سوال 5.5: کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = 3xyz\boldsymbol{a}_\text{x} + 2x^2yz^2\boldsymbol{a}_\text{y} - 5xy^2z^2$ کی صورت میں نقطہ $N(7, -4, 2)$ پر $1\,\text{m}$ لمبائی اطراف کے مکعب سے کتنی برقی رو خارج ہوتی ہے؟ مکعب کے اطراف کارتیسی محدد کے متوازی ہیں جبکہ نقطہ N اس کا وسطی نقطہ ہے۔مکعب میں بار کس شرح سے بڑھ رہی ہے؟

جواب: $1875\,\mathrm{A}$ ، $-1875\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$

سوال 5.6: سلیکان کی موصلیت $1200\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے۔سلیکان کا پچر $0 \le z \le 0.08$ ، $0.02 \le \rho \le 0.07$ ، $0 \le \phi \le 0.3\pi$ شکل رکھتا ہے۔برقی شدت $\boldsymbol{E} = \frac{0.005}{\rho}\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں پچر میں برقی رو اور اس کی مزاحمت حاصل کریں۔

جوابات: $0.6\,\mathrm{A}$ ، $6\,\mathrm{m\Omega}$

سوال 5.7: برقی شدت $\boldsymbol{E} = \frac{0.005}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہونے کی صورت میں سوال 5.6 کو دوبارہ حل کریں۔

جوابات: $0.3468\,\mathrm{A}$ ، $18\,\mathrm{m\Omega}$

سوال 5.8: پاکستان میں برقی طاقت کی پیداوار اور منتقلی واپڈا[57] کے ذمہ ہے۔اگرچہ تانبہ کی موصلیت نہایت عمدہ ہے لیکن تانبہ مہنگا عنصر ہے لہٰذا برقی طاقت کی منتقلی کے لئے المونیم کی تار استعمال کی جاتی ہے۔المونیم ازخود کمزور عنصر ہے لہٰذا المونیم کے تاروں کو سٹیل کے تار کے گرد لپیٹا جاتا ہے۔فرض کریں کہ $2\,\mathrm{mm}$ رداس کے لوہے کی تار پر $3\,\mathrm{mm}$ المونیم کی تہہ چڑھائی جاتی ہے۔ایسی ایک کلو میٹر لمبی تار کی مزاحمت حاصل کریں۔المونیم اور لوہے کی موصلیت بالترتیب $3.82 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ اور $1.03 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔

جواب: $377.4\,\mathrm{m\Omega}$

سوال 5.9: ایک خطے میں کثافت برقی رو کو $\boldsymbol{J} = 0.02re^{-1000t}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔لمحہ $t = 1\,\mathrm{ms}$ پر رداس $r = 3$ کے کرہ سے کتنی برقی رو خارج ہو گی۔استمراری مساوات $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$ استعمال کرتے ہوئے ρ_h حاصل کریں۔ایسا کرتے ہوئے $t \to \infty$ پر $\rho_h \to 0$ لیں۔حجمی کثافت بار ρ_h کی رفتار کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $2.5\,\mathrm{A}$ ، $\rho_h = 60e^{-1000t}\,\mathrm{\mu C/m^3}$ ، $333r\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

سوال 5.10: برقی ہیٹر[58] عموماً نائیکروم کی تار سے بنائے جاتے ہیں۔گھریلو $220\,\mathrm{V}$ اور $50\,\mathrm{Hz}$ پر چلنے والے $1\,\mathrm{kW}$ طاقت کے ہیٹر کے تار کا قطر حاصل کریں اگر تار کی لمبائی $4\,\mathrm{m}$ ہو۔اس طاقت پر تار میں کثافت برقی رو حاصل کریں۔صفحہ 829 پر دیے ضمیمے کی مدد لیں۔

---

[57] WAPDA
[58] heater

جواب: $0.324\,\text{mm}$ ، $55\,\frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$

سوال 5.11: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری کثافتِ بار

$$\rho_L = 5\,\frac{\text{nC}}{\text{m}} \qquad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5,3,1)$ پر $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D} = \frac{5\times10^{-9}(5\boldsymbol{a}_{\text{X}}-1\boldsymbol{a}_{\text{Z}})}{2\pi\times26}$

سوال 5.12: لامحدود موصل زمینی سطح $z = 0$ رکھتے ہوئے سوال 5.11 کو دوبارہ حل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D} = \frac{5\times10^{-9}(40\boldsymbol{a}_{\text{X}}-112\boldsymbol{a}_{\text{Z}})}{2\pi\times884}$

سوال 5.13: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری کثافتِ بار

$$\rho_L = 5\,\frac{\text{nC}}{\text{m}} \qquad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z = 0$ پر لامحدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5,3,0)$ مقام پر سطحی کثافتِ بار حاصل کریں۔

جواب: $-0.1097\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

سوال 5.14: مشق 5.3 میں $300\,\text{K}$ درجہ حرارت پر سلیکان اور جرمینیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔ اگر سلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی $10^7 \times 1$ سلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کیا جائے تو سلیکان کی موصلیت کیا ہو گی۔ سلیکان کی تعدادی کثافت 5×10^{28} ایٹم فی مربع میٹر ہے۔(ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہٰذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

جواب: $800\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$

سوال 5.15: صفحہ 197 پر مثال 5.6 میں لامحدود موصل سطح $z = 0$ میں $(0, 0, z)$ پر پائے جانے والے نقطہ بار Q سے پیدا سطحی کثافتِ بار ρ_S حاصل کیا گیا۔ موصل سطح میں پائے جانے والا کل بار سطحی تکمل سے حاصل کریں۔

جواب: $-Q$

سوال 5.16: صفحہ 184 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد بار مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ ایک ایمپیئر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے بار کا اخراج کرے گا۔

جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔

سوال 5.17: مساوات 5.75 میں $\cosh^{-1}\frac{h}{b} = \ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}$ لکھا گیا ہے۔ اسے ثابت کریں۔

سوال 5.18: پانچ میٹر رداس کی موصل نلکی کا محور برقی زمین سے تیرہ میٹر پر ہے۔ نلکی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباو ہے۔

- ایسی لکیری کثافتِ بار کا زمین سے فاصلہ اور اس کا ρ_L حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔
- موصل نلکی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کا رداس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلہ دریافت کریں۔
- نلکی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی کثافتِ بار حاصل کریں۔

جوابات: $12\,\mathrm{m}$، $3.46\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$، $13.4\,\mathrm{m}$، $18\,\mathrm{m}$، $1.65\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m^2}}$ اور $0.73\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m^2}}$

سوال 5.19: مندرجہ ذیل صورتوں میں موصل میں $|\boldsymbol{J}|$ حاصل کریں۔ الف) حرکت پذیری $5.2 \times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ ، $\rho_h = -4 \times 10^9\,\mathrm{C/m^3}$ اور برقی شدت $72\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ ب) رفتار بہاو $30\,\frac{\mathrm{\mu m}}{\mathrm{s}}$ ہے جبکہ الیکٹران کی تعدادی کثافت 5.5×10^{28} فی مربع میٹر ہے۔ پ) موصلیت $2.5 \times 10^6\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ جبکہ برقی شدت $50\,\mathrm{mV}$ ہے۔

جوابات: $1.5\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m^2}}$ ، $0.26\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m^2}}$ ، $0.125\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m^2}}$

سوال 5.20: نلکی محدد میں رداس $\rho = 0.2$ اور $\rho = 0.5$ پر موصل نلکی چادر پائے جاتے ہیں جبکہ ان چادروں کے درمیان خلاء میں $V = 150\rho^3$ برقی دباو پایا جاتا ہے۔ الف) اندرونی اور بیرونی نلکی چادر پر سطحی کثافت بار دریافت کریں۔ ب) دونوں چادروں کے درمیان خطہ $0 < z < 1$ ، $0.2 < \rho < 0.5$ میں کل بار حاصل کریں۔ پ) خطہ $0 < z < 1$ میں کل بار حاصل کریں۔یہاں چادروں پر اور خلاء میں پائے جانے والے تمام کو شامل کریں۔یاد رہے کہ مثبت موصل چادر سے برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے۔

جوابات: $-0.159\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، $0.996\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، $-2.93\,\text{nC}$ ، 0

سوال 5.21: گریفائٹ سے بنی نلکی جس کی لمبائی $4\,\text{cm}$ ، اندرونی رداس $\rho = 5\,\text{cm}$ اور بیرونی رداس $\rho = 7\,\text{cm}$ ہے میں $2\,\text{A}$ کی برقی رو رداسی سمت میں گزر رہی ہے۔ گریفائٹ کی موصلیت $7 \times 10^4\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہے۔ نلکی میں $\boldsymbol{J}$ ، $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ نلکی کے اندرونی اور بیرونی گول سطحوں کے درمیان برقی دباو V حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیان مزاحمت R حاصل کریں۔ نلکی میں طاقت کا ضیاع $V \times I$ اور حجمی تکمل $\iiint \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}h$ سے حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{J} = \frac{7.96}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho$ ، $\boldsymbol{E} = \frac{1.14e-4}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho$ ، $V = 38.25\,\mu\text{V}$ ، $R = 19.12\,\mu\Omega$ ، $76\,\mu\text{W}$ ، $76\,\mu\text{W}$

سوال 5.22: رقبہ A کی ایک موصل چادر $z = 0$ اور دوسری $z = d$ پر رکھی گئی ہے۔چادروں کے درمیانی خطے میں موصلیت $\sigma(z) = \sigma_0 e^{-z}$ ہے جہاں σ_0 مستقل ہے۔چادر $z = 0$ کو صفر وولٹ پر رکھا جاتا ہے جبکہ چادر $z = d$ کو V_0 برقی دباو پر رکھا جاتا ہے۔ الف) دونوں چادروں کے درمیان مزاحمت حاصل کریں۔ ب) چادروں کے مابین برقی رو حاصل کریں۔ پ) چادروں کے درمیان کثافت برقی رو اور برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔

جوابات: $R = \frac{e^d-1}{A\sigma_0}$ ، $I = \frac{A\sigma_0 V_0}{e^d-1}$ ، $\boldsymbol{J} = -\frac{V_0\sigma_0}{e^d-1}\boldsymbol{a}_\text{Z}$ ، $\boldsymbol{E} = -\frac{V_0 e^z}{e^d-1}\boldsymbol{a}_\text{Z}$

سوال 5.23: خلاء میں برقی دباو $V = 50(\rho^2+1)z\sin\phi\,\text{V}$ دی گئی ہے۔ہم قوہ سطح $V = 100\,\text{V}$ موصل سطح کو ظاہر کرتی ہے۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔اس سطح پر نقطہ $(0.65, 0.25\pi, z)$ دیا گیا ہے۔اس نقطے پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے سطحی کثافت بار $|\rho_S|$ حاصل کریں۔

جوابات: $(\rho^2+1)z\sin\phi = 2$ ، $\boldsymbol{E} = -91\boldsymbol{a}_\rho - 154\boldsymbol{a}_\phi - 50\boldsymbol{a}_\text{Z}$ ، $|\rho_S| = 1.65\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

سوال 5.24: مثبت z خطے میں برقی دباو $V = \frac{50z(x+y)}{x^2+9}\,\text{V}$ دی گئی ہے۔موصل سطح $z = 0$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔موصل سطح پر سطحی کثافت بار حاصل کریں۔ سطح پر $2 < x < 5$ ، $3 < y < 6$ کل بار حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E} = -\frac{50(x+y)}{x^2+9}\boldsymbol{a}_\text{Z}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $\rho_S = -\frac{50\epsilon_0(x+y)}{x^2+9}\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $-1.52\,\text{nC}$

سوال 5.25: خلاء میں $V = 50\ln\frac{(x+1)^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}\,\text{V}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $N(3,1,2)$ پر موصل سطح ہے۔اس سطح پر $\boldsymbol{E}$ اور ρ_S حاصل کریں۔ سطح پر عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E} = 13.33\boldsymbol{a}_\text{X} - 10\boldsymbol{a}_\text{Y}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $\rho_S = 148\,\frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ ، $\boldsymbol{a}_N = \frac{4}{5}\boldsymbol{a}_\text{X} - \frac{3}{5}\boldsymbol{a}_\text{Y}$ ؛ چونکہ ہمیں یہ نہیں معلوم کہ موصل سطح نقطہ N کے کس جانب ہے لہٰذا سطحی کثافت بار مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔یوں اکائی سمتیہ کی سمت الٹ بھی ممکن ہے۔

سوال 5.26: نقطہ بار $Q = 8\pi\,\mu\text{C}$ موصل زمین $z = 0$ کے قریب نقطہ $(2,0,4)$ اور $(-2,0,4)$ پر پائے جاتے ہیں۔الف) محدد y پر $\boldsymbol{D}$ کی مساوات حاصل کریں۔یاد رہے کہ برقی زمین میں بار کے عکس بھی کردار ادا کریں گے۔ ب) نقطہ $(0,0,0)$ پر سطحی کثافت بار حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{D} = -16\left[\frac{1}{[(x+2)^2+16]^{3/2}} + \frac{1}{[(x-2)^2+16]^{3/2}}\right]\boldsymbol{a}_\text{Z}\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $\rho_S = -0.36\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

سوال 5.27: سطح $x = 0$ برقی زمین ہے۔لکیری کثافت بار $2\,\frac{\text{nC}}{\text{m}}$ مقام $y = 3$ ، $x = 2$ پر z محدد کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ لکیری کثافت بار $-5\,\frac{\text{nC}}{\text{m}}$ مقام $y = 5$ ، $x = 4$ پر z محدد کے متوازی پایا جاتا ہے۔نقطہ $N(7,2,3)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔

جواب: $46.4\,\text{V}$

سوال 5.28: نیم موصل ٹکڑے کی لمبائی $15\,\text{mm}$ ، چوڑائی $5\,\text{mm}$ اور موٹائی $2\,\text{mm}$ ہے۔اگر الیکٹران اور خول کی تعدادی کثافت بالترتیب $1.5\times10^{18}\,/\text{m}^3$ اور $2\times10^{15}\,/\text{m}^3$ ہوں جبکہ ان کی حرکت پذیری $\mu_e = 0.08\,\frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$ اور $\mu_h = 0.0025\,\frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$ ہوں تب لمبائی جانب نیم موصل ٹکڑے کی مزاحمت حاصل کریں۔

جواب: $78\,\text{k}\Omega$

سوال 5.29: کوارٹز میں $\boldsymbol{E} = -20\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 35\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 15\boldsymbol{a}_{\text{z}} \,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ میدان پایا جاتا ہے۔الف) کتاب کے آخر میں صفحہ 829 پر دیے ضمیمے سے کوارٹز کا مستقل ϵ_R دریافت کرتے ہوئے χ_e حاصل کریں۔ ب) کوارٹز میں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{P}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\epsilon_R = 3.8$ ، $\chi_e = 2.8$ ، $\boldsymbol{D} = -0.67\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 1.18\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.50\boldsymbol{a}_{\text{z}} \,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، $\boldsymbol{P} = -0.50\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 0.87\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.37\boldsymbol{a}_{\text{z}} \,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

سوال 5.30: کسی مخصوص حرارت اور میکانی دباو پر ہائیڈروجن گیس (H_2) کی تعددی کثافت $6 \times 10^{25} \,/\text{m}^3$ ہے۔اگر اسے $2400 \,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ کے برقی میدان میں رکھا جائے تو ہر قطبی ایٹم میں مثبت اور منفی خطوں کے درمیان اوسطاً $6.6 \times 10^{-19} \,\text{m}$ فاصلہ پایا جاتا ہے۔ایسی صورت میں ہائیڈروجن کے مستقل χ_e اور ϵ_R حاصل کریں۔

جوابات: $\chi_e = 0.000298$ ، $\epsilon_R = 1.000298$

سوال 5.31: خطہ-الف میں $\boldsymbol{E}_1 = 25\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 10\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 15\boldsymbol{a}_{\text{z}} \,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔یہ خطہ محدد کے مبدا کو چھوتا ہے۔برقی مستقل $\epsilon_{R1} = 1$ اور $\epsilon_{R2} = 2.5$ ہیں۔مبدا پر سمتیہ $\boldsymbol{A} = 45\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 20\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 10\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ خطہ-الف کا عمودی سمتیہ ہے جس کی سمت خطہ-الف سے خطہ-ب کی جانب ہے۔سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا $\boldsymbol{E}_1$ اور $\boldsymbol{E}_2$ کے ساتھ زاویہ حاصل کریں۔دونوں خطوں کے سرحدی سطح کے عمودی اور متوازی، $\boldsymbol{E}_1$ کے اجزاء حاصل کریں۔خطہ-ب میں $\boldsymbol{E}_2$ بھی حاصل کریں۔

جوابات: 60° ، 77° ، $13.8\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 6.1\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 3.1\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ، $11.2\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 16.1\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 18\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ، $\boldsymbol{E}_2 = 16.7\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 13.7\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 16.8\boldsymbol{a}_{\text{z}} \,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 5.32: ہم محوری تار کے اندرونی تار کا بیرونی رداس $6 \,\text{mm}$ ہے جبکہ بیرونی تار کا اندرونی رداس $15 \,\text{mm}$ ہے۔موصل تاروں کے درمیان دو مختلف ذو برق استعمال کئے جاتے ہیں۔اندرونی تار پر $4 \,\text{mm}$ کی پہلی تہہ کا $\epsilon_{R1} = 1.5$ ہے جبکہ بقایا حصے میں ذو برق کا $\epsilon_{R2} = 2.5$ ہے۔اندرونی تار پر $15 \,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ہونے کی صورت میں دونوں تاروں کے درمیان برقی دباو حاصل کریں۔

جواب: $5.11 \,\text{V}$

سوال 5.33: رداس $6 \,\text{mm}$ کے موصل کرہ پر $\epsilon_{R1} = 1.5$ برقی مستقل کے ذو برق کی $4 \,\text{mm}$ موٹی تہہ پہلی چڑھائی۔اس کے اوپر $\epsilon_{R2} = 2.5$ برقی مستقل کے ذو برق کی $5 \,\text{mm}$ موٹی دوسری تہہ چڑھائی جاتی ہے۔بیرونی موصل کرہ کا اندرونی رداس $15 \,\text{mm}$ ہے۔اندرونی کرہ پر $15 \,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ہونے کی صورت میں دونوں موصل کرہ کے درمیان برقی دباو حاصل کریں۔

جواب: $3.52\,\mathrm{V}$

سوال 5.34: متوازی چادر برق گیر کے چادروں کے درمیان فاصلہ $1\,\mathrm{mm}$ ہے جبکہ چادر کا رقبہ $100\,\mathrm{cm^2}$ ہے۔چادروں کے درمیان ذو برق کا $\epsilon_R = 5$ ہے۔الف) برق گیر کا C حاصل کریں۔ب) برق گیر کی چادروں کے مابین کچھ دیر $50\,\mathrm{V}$ کی سپلائی جوڑی جاتی ہے تا کہ برق گیر اتنی برقی دباو حاصل کر لے۔اس کے بعد سپلائی کو ہٹا دیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں E ، D ، Q اور برق گیر میں موجود توانائی W حاصل کریں۔پ) اب اگر چادروں کے درمیان سے ذو برق ہٹا دیا جائے تب Q کتنا ہو گا۔ E ، D اور برق گیر میں موجود توانائی W دوبارہ حاصل کریں۔ساتھ ہی ساتھ برقی دباو بھی حاصل کریں۔

جوابات: الف) $442.7\,\mathrm{pF}$ ب) $50\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ ، $2.21\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ ، $22.13\,\mathrm{nC}$ ، $553\,\mathrm{nJ}$ پ) $22.13\,\mathrm{nC}$ ، $250\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ ، $2.21\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ ، $2.77\,\mathrm{\mu J}$ ، $250\,\mathrm{V}$

سوال 5.35: موصل چادر کے متوازی $25\,\mathrm{mm}$ فاصلے پر $7\,\mathrm{mm}$ رداس کی موصل تار پائی جاتی ہے۔چادر صفر وولٹ جبکہ تار $2\,\mathrm{kV}$ پر ہے۔الف) فی میٹر برقی گنجائش حاصل کریں۔ب) تار پر فی میٹر بار حاصل کریں۔ پ) چادر کے قریبی جانب تار کی سطح پر برقی شدت حاصل کریں۔

جوابات: $28.6\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}}$ ، $57.2\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ ، $-195.8\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$

باب 6

پوئسن اور لاپلاس مساوات

گاوس کے قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{6.1}$$

میں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور حاصل جواب میں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_h$$

یعنی

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ہر طرف یکساں[1] خاصیت کے خطے میں ϵ اٹل قیمت رکھتا ہے۔مساوات 6.2 پوئسن[2] مساوات کہلاتی ہے۔

آئیں کارتیسی محدد میں پوئسن مساوات کی شکل حاصل کریں۔یاد رہے کہ کسی بھی متغیرہ $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

---

homogeneous[1]
Poisson equation[2]

کے برابر ہوتا ہے۔اب چونکہ

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{a}_\text{X} + \frac{\partial V}{\partial y} \boldsymbol{a}_\text{Y} + \frac{\partial V}{\partial z} \boldsymbol{a}_\text{Z}$$

کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{6.3}$$

ہو گا۔

عموماً $\nabla \cdot \nabla$ کو ∇^2 لکھا جاتا ہے۔اس طرح پوئسن مساوات کی کارتیسی شکل

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.4}$$

حاصل ہوتی ہے۔

حجمی کثافتِ بار کی غیر موجودگی، یعنی $\rho_h = 0$ کی صورت میں مساوات 6.2

$$\nabla^2 V = 0 \tag{6.5}$$

صورت اختیار کر لے گی جسے لاپلاس[3] مساوات کہتے ہیں۔جس حجم کے لئے لاپلاس کی مساوات لکھی گئی ہو اس حجم میں حجمی کثافتِ بار صفر ہوتا ہے البتہ اس حجم کی سرحد پر نقطہ بار یا سطحی کثافتِ بار پائی جا سکتیں ہیں۔عموماً سطح پر موجود بار سے حجم میں پیدا میدان ہی حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے۔کارتیسی محدد میں لاپلاس کی مساوات

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{6.6}$$

صورت رکھتی ہے۔∇^2 کو لاپلاسی عامل[4] کہا جاتا ہے۔

لاپلاس مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی بار سے خالی حجم میں ہر صورت $\nabla^2 V = 0$ ہو گا۔حجم کی شکل کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس کی سرحد پر کسی بھی قسم کا بار ہو سکتا ہے۔یہ ایک دلچسپ حقیقت ہے۔حجم کی سرحد پر عموماً ایک یا ایک

[3] Laplace equation
[4] Laplacian operator

سے زیادہ موصل سطحیں ہوتی ہیں جن پر برقی دباو V_0، V_1، V_2 وغیرہ پایا جاتا ہے اور حجم کے اندر میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ کبھی کبھار موصل سطح پر بار یا $\boldsymbol{E}$ معلوم ہو گا جس سے حجم کے اندر میدان درکار ہو گا۔اسی طرح کبھی کبھار سرحد پر ایک جگہ بار اور اس پر دوسری جگہ برقی دباو اور اس پر تیسری جگہ عمودی بہاو دیا گیا ہو گا جبکہ حجم کے اندر کے متغیرات درکار ہوں گے۔اس کے برعکس ایسا بھی ممکن ہے کہ حجم میں میدان یا برقی دباو معلوم ہو اور ان معلومات سے سرحد پر بار یا بہاو یا برقی دباو حاصل کرنا ضروری ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ $V = 0$ لاپلاس مساوات کا حل ہے۔یہ حل برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتا ہے۔ہمیں عموماً ایسے مسئلوں سے دلچسپی ہوتی ہے جہاں برقی دباو پایا جائے۔اس لئے لاپلاس مساوات کے اس حل کو ہم عموماً نظرانداز کریں گے۔

ہم نے لاپلاس کی مساوات برقی دباو کے لئے حاصل کی۔دیکھا یہ گیا ہے کہ انجینئری کے دیگر شعبوں میں کئی متغیرات لاپلاس کی مساوات پر پورا اترتے ہیں۔یہ مساوات حقیقی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب میں ہم ایسی کئی مثالیں دیکھیں گے لیکن پہلے یہ حقیقت جاننا ضروری ہے کہ مساوات 6.6 کا کوئی بھی جواب ان تمام اقسام کی سرحدی معلومات کے لئے درست ہو گا۔یہ انتہائی تشویشناک بات ہو گی اگر دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے جوابات حاصل کرنے کے بعد معلوم ہو کہ ان میں سے ایک ٹھیک اور دوسرا غلط جواب ہے۔آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں کہ کسی بھی سرحدی حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا صرف اور صرف ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

مثال 6.1: لاپلاس اور پوئسن کی مساوات حاصل کرتے وقت پورے خطے میں یکساں ϵ تصور کی گئی۔غیر یکساں ϵ کی صورت میں ϵ کی تبدیلی پر وہ شرط حاصل کریں جس سے لاپلاس اور پوئسن مساوات برقرار رہتے ہیں۔

حل: مساوات $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h$ سے شروع کرتے ہیں جس میں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ پر کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔سمتی $\boldsymbol{E}$ اور غیر سمتی ϵ کی صورت میں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E} \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_h$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس میں $E = -\nabla V$ پر کرنے سے

$$-\nabla V \cdot \nabla \epsilon - \epsilon \nabla^2 V = \rho_h$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے پوئسن مساوات اس صورت حاصل ہو گی جب $\nabla V \cdot \nabla \epsilon = 0$ یعنی $E \cdot \nabla \epsilon = 0$ ہو۔ایسا ہونے کا مطلب ہے کہ کسی بھی نقطے پر ϵ میں تبدیلی کی سمت، اسی نقطے پر E کے سمت کے عمودی ہو۔

6.1 مسئلہ یکتائی

تصور کریں کہ ہم دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 حاصل کرتے ہیں۔یہ دونوں جوابات لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا

$$\nabla^2 V_1 = 0$$
$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0 \tag{6.7}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب اگر سرحد پر برقی دباو V_s ہو تب دونوں جوابات سرحد پر یہی جواب دیں گے یعنی سرحد پر

$$V_{1s} = V_{2s} = V_s$$

یا

$$V_{1s} - V_{2s} = 0$$

ہو گا۔صفحہ 167 پر مساوات 4.83

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)$$

کا ذکر کیا گیا جو کسی بھی غیر سمتی مقدار V اور کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کے لئے درست ہے۔موجودہ استعمال کے لئے ہم $V_1 - V_2$ کو غیر سمتی اور $\nabla(V_1 - V_2)$ کو سمتیہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &= (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) \\ &= (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] + [\nabla(V_1 - V_2)]^2\end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں جس کا تکمل پورے حجم کے لئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] \,\mathrm{d}h = \int_{\text{حجم}} (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] \,\mathrm{d}h + \int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 \,\mathrm{d}h \tag{6.8}$$

ہو گا۔صفحہ 123 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے مطابق کسی بھی حجمی تکمل کو بند سطحی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں حجم کی سطح پر سطحی تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ کو سطحی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] \,\mathrm{d}h = \oint_{\text{سطح}} [(V_{1s} - V_{2s})\nabla(V_{1s} - V_{2s})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحدی سطح پر $V_{1s} = V_{2s}$ ہونے کی بنا پر $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔مساوات 6.8 میں دائیں ہاتھ پہلے جزو میں مساوات 6.7 کے تحت $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔اس طرح مساوات 6.8 سے

$$\int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 \,\mathrm{d}h = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی تکمل کا جواب صرف دو صورتوں میں صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔پہلی صورت یہ ہے کہ کچھ خطے میں تکمل کی قیمت مثبت اور کچھ خطے میں اس کی قیمت منفی ہو۔اگر مثبت اور منفی حصے بالکل برابر ہوں تب تکمل صفر کے برابر ہو گا۔موجودہ صورت میں $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ کا تکمل لیا جا رہے ہے اور کسی بھی متغیر کا مربع کسی صورت منفی نہیں ہو سکتا لہٰذا موجودہ تکمل میں ایسا ممکن نہیں ہے۔تکمل صفر ہونے کی دوسری صورت یہ ہے کہ صفر کا تکمل حاصل کیا جا رہا ہو لہٰذا

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

ہی ہو گا یعنی

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

کے برابر ہے۔

اب $\nabla(V_1-V_2)=0$ کا مطلب ہے کہ V_1-V_2 کی ڈھلوان ہر صورت صفر کے برابر ہے۔یہ تب ہی ممکن ہے جب V_1-V_2 کی قیمت کسی بھی محدد کے ساتھ تبدیل نہ ہو یعنی اگر تکمل کے پورے خطے میں

$$V_1-V_2=\text{قیمت اٹل}$$

ہو۔حجم کی سرحد پر بھی یہ درست ہو گا۔مگر سرحد پر

$$V_1-V_2=V_{1s}-V_{2s}=0$$

کے برابر ہے لہٰذا یہ اٹل قیمت ازخود صفر ہے۔یوں

$$V_1=V_2 \tag{6.9}$$

ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ دونوں جوابات بالکل برابر ہیں۔

مسئلہ یکتائی کو پوئسن مساوات کے لئے بھی بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔پوئسن مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 پوئسن مساوات پر پورا اتریں گے لہٰذا $\nabla^2V_1=-\frac{\rho_h}{\epsilon}$ اور $\nabla^2V_2=-\frac{\rho_h}{\epsilon}$ لکھے جا سکتے ہیں جن سے $\nabla^2(V_1-V_2)=0$ حاصل ہوتا ہے۔سرحد پر اب بھی $V_{1s}-V_{2s}=0$ ہو گا۔یہاں سے آگے ثبوت بالکل یکتائی لاپلاس کی ثبوت کی طرح ہے۔

مسئلہ یکتائی کے تحت سرحدی حقائق کے لئے حاصل کئے گئے پوئسن یا لاپلاس مساوات کے جوابات ہر صورت برابر ہوں گے۔یہ ممکن نہیں کہ دو مختلف جوابات حاصل کئے جائیں۔

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے

تصور کریں کہ سرحدی شرائط لاگو کرنے کے بغیر لاپلاس مساوات کے دو حل V_1 اور V_2 حاصل کئے جائیں۔یوں

$$\nabla^2V_1=0$$
$$\nabla^2V_2=0$$

لکھا جا سکتا ہے جن سے

$$\nabla^2(c_1V_1+c_2V_2)=0$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ لاپلاس مساوات خطی[5] ہے۔

[5] linear

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات

نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات صفحہ 155 پر مساوات 4.57 دیتی ہے جس سے

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \\ &= -E_\rho \boldsymbol{a}_\rho - E_\phi \boldsymbol{a}_\phi - E_z \boldsymbol{a}_\mathrm{z}\end{aligned} \tag{6.10}$$

لکھتے ہیں جہاں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ کا استعمال کیا گیا۔ نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات صفحہ 119 پر مساوات 3.37 دیتا ہے۔اسی مساوات کو سمتیہ $\boldsymbol{E}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

لکھتے ہیں۔اس میں بائیں ہاتھ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور دائیں ہاتھ مساوات 6.10 سے قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دونوں جانب منفی علامت کٹ جاتے ہیں۔اس کو یوں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{نلکی} \tag{6.11}$$

لکھا جا سکتا ہے جو نلکی محدد میں لاپلاسی مساوات ہے۔

کروی محدد میں بالکل اسی طرح

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad \text{کروی} \tag{6.12}$$

جبکہ عمومی محدد میں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{k_1 k_2 k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2 k_3}{k_1}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_1 k_3}{k_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1 k_2}{k_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right] \quad \text{عمومی} \tag{6.13}$$

حاصل کی جا سکتی ہے۔

مشق 6.1: مساوات 6.12 حاصل کریں۔

6.4 لاپلاس مساوات کے حل

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔سادہ ترین مسئلے، سادہ تکمل سے ہی حل ہو جاتے ہیں۔ہم اسی سادہ تکمل کے طریقے سے کئی مسئلے حل کریں گے۔یہ طریقہ صرف اس صورت قابل استعمال ہوتا ہے جب میدان یک سمتی ہو یعنی جب یہ محدد کے تین سمتوں میں سے صرف ایک سمت میں تبدیل ہوتا ہو۔چونکہ اس کتاب میں محدد کے تین نظام استعمال کئے جا رہے ہیں لہٰذا معلوم ایسا ہوتا ہے کہ کل نو مسئلے ممکن ہیں۔درحقیقت ایسا نہیں ہے۔کارتیسی محدد میں x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل بالکل ویسا ہی ہے جیسے y یا z سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل۔اسی طرح x محدد سے کسی زاویے پر سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتا میدان بھی بالکل اسی طرح حل ہو گا۔یوں کارتیسی محدد میں کسی بھی سمت میں تبدیل ہوتے میدان اور x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کے حل بالکل ایک جیسے ہوں گے لہٰذا کارتیسی محدد میں صرف ایک مسئلہ حل کرنا درکار ہے۔نلکی محدد میں z محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو ہم کارتیسی محدد میں دیکھ لیں گے لہٰذا یہاں کل دو مسئلے حل کرنا درکار ہے جبکہ کروی محدد میں بھی دو مسئلے پائے جاتے ہیں۔آئیں ان تمام کو باری باری حل کریں۔

مثال 6.2: تصور کریں کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتی ہو۔دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات کا حل کیا ہو گا۔اس پر بعد میں غور کریں گے کہ حقیقت میں ایسی کون سی صورت ہو گی کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

شکل اختیار کر لے گا۔چونکہ V کی قیمت صرف x پر منحصر ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات کو

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔پہلی مرتبہ تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = A$$

حاصل ہوتا ہے۔دوبارہ تکمل لیتے ہوئے

$$V = Ax + B \tag{6.14}$$

حاصل ہوتا ہے جو لاپلاس مساوات کا حل ہے۔یہ کسی بھی سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے کو ظاہر کرتا ہے جہاں اس لکیر کو x کہا جائے گا۔A اور B دوگنا تکمل کے مستقل ہیں جن کی قیمتیں سرحدی شرائط کی مدد سے حاصل کی جاتی ہیں۔

آئیں مساوات 6.14 کا مطلب سمجھیں۔اس کے مطابق برقی دباو کا دارومدار صرف x پر ہے جبکہ y اور z کا اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں۔x کی کسی بھی قیمت پر یعنی $x = x_0$ سطح پر V کی قیمت اٹل ہو گی۔ایسی ہم قوہ سطحیں x محدد کے عمودی ہوں گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 6.14 یہ متوازی چادر برق گیر (کپیسٹر) کا حل ہے۔

ہم ایسے برق گیر (کپیسٹر) کے دونوں چادروں پر برقی دباو اور چادروں کا x محدد پر مقام بیان کرتے ہوئے A اور B کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں۔یوں اگر برق گیر (کپیسٹر) کی پہلی چادر x_1 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_1 ہے اور اسی طرح دوسری چادر x_2 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_2 ہے تب

$$\begin{aligned} V_1 &= Ax_1 + B \\ V_2 &= Ax_2 + B \end{aligned}$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned} A &= \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \\ B &= \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں چادروں کے درمیان

$$V=\left(\frac{V_1-V_2}{x_1-x_2}\right)x+\frac{V_2x_1-V_1x_2}{x_1-x_2} \tag{6.15}$$

ہو گا۔

اگر ہم پہلی چادر کو $x=0$ اور دوسری چادر کو d پر تصور کرتے جبکہ اسی ترتیب سے ان کی برقی دباو کو صفر اور V_0 کہتے تب ہمیں

$$V=\frac{V_0x}{d} \tag{6.16}$$

حاصل ہوتا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔

باب 5 میں ہم نے سطحی کثافتِ بار سے بالترتیب برقی میدان، برقی دباو اور کپیسٹنس حاصل کئے۔موجودہ باب میں ہم پہلے لاپلاس کی مساوات کے حل سے برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔برقی دباو سے میدان بذریعہ $\boldsymbol{E}=-\nabla V$ اور بہاو بذریعہ $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے سطحی کثافتِ بار حاصل کرتے ہیں جو عمودی بہاو کے برابر ہے۔سطحی کثافتِ بار سے سطح پر کل بار حاصل کرتے ہوئے $C=\frac{Q}{V}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ان اقدام کو بالترتیب دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

- لاپلاس مساوات حل کرتے ہوئے برقی دباو V حاصل کریں۔
- تکمل کی سرحدی شرائط سے تکمل کے مستقل کی قیمتیں حاصل کریں۔
- برقی دباو سے برقی میدان اور برقی بہاو بذریعہ $\boldsymbol{E}=-\nabla V$ اور $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔
- برق گیر (کپیسٹر) کے کسی ایک چادر پر برقی بہاو کی قیمت $\boldsymbol{D}_S=D_n\boldsymbol{a}_N$ حاصل کریں جو سطح کے عمودی ہو گا۔
- چونکہ سطح پر سطحی کثافتِ بار اور عمودی برقی بہاو برابر ہوتے ہیں لہٰذا $\rho_S=D_n$ ہو گا۔مثبت کثافتِ بار کی صورت میں برقی بہاو کا موصل چادر سے اخراج جبکہ منفی کثافتِ بار کی صورت میں برقی بہاو کا چادر میں دخول ہو گا۔
- سطح پر بار بذریعہ سطحی تکمل حاصل کریں۔

• کپیسٹنس $C=\frac{Q}{V}$ ہو گا۔

آئیں ان اقدام کو موجودہ مثال پر لاگو کریں۔

چونکہ موجودہ مثال میں مساوات 6.16 کے تحت

$$V=\frac{V_0 x}{d}$$

ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\text{X}}$$

اور

$$\boldsymbol{D}=-\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\text{X}}$$

چونکہ بہاو کی سمت مثبت سے منفی چادر کی جانب ہوتی ہے لہٰذا مثبت چادر $x=d$ پر جبکہ منفی چادر $x=0$ پر ہے۔ مثبت چادر پر

$$\boldsymbol{D}_S=\boldsymbol{D}\bigg|_{x=d}=-\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\text{X}}$$

کے برابر ہے۔ چونکہ مثبت چادر کا

$$\boldsymbol{a}_N=-\boldsymbol{a}_{\text{X}}$$

ہے لہٰذا برقی بہاو چادر سے خارج ہو رہا ہے۔ یوں

$$\rho_S=\epsilon\frac{V_0}{d}$$

ہو گا۔ اگر چادر کی سطح کا رقبہ S ہو تب

$$Q=\int_S \rho_S \,\mathrm{d}S=\int \epsilon\frac{V_0}{d}\,\mathrm{d}S=\frac{\epsilon V_0 S}{d}$$

ہو گا جس سے

$$C=\frac{\epsilon S}{d}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 215 پر مساوات 5.58 یہی جواب دیتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا مثال میں برق گیر (کپیسٹر) کو y یا z محدد پر رکھا جاتا تو کپیسٹنس کی قیمت یہی حاصل ہوتی لہٰذا کارتیسی محدد کے لئے ایک مثال حل کر لینا کافی ہے۔ نلکی محدد میں z کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کو حل کرنے سے کوئی نئی بات سامنے نہیں آتی۔ یہ بالکل کارتیسی محدد کے مثال کی طرح ہی ہے لہٰذا ہم باری باری ρ اور ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے حل کرتے ہیں۔

مثال 6.3: اس مثال میں صرف ρ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو پر غور کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں لاپلاس کی مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)=0$$

یا

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.17}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ یوں یا

$$\frac{1}{\rho}=0$$

ہو گا جس سے

$$\rho=\infty \tag{6.18}$$

حاصل ہوتا ہے اور یا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.19}$$

ہو گا۔اس تفرقی مساوات کو بار بار تکمل لے کر حل کرتے ہیں۔پہلی مرتبہ تکمل لیتے ہوئے

$$\rho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho} = A$$

یا

$$\mathrm{d}V = A\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری مرتبہ تکمل سے

$$V = A\ln\rho + B$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ ہم قوہ سطحیں نلکی شکل کے ہیں۔یوں یہ مساوات محوری تار کا برقی دباو دیتی ہے۔ہم محوری تار کے بیرونی تار $\rho = b$ کو برقی زمین اور اندرونی تار $\rho = a$ کو V_0 برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے

$$V = V_0 \frac{\ln\frac{b}{\rho}}{\ln\frac{b}{a}} \tag{6.20}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی شکل کے بار سے لامحدود فاصلے پر برقی دباو صفر ہی ہوتا ہے۔اسی وجہ سے ہم لامحدود فاصلے کو ہی برقی زمین کہتے آ رہے ہیں۔یوں لاپلاس مساوات کا پہلا حل یعنی مساوات 6.18 ہماری امید کے عین مطابق ہے۔

مساوات 6.20 کو لے کر آگے بڑھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = \frac{V_0}{\rho}\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{a}_\rho$$

اور

$$D_n = D\bigg|_{\rho=a} = \frac{\epsilon V_0}{a\ln\frac{b}{a}}$$

$$Q = \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a\ln\frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\frac{b}{a}} \tag{6.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 216 پر مساوات 5.59 یہی جواب دیتا ہے۔

مساوات 6.17 کو ρ سے ضرب دینے سے بھی مساوات 6.19 حاصل ہوتی ہے۔البتہ یہ ضرب صرف اور صرف اس صورت ممکن ہے جب $\rho \neq 0$ ہو۔یاد رہے کہ $\rho = 0$ کی صورت میں $\frac{\rho}{\rho} = \frac{0}{0}$ ہو گا جو غیر معین[6] ہے۔یوں مساوات 6.20 صرف اس صورت مساوات 6.19 کا حل ہو گا اگر $\rho \neq 0$ ہو۔ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا حل

$$V = V_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}} \qquad \rho \neq 0 \tag{6.22}$$

لکھنا زیادہ درست ہو گا۔

مثال 6.4: اب تصور کرتے ہیں کہ برقی دباو نلکی محدد کے متغیرہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔اس صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔یہاں بھی پہلا حل $\rho = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔ہم یہاں بھی $\rho = 0$ کو جواب کا حصہ تصور نہ کرتے ہوئے مساوات کو ρ^2 سے ضرب دیتے ہوئے اس سے جان چھڑاتے ہیں۔یوں

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2} = 0 \qquad \rho \neq 0$$

رہ جاتا ہے۔دو مرتبہ تکمل لینے سے

$$V = A\phi + B$$

---

undefined[6]

حاصل ہوتا ہے۔ایسی دو ہم قوہ سطحیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\rho = 0$ کی صورت میں دونوں چادر آپس میں مل جائیں گی اور ان پر مختلف برقی دباو ممکن نہ ہو گا۔یوں $\rho = 0$ قابل قبول جواب نہیں ہے۔یہاں $\phi = 0$ کو برقی زمین جبکہ $\phi = \phi_0$ پر V_0 برقی دباو کی صورت میں

$$V = \frac{V_0 \phi}{\phi_0} \qquad \rho \neq 0 \tag{6.23}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس سے

$$\boldsymbol{E} = -\frac{V_0}{\phi_0 \rho} \boldsymbol{a}_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ان چادروں کے کپیسٹنس کا حصول آپ سے حاصل کرنے کو سوال میں کہا گیا ہے۔

مثال 6.5: کروی محدد میں ϕ کے ساتھ تبدیلی کو مندرجہ بالا مثال میں دیکھا گیا لہٰذا اسے دوبارہ حل کرنے کی ضرورت نہیں۔ہم پہلے r اور بعد میں θ کے ساتھ تبدیلی کے مسئلوں کو دیکھتے ہیں۔

یہ زیادہ مشکل مسئلہ نہیں ہے لہٰذا آپ ہی سے سوالات کے حصے میں درخواست کی گئی ہے کہ اسے حل کرتے ہوئے برقی دباو کی مساوات

$$V(r) = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.24}$$

اور کپیسٹنس کی مساوات

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.25}$$

حاصل کریں جہاں $r = b$ پر برقی زمین اور $r = a$ پر V_0 برقی دباو ہے اور $b > a$ ہے۔

مثال 6.6: کروی محدد میں θ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right)=0 \tag{6.26}$$

صورت اختیار کرے گی۔اگر $r\neq 0$ اور $\sin\theta\neq 0$ ہوں تب اس مساوات کو $r^2\sin\theta$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right)=0 \tag{6.27}$$

لکھا جا سکتا ہے۔$\sin\theta$ اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب $\theta=0$ یا $\theta=\pi$ ہوں۔اس کے پہلی مرتبہ تکمل سے

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=A$$

یا

$$\mathrm{d}V=\frac{A\,\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری مرتبہ تکمل سے

$$V=A\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}+B=A\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+B \tag{6.28}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ہم قوہ سطحیں مخروطی شکل رکھتی ہیں۔اگر $\theta=\frac{\pi}{2}$ پر $V=0$ اور $\theta=\theta_0$ پر $V=V_0$ ہوں جہاں $\theta_0<\frac{\pi}{2}$ ہے تب ہمیں

$$V=V_0\frac{\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ایسی مخروط اور سیدھی سطح کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں جہاں مخروط کی نوک سے انتہائی باریک فاصلے پر سیدھی سطح ہو اور مخروط کا محور اس سطح کے عمود میں ہو۔پہلے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta=-\frac{V_0}{r\sin\theta\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\boldsymbol{a}_\theta \tag{6.30}$$

مخروط کی سطح پر سطحی کثافتِ بار یوں

$$\rho_S=D_n=-\frac{\epsilon V_0}{r\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

ہو گا جس سے اس پر بار

$$Q=-\frac{\epsilon V_0}{\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r\sin\theta_0\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{r}$$

ہو گا۔تکمل میں رداس کا حد لامحدود ہونے کی وجہ سے بار کی قیمت بھی لامحدود حاصل ہوتی ہے جس سے لامحدود کپیسٹنس حاصل ہو گی۔حقیقت میں محدود جسامت کی سطحیں ہی پائی جاتی ہیں لہٰذا ہم رداس کے حدود 0 تا r_1 لیتے ہیں۔ایسی صورت میں

$$C=\frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln\left(\cot\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.31}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے لامحدود سطح سے شروع کیا تھا لہٰذا بار کی مساوات بھی صرف لامحدود سطح کے لئے درست ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات کپیسٹنس کی قریبی قیمت ہو گی نا کہ بالکل درست قیمت۔

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال

پوئسن مساوات تب حل کی جا سکتی ہے جب ρ_h معلوم ہو۔حقیقت میں عموماً سرحدی برقی دباو وغیرہ معلوم ہوتے ہیں اور ہمیں ρ_h ہی درکار ہوتی ہے۔ہم پوئسن مساوات حل کرنے کی خاطر ایسی مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں ρ_h معلوم ہو۔

سلیکان[7] کی پتری میں p اور n اقسام کے مواد کی ملاوٹ سے p اور n سلیکان پیدا کیا جاتا ہے۔ایک ہی سلیکان پتری پر آپس میں جڑے ہوئے p اور n خطے ڈایوڈ[8] کو جنم دیتے ہیں۔x محدد پر رکھے ایسے ہی ایک ڈایوڈ کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔تصور کریں کہ $x < 0$ خطہ p اور $x > 0$ خطہ n قسم کا ہے۔مزید یہ کہ دونوں جانب ملاوٹ کی مقدار یکساں ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ p یا n خطہ ازخود غیر بار شدہ ہوتا ہے البتہ p خطے میں آزاد خول[9] اور n خطے میں آزاد الیکٹران[10] پائے جاتے ہیں۔ آزاد خول اور آزاد الیکٹران حرکت کر سکتے ہیں۔جس لمحہ یہ آپس میں جڑے خطے وجود میں آتے ہیں، اس وقت آزاد خول صرف p جانب جبکہ آزاد الیکٹران صرف n جانب پائے جاتے ہیں۔یوں اس لمحے ہی آزاد خول p سے n جانب اور آزاد الیکٹران n سے p جانب نفوذ[11] کے ذریعے حرکت کرنا شروع کر دیتے ہیں۔بار کی اس حرکت سے جلد p اور n کی سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کا بار جمع ہونے شروع ہو جاتا ہے۔یوں دو چادر برق گیر (کپیسٹر) پر بار کی طرح، سرحد کے دائیں یعنی $x > 0$ جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی بار جمع ہو جاتا ہے۔یہ بار برق گیر (کپیسٹر) کے چادروں کے درمیان برقی میدان کی طرح $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ پیدا کرتا ہے جو بائیں سے دائیں جانب آزاد خول کی حرکت اور دائیں سے بائیں جانب آزاد الیکٹران کی حرکت کو روکتا ہے۔جب تک برقی میدان $\boldsymbol{E}$ بار کی اس حرکت کو نہ روک سکے اس وقت تک بار کا نفوذ جاری رہے گا جس سے سرحد کے دونوں جانب بار کا انبار بڑھتا رہے گا جس سے $\boldsymbol{E}$ بڑھتی رہے گی۔آخر کار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت اتنی ہو جائے گی کہ یہ نفوذ کو مکمل طور پر روک دے گا۔آئیں برقی سکون کے اس حال پر غور کریں۔ابتدا میں p اور n خطے دونوں بے بار تھے البتہ برقی سکون کی حالت اختیار کرنے کے بعد صاف ظاہر ہے کہ سرحد کے دائیں جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی بار پایا جاتا ہے۔سرحد کی دائیں جانب مثبت بار دو وجوہات کی بنا ہے۔کچھ تو آزاد خول اس جانب منتقل ہوئے ہیں اور کچھ یہاں سے آزاد الیکٹران کی نفوذ سے مثبت ایٹم یہاں رہ گئے ہیں۔اسی طرح سرحد کے دوسری جانب منفی بار کچھ تو آزاد الیکٹران کی آمد اور کچھ یہاں سے آزاد خول کے اخراج سے منفی ایٹموں کے رہ جانے کی وجہ سے ہے۔سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کے بار میں قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں سرحد کے قریب ہی رکھتی ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب بار کے انبار کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔اس طرح کے انبار کو کئی مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے جن میں غالباً سب سے سادہ مساوات

$$\rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} \tag{6.32}$$

ہے جہاں زیادہ سے زیادہ کثافتِ بار ρ_0 ہے جو $x = 0.881a$ پر پائی جاتی ہے۔آئیں اس کثافتِ بار کے لئے پوئسن

silicon[7]
diode[8]
free holes[9]
free electrons[10]
diffusion[11]

مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

حل کریں۔پہلی مرتبہ تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + A$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - A$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔تکمل کے مستقل A کی قیمت اس حقیقت سے حاصل کی جا سکتی ہے کہ سرحد سے دور کسی قسم کا کثافتِ بار یا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا $x \to \mp\infty$ پر $E_x \to 0$ ہو گا جس سے $A = 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tag{6.33}$$

کے برابر ہے۔دوسری مرتبہ تکمل لیتے ہوئے

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم برقی زمین کو عین سرحد پر لیتے ہیں۔ایسا کرنے سے $B = -\frac{\rho_0 a^2 \pi}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \left(\tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} - \frac{\pi}{4} \right) \tag{6.34}$$

کے برابر ہو گا۔

شکل میں مساوات 6.32، مساوات 6.33 اور مساوات 6.34 دکھائے گئے ہیں جو بالترتیب حجمی کثافتِ بار، برقی میدان کی شدت اور برقی دباو دیتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب کے مابین برقی دباو V_0 کو مساوات 6.34 کی مدد سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$V_0 = V_{x\to+\infty} - V_{x\to-\infty} = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon} \tag{6.35}$$

سرحد کے ایک جانب کل بار کو مساوات 6.32 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں کل مثبت بار

$$Q = S\int_0^\infty 2\rho_0 \operatorname{sech}\frac{x}{a}\tanh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = 2\rho_0 a S \tag{6.36}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ڈایوڈ کا رقبہ عمودی تراش[12] S ہے۔مساوات 6.35 سے a کی قیمت مساوات 6.36 میں پر کرنے سے

$$Q = S\sqrt{\frac{2\rho_0\epsilon V_0}{\pi}} \tag{6.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے کپیسٹنس کی قیمت $C=\frac{Q}{V_0}$ لکھ کر نہیں حاصل کی جا سکتی البتہ

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t}$$

سے

$$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_0}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 6.37 کا تفرق لیتے ہوئے

$$C = \sqrt{\frac{\rho_0\epsilon}{2\pi V_0}}S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے پہلے جزو سے ظاہر ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے کپیسٹنس کم ہو گی۔مساوات کے دوسرے جزو سے یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ ڈایوڈ بالکل ایسے دو چادر برق گیر (کپیسٹر) کی طرح ہے جس کی چادر کا رقبہ S اور چادروں کے مابین فاصلہ $2\pi a$ ہو۔یوں برقی دباو سے کپیسٹنس کے گھٹنے کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے a بڑھتا ہے۔

[12] cross sectional area

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل

گزشتہ حصے میں صرف ایک محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے لاپلاس مساوات پر غور کیا گیا۔اس حصے میں ایسے میدان پر غور کیا جائے گا جہاں برقی دباو ایک سے زیادہ محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔تصور کریں کہ V کارتیسی محدد کے x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \tag{6.38}$$

صورت اختیار کرے گا۔تصور کریں کہ ایسی مساوات کے حل کو دو تفاعل $X(x)$ اور $Y(y)$ کے حاصل ضرب $X(x)Y(y)$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جہاں X تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف x اور Y تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف y ہو۔یہاں آپ کو ایسا معلوم ہو رہا ہو گا کہ یہ شرط زیادہ تر ممکنہ جوابات کو پہلے سے ہی رد کرتا ہے۔ایسا ہی ایک سادہ حل $V=x+y$ اور دوسرا نسبتاً مشکل حل $V=G(x)+H(y)$ ہو سکتے ہیں جنہیں ہم انجانے طور پر رد کر رہے ہو سکتے ہیں۔ہم $V=x+y$ کو $V=V_1+V_2$ لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\begin{aligned}V_1&=X_1(x)Y_1(y)=1x\\V_2&=X_2(x)Y_2(y)=1y\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $Y_1(y)=1$ اور $X_2(x)=1$ کے برابر ہیں۔یوں ہم دیکھتے ہیں کہ ہم x کو دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح y کو بھی دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ لاپلاس مساوات خطی ہونے کی بنا پر ان جوابات کا مجموعہ $x+y$ بھی لاپلاس مساوات کا حل ہو گا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہم نے $V=x+y$ جواب کو ہر گز رد نہیں کیا۔ایسے ہی ثبوت سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $V=G(x)+H(y)$ جواب کو بھی رد نہیں کیا گیا۔

اب آتے ہیں اصل مسئلے پر۔اگر $V=XY$ مساوات 6.38 کا حل ہو تب

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}Y(y)+X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}=0$$

ہو گا جسے

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \tag{6.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں آنکھیں کھول دینے والی دلیل پیش کرتے ہیں۔ مساوات 6.39 میں بائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے جبکہ دائیں جانب صرف y متغیرہ پایا جاتا ہے۔یوں x تبدیل کرنے سے صرف بائیاں ہاتھ تبدیل

ہو سکتا ہے جبکہ دایاں ہاتھ جوں کا توں رہے گا۔اب مساوات کہتا ہے کہ بائیں اور دائیں ہاتھ برابر ہیں۔ ایسا صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا کہ نا تو x تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو اور نا ہی y تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو یعنی اگر دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں جہاں اس مستقل کو m^2 لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔m^2 کو **علیحدگی مستقل**[13] کہا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = m^2 \tag{6.40}$$

اس مساوات کو دو اجزاء

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} &= m^2\\ \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} &= -m^2\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - m^2 X(x) &= 0\\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + m^2 Y(y) &= 0\end{aligned} \tag{6.41}$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے باری باری حل کرتے ہیں۔

اس طرز کی مساوات آپ پہلے حل کر چکے ہوں گے جہاں جواب اندازے سے لکھتے ہوئے مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں

$$X(x) = e^{\omega x}$$

پر کرتے ہیں۔یوں $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \omega^2 e^{\omega x}$ ہو گا لہٰذا

$$\omega^2 e^{\omega x} - m^2 e^{\omega x} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے

$$\omega = \mp m$$

[13] separation constant

حاصل ہو گا۔ ω کے دونوں قیمتیں استعمال کرتے ہوئے یوں اصل جواب

$$X(x) = A'e^{mx} + B'e^{-mx} \tag{6.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا جواب اسی طرح

$$Y(y) = C\cos my + D\sin my \tag{6.43}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 6.38 کا پورا حل

$$V = XY = \left(A'e^{mx} + B'e^{-mx}\right)(C\cos my + D\sin my) \tag{6.44}$$

لکھا جائے گا۔

آئیں مساوات 6.41 کے حل کو ایک مرتبہ دوبارہ حاصل کریں۔ البتہ اس مرتبہ جواب کا اندازہ لگانے کی بجائے ہم ایک ایسی ترکیب استعمال کریں گے جو انتہائی زیادہ طاقتور ثابت ہو گی اور جو آگے بار بار استعمال آئے گا۔

اس ترکیب میں ہم تصور کرتے ہیں کہ $X(x)$ تفاعل کو **طاقتی سلسلے**[14]

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \tag{6.45}$$

کی شکل میں لکھنا ممکن ہے جہاں a_0، a_1، a_2 وغیرہ طاقتی سلسلے کے مستقل ہیں۔ یوں

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 + a_1 + 2a_2x^1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

اور

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 + 0 + 2\times 1a_2 + 3\times 2a_3x^1 + 4\times 3a_4x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} \tag{6.46}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ مساوات 6.45 اور مساوات 6.46 کو مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں پر کرتے ہیں

$$2\times 1a_2 + 3\times 2a_3x^1 + 4\times 3a_4x^2 + \cdots = m^2\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots\right)$$

[14] power series

جہاں ہم m^2X کو دائیں ہاتھ لے گئے ہیں۔یہاں بائیں اور دائیں ہاتھ کے طاقتی سلسلے صرف اس صورت x کی ہر قیمت کے لئے برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں جانب x کے برابر طاقت کے ضربیہ[15] عین برابر ہوں یعنی جب

$$\begin{aligned}2 \times 1 a_2 &= m^2 a_0\\3 \times 2 a_3 &= m^2 a_1\\4 \times 3 a_4 &= m^2 a_2\end{aligned}$$

یا

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = m^2 a_n$$

ہوں۔جفت ضربیہ کو a_0 کی صورت میں یوں

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{m^2}{2 \times 1} a_0\\a_4 &= \frac{m^2}{4 \times 3} a_2 = \left(\frac{m^2}{4 \times 3}\right)\left(\frac{m^2}{2 \times 1} a_0\right) = \frac{m^4}{m!} a_0\\a_6 &= \frac{m^6}{6!} a_0\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے عمومی طور پر

$$a_n = \frac{m^n}{n!} a_0 \qquad (\text{جفت } n)$$

لکھا جا سکتا ہے۔طاق ضربیہ کو a_1 کی صورت میں

$$\begin{aligned}a_3 &= \frac{m^2}{3 \times 2} a_1 = \frac{m^3}{3!} \frac{a_1}{m}\\a_5 &= \frac{m^5}{5!} \frac{a_1}{m}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ان کی عمومی مساوات

$$a_n = \frac{m^n}{n!} \frac{a_1}{m} \qquad (\text{طاق } n)$$

[15] coefficient

لکھی جا سکتی ہے۔انہیں واپس طاقتی سلسلے میں پر کرتے ہوئے

$$X = a_0 \sum_{\text{جفت},0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{m} \sum_{\text{طاق},1}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n$$

یا

$$X = a_0 \sum_{\text{جفت},0}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} + \frac{a_1}{m} \sum_{\text{طاق},1}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!}$$

حاصل ہوتا ہے۔غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مندرجہ بالا مساوات میں پہلا طاقتی سلسلہ دراصل $\cosh mx$ کے برابر

$$\cosh mx = \sum_{\text{جفت},0}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} = 1 + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^4}{4!} + \cdots$$

اور دوسرا طاقتی سلسلہ $\sinh mx$

$$\sinh mx = \sum_{\text{طاق},1}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n = mx + \frac{(mx)^3}{3!} + \frac{(mx)^5}{5!} + \cdots$$

کے برابر ہے۔یوں

$$X = a_0 \cosh mx + \frac{a_1}{m} \sinh mx$$

یا

$$X = A \cosh mx + B \sinh mx$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں a_0 اور $\frac{a_1}{m}$ یا ان کی جگہ لکھے گئے A اور B کو سرحدی شرائط سے حاصل کیا جائے گا۔

$\cosh mx$ اور $\sinh mx$ کو

$$\cosh mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$$
$$\sinh mx = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}$$

لکھ کر

$$X = A' e^{mx} + B' e^{-mx}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں A' اور B' دو نئے مستقل ہیں۔یہ مساوات 6.42 ہی ہے۔

اسی طاقتی سلسلے کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل بھی دو طاقتی سلسلوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے جہاں ایک طاقتی سلسلہ $\cos my$ اور دوسرا $\sin my$ کے برابر ہوتا ہے۔یوں

$$Y = C\cos my + D\sin my \tag{6.47}$$

لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 6.43 ہی ہے۔یوں

$$V = XY = (A\cosh mx + B\sinh mx)\left(C\cos my + D\sin my\right) \tag{6.48}$$

یا

$$V = XY = \left(A'e^{mx} + B'e^{-mx}\right)\left(C\cos my + D\sin my\right) \tag{6.49}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس آخری مساوات کا مساوات 6.44 کے ساتھ موازنہ کریں۔

مساوات 6.48 میں کل چار مستقل پائے جاتے ہیں جنہیں سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں ان مستقل کو دو مختلف سرحدی شرائط کے لئے حاصل کریں۔پہلی صورت میں بجائے یہ کہ سرحدی شرائط سے ان مستقل کو حاصل کریں، ہم مستقل پہلے چنتے ہیں اور بعد میں ان چنے گئے مستقل کے مطابق سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں۔

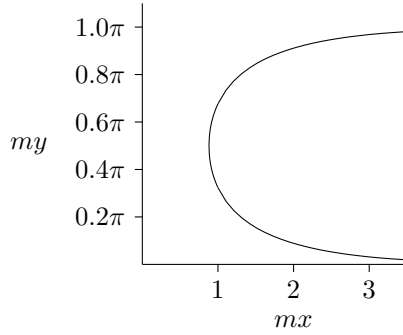
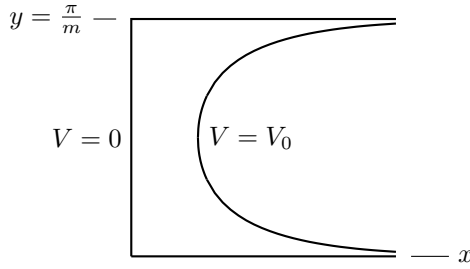
تصور کریں کہ مساوات 6.48 میں A اور B دونوں یا C اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ایسی صورت میں $V = 0$ حاصل ہو گا جو برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ہمیں عموماً برقی دباو کی موجودگی سے زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔آئیں ایک اور صورت دیکھیں۔

تصور کریں کہ A اور C صفر کے برابر ہے۔ایسی صورت میں مساوات 6.48 کو

$$V = V_0 \sinh mx \sin my \tag{6.50}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $BD = V_0$ لکھا گیا ہے۔چونکہ

$$\sinh mx = \frac{1}{2}\left(e^{mx} - e^{-mx}\right)$$

ہے لہٰذا $x = 0$ پر $\sinh mx = 0$ ہو گا جبکہ بڑھتے x کے ساتھ اس کی قیمت تقریباً e^{mx} کے تعلق سے بڑھتی ہے۔$\sin my$ کی قیمت $y = 0$، $y = \frac{\pi}{m}$، $y = \frac{2\pi}{m}$ وغیرہ پر صفر کے برابر ہو گی۔یوں صفر برقی دباو کے ہم

شکل 6.1: $my = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sinh mx}\right)$ کی مساوات۔

شکل 6.2: ہم قوہ سطحیں اور ان پر برقی دباو۔

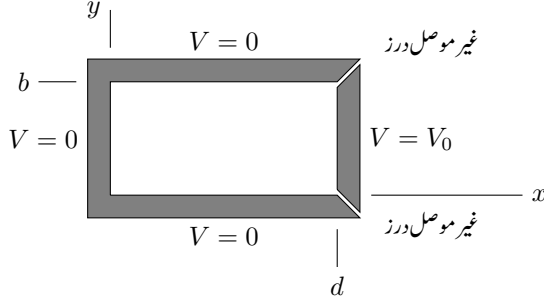
قوہ سطحیں $x = 0$ اور $y = \frac{n\pi}{m}$ پر رکھی جا سکتیں ہیں جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہو سکتا ہے۔ہم ایسی ہم قوہ سطحیں $x = 0$، $y = 0$ اور $y = \frac{\pi}{m}$ پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔آخر میں V_0 ہم قوہ سطح مساوات 6.50 میں $V = V_0$ پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$V_0 = V_0 \sinh mx \sin my$$

یا

$$my = \sin^{-1} \frac{1}{\sinh mx}$$

x کی مختلف قیمتوں کے لئے اس مساوات سے y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے اس مساوات کے خط کو شکل 6.1 میں کھینچا گیا ہے۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصل ہم قوہ سطحیں شکل 6.2 میں دکھائی گئی ہیں۔یہ سطحیں z محدد کی سمت میں

شکل 6.3: موصل سطحوں سے گھیرے خطے میں لاپلاس مساوات متعدد اجزاء کے مجموعے سے حاصل ہوتا ہے۔

لامحدود لمبائی رکھتی ہیں اور ان سے پیدا برقی دباو مساوات 6.50 دیتا ہے۔

ہم نے لاپلاس مساوات کے حل یعنی مساوات 6.50 کو لیتے ہوئے ان ہم قوہ سطحوں کو دریافت کیا جو ایسی برقی دباو پیدا کرے گی۔ حقیقت میں عموماً موصل ہم قوہ سطحیں معلوم ہوں گی جن کا پیدا کردہ برقی دباو درکار ہو گا۔ آئیں ایسی ایک مثال دیکھیں۔

شکل 6.3 میں موصل سطحیں اور ان پر برقی دباو دیا گیا ہے۔ یہ سطحیں z سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں۔ سطحوں کے گھیرے خطے میں برقی دباو حاصل کرنا درکار ہے۔

یہاں سرحدی شرائط کچھ یوں ہیں۔ $x = 0$، $y = 0$ اور $y = b$ پر برقی دباو صفر ہے جبکہ $x = d$ پر برقی دباو V_0 ہے۔ دونوں ہم قوہ سطحوں کے مابین انتہائی باریک غیر موصل درز ہیں جن کی بنا پر ان کے برقی دباو مختلف ہو سکتے ہیں۔ ان درز کے اثر کو نظرانداز کیا جائے گا۔

موجودہ مسئلے میں بھی برقی دباو صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لٰہذا مساوات 6.38 ہی اس مسئلے کا لاپلاس مساوات ہے جس کا حل مساوات 6.48 ہے۔ ہم سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 6.38 میں $x = 0$ پر برقی دباو صفر پر کرنے سے

$$
\begin{aligned}
0 &= (A\cosh 0 + B\sinh 0)\left(C\cos my + D\sin my\right)\\
0 &= A\left(C\cos my + D\sin my\right)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ y کے تمام قیمتوں کے لئے یہ مساوات صرف

$$A = 0$$

کی صورت میں درست ہو سکتی ہے لہٰذا پہلا مستقل صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔$y = 0$ پر صفر برقی دباو پر کرنے سے

$$\begin{aligned} 0 &= B \sinh mx \left(C \cos 0 + D \sin 0 \right) \\ 0 &= BC \sinh mx \end{aligned}$$

لکھا جائے گا جو x کی ہر قیمت کے لئے صرف $BC = 0$ کی صورت میں درست ہو گا۔اب چونکہ $A = 0$ ہے لہٰذا B صفر نہیں ہو سکتا چونکہ ایسی صورت میں مساوات 6.38 سے برقی دباو صفر حاصل ہو گا۔یہ جواب ہمیں مطلوب نہیں ہے۔ہم وہ جواب چاہتے ہیں جس سے برقی دباو کے بارے میں علم حاصل ہو۔اس لئے $C = 0$ کے برابر ہے۔اس طرح مساوات 6.48

$$V = BD \sinh mx \sin my \tag{6.51}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اس مساوات میں $y = b$ پر صفر برقی دباو پر کرتے ہیں۔

$$0 = BD \sinh mx \sin mb$$

ہم B یا D کو صفر کے برابر نہیں لے سکتے چونکہ ایسی صورت میں $V = 0$ جواب حاصل ہوتا ہے جس میں ہمیں کوئی دلچسپی نہیں۔یہ مساوات x کی ہر قیمت کے لئے صرف اس صورت درست ہو گی اگر

$$\sin mb = 0$$

ہو جس سے

$$mb = n\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

کے برابر ہو سکتا ہے۔اس طرح $m = \frac{n\pi}{b}$ لکھتے ہوئے مساوات 6.51

$$V = V_1 \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.52}$$

صورت اختیار کر لے گا جہاں BD کو V_1 لکھا گیا ہے۔مساوات 6.52 تین اطراف کے سطحوں پر صفر برقی دباو کے شرائط پر پورا اترتا حل ہے۔البتہ $x = d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو مندرجہ بالا مساوات سے پورا کرنا ممکن نہیں۔ہمیں عموماً بالکل اسی طرز کے مسئلوں سے واسطہ پڑتا ہے جہاں آخری قدم پر معلوم ہوتا ہے کہ ہماری کمر دیوار

کے ساتھ لگ گئی ہے جہاں سے ظاہری طور پر نکلنے کا کوئی راستہ نہیں۔گھبرائیں نہیں۔ہمیں درپیش مسئلے کے تمام ممکنہ جوابات کو مساوات 6.52 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں ان تمام جوابات کا مجموعہ بھی قابل قبول حل ہو گا یعنی ہم

$$V=\sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (0<y<b, n=0,1,2,\cdots) \tag{6.53}$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں n کی ہر قیمت پر منفرد V_1 کو V_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔ n اور V_n کی قیمتیں ایسی رکھی جاتی ہیں کہ $x=d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو پورا کیا جائے۔اس آخری شرط کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$V_0=\sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh\frac{n\pi d}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

یعنی

$$V_0=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{6.54}$$

ملتا ہے جہاں

$$c_n=V_n\sinh\frac{n\pi d}{b}$$

لکھا گیا ہے۔

مساوات 6.54 فوریئر تسلسل[16] ہے جس کے مستقل باآسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔چونکہ ہمیں $0<y<b$ کے خطے سے غرض ہے لہٰذا اس خطے کے باہر ہمیں برقی دباو سے کوئی غرض نہیں۔ایسی صورت میں ہم فوریئر تسلسل کے طاق یا جفت جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔طاق جوابات اس صورت حاصل ہوں گے اگر ہم $0<y<b$ کو آدھا میعاد تصور کرتے ہوئے بقایا آدھے میعاد $b<y<2b$ پر برقی دباو کو $-V_0$ تصور کریں یعنی

$$\begin{aligned} V&=+V_0 \qquad (0<y<b)\\ V&=-V_0 \qquad (b<y<2b)\end{aligned}$$

اسی صورت میں فوریئر تسلسل کے مستقل

$$c_n=\frac{1}{b}\left[\int_0^b V_0\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y+\int_b^{2b}(-V_0)\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y\right]$$

[16] Fourier series

سے

$$c_n = \frac{4V_0}{n\pi} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots)$$
$$c_n = 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \cdots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔اب چونکہ $c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$ کے برابر ہے لہٰذا

$$V_n = \frac{4V_0}{n\pi \sinh(\frac{n\pi d}{b})} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots)$$

ہو گا اور یوں مساوات 6.53 کو

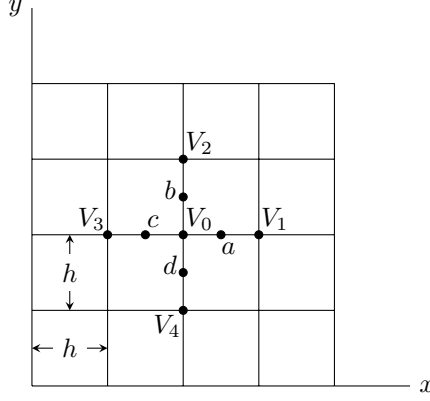
$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,\text{طاق}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi d}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.55}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے مختلف نقطوں پر برقی دباو $V(x, y)$ حاصل کرتے ہوئے ان میں برابر برقی دباو رکھنے والے نقطوں سے گزرتی سطح ہم قوہ سطح ہو گی۔

مثال 6.7: شکل 6.3 میں $d = b$ اور $V_0 = 90\,\text{V}$ ہونے کی صورت میں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کریں۔

حل:ڈبے کا وسط $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$ ہے۔مساوات 6.55 کے پہلے چند اجزاء لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\times 90}{\pi}\left(\frac{\sinh\frac{\pi}{2}}{\sinh\pi}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\frac{\sinh\frac{3\pi}{2}}{\sinh 3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\frac{\sinh\frac{5\pi}{2}}{\sinh 5\pi}\sin\frac{5\pi}{2}\right)\\ &= \frac{4\times 90}{\pi}(0.199268 - 0.0029941887 + 0.0000776406)\\ &= 22.5\,\text{V} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.4: لاپلاس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر برقی دباو قریبی نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔

6.7 اعدادی دہرانے کا طریقہ

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی تراکیب ہم دیکھ چکے۔ کمپیوٹر کی مدد سے اعدادی دہرانے[17] کے طریقے سے مساوات حل کئے جاتے ہیں۔ آئیں لاپلاس مساوات اسی ترکیب سے حل کریں۔

تصور کرتے ہیں کہ کسی خطے میں برقی میدان صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ شکل 6.4 میں ایسی سطح دکھائی گئی ہے جسے h چوڑائی اور اتنے ہی لمبائی کے مربع کے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس میدان میں آپس میں قریبی پانچ نقطوں پر برقی دباو V_0، V_1، V_2، V_3 اور V_4 ہیں۔ اگر یہ خطہ ہر جانب یکساں خاصیت رکھتا ہو اور یہ بار سے پاک ہو تب $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ اور $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ ہوں گے جس سے دو محدد میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ہونے کی وجہ سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

---

[17] numerical iteration

صورت اختیار کر لیتی ہے جو لاپلاس مساوات ہے۔ شکل 6.4 میں نقطہ a اور نقطہ c پر $\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $\frac{\partial V}{\partial y}$ کی قیمتیں تقریباً

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$
$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ہوں گیں۔ یوں ہم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔ بالکل اسی طرح ہم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_b - \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_d}{h} \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$

بھی لکھ سکتے ہیں۔ ان دو جوابات کو لاپلاس مساوات میں پر کرنے

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

سے

$$V_0 \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4} \tag{6.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔ h لمبائی جتنی کم ہو مندرجہ بالا مساوات اتنی زیادہ درست ہو گی۔ h کی لمبائی انتہائی چھوٹی کرنے سے مندرجہ بالا مساوات بالکل صحیح ہو گی۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی دباو اس نقطے کے گرد چار نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔

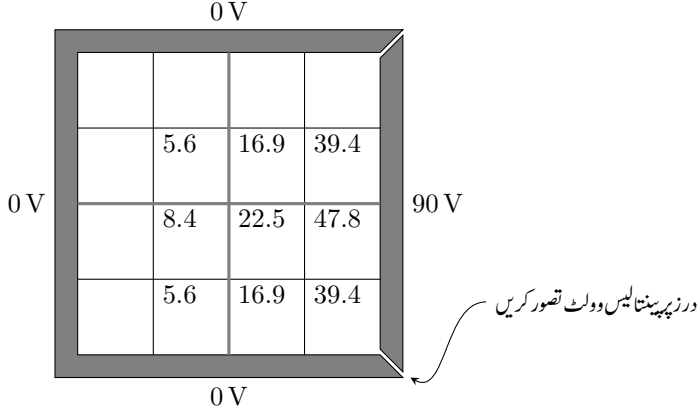
اعدادی دہرانے کے طریقے میں تمام خطے کو شکل 6.4 کی طرز پر مربعوں میں تقسیم کرتے ہوئے مربع کے ہر کونے پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے۔ تمام خطے پر بار بار اسی طریقے سے برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے حتیٰ کہ کسی بھی نقطے پر متواتر جوابات میں تبدیلی نہ پائی جائے۔ اس طریقے کو مثال سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔

0 V

	5.6	16.9	39.4
	8.4	22.5	47.8
	5.6	16.9	39.4

0 V　　90 V

درز پر پینتالیس وولٹ تصور کریں

0 V

شکل 6.5: رقبہ عمودی تراش کو خانوں میں تقسیم کرتے ہوئے، ہر کونے پر گرد کے چار نقطوں کے اوسط برابر برقی دباو ہو گا۔

شکل 6.5 میں مربع شکل کے لامحدود لمبائی کے ڈبے کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔اس کے چار اطراف صفر برقی دباو پر ہیں جبکہ نہایت باریک غیر موصل فاصلے پر چوتھی طرف نوے وولٹ پر ہے۔اس ڈبے کو یوں خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ یا تو انہیں سولہ چھوٹے خانے تصور کیا جا سکتا ہے اور یا چار درمیانے جسامت کے خانے۔اس کے علاوہ پورے ڈبے کو ایک ہی بڑا خانہ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔آئیں ان خانوں کے کونوں پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کریں۔

اگرچہ کمپیوٹر پر ایسے مسائل حل کرتے ہوئے تمام کونوں پر ابتدائی برقی دباو صفر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھا جاتا ہے۔قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ذرا سوچ کر چلنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ہم پورے مربع شکل کو ایک ہی بڑا خانہ تصور کرتے ہوئے اس کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم بڑے خانے کے چار کونوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔یوں بڑے خانے کے چار کونوں کی برقی دباو زیر استعمال آئے گی۔اب دو کونوں پر صفر برقی دباو ہے جبکہ دو کونے غیر موصل درز پر مشتمل ہیں۔درز کے ایک جانب صفر جبکہ اس کی دوسری جانب نوے وولٹ ہیں، لہٰذا درز میں ان دو قیمتوں کا اوسط یعنی پینتالیس وولٹ برقی دباو تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح بڑے خانے کے وسط میں

$$V=\frac{45+45+0+0}{4}=22.5\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 6.5 میں یہ قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں اب چار درمیانے جسامت کے خانوں کے کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔یہاں بھی ہم ان خانوں کے کونوں

کو چار قریبی نقطے چنتے ہیں۔اوپر دائیں بڑے خانے کے وسط میں برقی دباو حاصل کرنے کی خاطر اس خانے کے چار کونوں کے برقی دباو زیر استعمال لائے جائیں گے۔یوں درز پر پینتالیس وولٹ تصور کرتے ہوئے

$$V=\frac{90+45+0+22.5}{4}=39.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح دائیں نچلے بڑے خانے کے وسط میں بھی

$$V=\frac{90+45+0+22.5}{4}=39.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم اس قیمت کو بغیر حل کئے شکل کو دیکھ کر ہی لکھ سکتے تھے چونکہ شکل کا اوپر والا آدھا حصہ اور اس کا نچلا آدھا حصہ بالکل یکساں ہیں لہٰذا ان دونوں حصوں میں بالکل یکساں برقی دباو ہو گا۔اس حقیقت کو یہاں سے استعمال کرنا شروع کرتے ہیں۔اوپر اور نیچے بائیں بڑے خانے بالکل یکساں ہیں لہٰذا دونوں کے وسط میں

$$V=\frac{22.5+0+0+0}{4}=5.6\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔بقایا کونوں پر برقی دباو حاصل کرتے ہوئے نقطے کے بائیں، دائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔یوں

$$\frac{90+39.4+22.5+39.4}{4}=47.8\,\mathrm{V}$$
$$\frac{39.4+0+5.6+22.5}{4}=16.9\,\mathrm{V}$$
$$\frac{22.5+5.6+0+5.6}{4}=8.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔شکل 6.5 میں یہ تمام قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں شکل میں اوپر سے نیچے چلتے ہوئے پہلے دائیں، پھر درمیانے اور آخر میں بائیں قطار کے تمام کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔ہم یہی سلسلہ بار بار دہرائیں گے حتٰی کہ کسی بھی کونے پر متواتر حاصل کردہ جوابات تبدیل ہونا بند کر دیں۔ہر کونے پر برقی دباو مساوات 6.56 کے استعمال سے حاصل کیا جائے گا جہاں کونے کے اوپر، نیچے، دائیں اور بائیں نقطوں کے برقی دباو کو استعمال کیا جائے گا۔یاد رہے کہ موصل سطحوں پر برقی دباو ہمیں پہلے سے ہی معلوم ہے لہٰذا ان پر برقی دباو حاصل کرنے کی کوشش نہیں کی جائے گی۔

اس طرح دائیں قطار کے اوپر جانب 39.4 V کی نئی قیمت

$$\frac{90+0+16.9+47.8}{4}=38.7\,\mathrm{V}$$

0 V

0 V | 90 V

	6.3 6.4 6.4	16.7 16.8 16.8	38.7 38.6 38.6
	8.7 8.8 8.8	22.3 22.4 22.4	47.5 47.4 47.4
	6.3 6.4 6.4	16.7 16.8 16.8	38.7 38.6 38.6

0 V

شکل 6.6: چار مرتبہ دہرانے کے بعد جوابات تبدیل ہونا بند ہو جاتے ہیں۔ یہی اصل جواب ہیں۔

ہو جائے گی۔ اوپر اور نچلے آدھے حصوں کی مشابہت سے ہم قطار کی نچلی قیمت بھی یہی لکھتے ہیں۔ شکل 6.6 میں یہ قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔ مساوات 6.56 میں نئی سے نئی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ یوں 47.8 V کی نئی قیمت

$$\frac{90+38.7+22.5+38.7}{4}=47.5\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

درمیانی قطار پر آتے ہیں۔ یہاں اوپر 16.9 V کی نئی قیمت

$$\frac{38.7+0+5.6+22.5}{4}=16.7\,\mathrm{V}$$

ہو گی جو قطار کے نچلے کونے کی بھی قیمت ہے۔ اس قطار کے درمیانے نقطے کی نئی قیمت

$$\frac{47.5+16.7+8.4+16.7}{4}=22.3\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

اسی طرح بائیں قطار کی نئی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔ ان تمام کو شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔ یہی سلسلہ دوبارہ دہرانے سے مزید نئے اور بہتر جوابات حاصل ہوں گے جنہیں گزشتہ جوابات کے نیچے لکھا گیا ہے۔ شکل میں اس

طرح تین مرتبہ دہرانے سے حاصل کئے گئے جوابات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے کے آخری دو حاصل کردہ جوابات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی۔اسی لئے ان آخری جوابات کو اصل جوابات تسلیم کیا جاتا ہے۔

یہاں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو 22.4 V حاصل ہوا ہے۔مثال 6.7 میں ڈبے کے وسط پر برقی دباو طاقتی سلسلے کی مدد سے 22.5 V حاصل ہوئی تھی جو تقریباً اتنی ہی قیمت ہے۔یاد رہے کہ یہاں ہم نے اشاریہ کے بعد صرف ایک ہندسہ رکھتے ہوئے برقی دباو حاصل کئے۔اسی وجہ سے دونوں جوابات میں معمولی فرق ہے۔

اگر ہم سوچ سے کام نہ لیتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 6.56 میں شروع سے دائیں، بائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کی قیمتیں استعمال کرتے، تب ہمیں قطعی جوابات دس مرتبہ دہرانے کے بعد حاصل ہوتے۔اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے آپ ضرور سوچ سمجھ سے ہی کام لیں گے البتہ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔کمپیوٹر کے لئے کیا ایک مرتبہ اور کیا دس ہزار مرتبہ۔

اس مثال میں ہم نے بہت کم نقطوں پر برقی دباو حاصل کی تاکہ دہرانے کا طریقہ باآسانی سمجھا جا سکے۔کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے آپ زیادہ سے زیادہ نقطے چن سکتے ہیں۔بہتر سے بہتر نتائج، زیادہ سے زیادہ نقطے چننے سے حاصل ہوتا ہے ناکہ کم نقطوں پر زیادہ ہندسوں پر مبنی جوابات سے۔دہرانے کا طریقہ اس مرتبہ تک دہرایا جاتا ہے جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر حاصل کردہ جوابات میں فرق اتنا کم ہو کہ اسے رد کرنا ممکن ہو۔یوں ایک مائیکرو وولٹ تک درست جوابات حاصل کرنے کی خاطر اس وقت تک دہرائی کی جائے گی جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر جوابات میں فرق ایک مائیکرو وولٹ سے کم نہ ہو جائے۔

سوالات

سوال 6.1: برقی دباو $V = 0.002x^2yz^3\,\mathrm{V}$ ہے۔نقطہ $N(2,-3,-4)$ پر V ، $\boldsymbol{E}$ اور $|\rho_h|$ حاصل کریں۔نقطہ N پر ہم قوہ سطح اور سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کریں۔کیا برقی دباو لاپلاس کی مساوات پر پورا اترتا ہے؟

جوابات: $1.536\,\mathrm{V}$ ، $\boldsymbol{E} = -1.536\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.512\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1.152\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $|\rho_h| = 1.344\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$ ، $x^2yz^3 - 768 = 0$ ؛ سمت بہاو خط ان مساوات سے ظاہر ہو گی: $2y^2 - x^2 = 14$ اور $2z^2 - 3x^2 = 6$ ؛ چونکہ حاصل کردہ حجمی کثافت بار صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا لاپلاس کی مساوات پر برقی دباو پورا نہیں اترتا۔

سوال 6.2: دباو کا میدان $V = xy^2z - kxz^3$ لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔مستقل k کی قیمت حاصل کرتے ہوئے نقطہ $N(5,2,4)$ پر $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جوابات: $k = \frac{1}{3}$ ، $0.053\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 0.799\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.599\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 6.3: خلاء میں نقطہ $N(2,-3,1)$ پر میدان $V = x + y^2(z^3 - x^2)$ اور $V = 3x^2 + y^2 - 4z^2$ میں ρ_h حاصل کریں۔

جوابات: $-0.265\,\mathrm{nC/m^3}$ ، $0\,\mathrm{C/m^3}$

سوال 6.4: محدد کے مبدا $(0,0,0)$ پر $V = 3x^3 + y^4 + 2z$ اور $V = e^{2x}\sin 2y$ کے لاپلاس کی قیمت حاصل کریں۔کیا یہ تفاعل لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں؟ جوابات: 0 ، 0 ، نہیں، جی ہاں

سوال 6.5: میدان $V = 5\rho^2 \sin 2\phi$ کا لاپلاس حاصل کریں۔

جواب: $\nabla^2 V = 0$

سوال 6.6: ثابت کریں کہ $V = \rho V_0 \cos\phi$ لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔اسی برقی دباو کو کارتیسی محدد میں لکھتے ہوئے $V = 0$ اور $V = V_0$ سطحیں دریافت کریں۔

جوابات: $V = V_0 x$ ، $x = 0$ ، $x = 1$

سوال 6.7: متوازی چادر برق گیر (کپیسٹر) میں $V = 10x + 15y - 30z + 55$ ہے۔ چادر کا رقبہ $100\,\mathrm{cm}^2$ جبکہ ان کے درمیان فاصلہ $0.5\,\mathrm{mm}$ ہے۔برق گیر (کپیسٹر) پر برقی دباو کی قیمت حاصل کریں۔اس کی کپیسٹنس بھی حاصل کریں۔

جوابات: $17.5\,\text{mV}$ ، $177\,\text{pF}$

سوال 6.8: نلکی محدد میں میدان $V(\rho,\phi,z)=55\phi+72\,\text{V}$ دیا گیا ہے۔نقطہ $N(2.2,62°,3)$ پر V ، $\boldsymbol{E}$ اور کثافت توانائی حاصل کریں۔خطہ ρ_1 تا ρ_2 ، ϕ_1 تا ϕ_2 ، z_1 تا z_2 میں کل توانائی حاصل کریں۔

جوابات: $132\,\text{V}$ ، $-25\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $2.77\,\text{nJ/m}^3$ ، $13.4(\phi_2-\phi_1)(z_2-z_1)\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\,\text{nJ}$

سوال 6.9: متوازی چادر برق گیر (کپیسٹر) کے چادروں کے درمیان فاصلہ d اور برقی مستقل ϵ ہے۔دونوں چادر صفر وولٹ پر ہیں جبکہ ان کے درمیان خطے میں حجمی کثافت بار ρ_h پائی جاتی ہے۔پوئسن مساوات حل کرتے ہوئے چادروں کے درمیان برقی دباو اور $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $V(z)=\frac{\rho_0 z}{2\epsilon}(d-z)\,\text{V}$ ، $\boldsymbol{E}=\frac{\rho_0}{2\epsilon}(2z-d)\boldsymbol{a}_\text{z}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 6.10: نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے خلاء میں برقی دباو کی مساوات $V=\frac{\sin 2\phi}{\rho}$ دی گئی ہے۔نقطہ $(0.4,45°,2)$ پر حجمی کثافت بار ρ_h حاصل کریں۔نقطہ $(2.5,75°,3)$ پر موصل سطح موجود ہے۔اس پر سطحی کثافت بار ρ_S حاصل کریں۔

جوابات: $415\,\text{pC/m}^3$ ، $\mp 2.55\,\frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ ؛چونکہ یہ نہیں بتلایا گیا کہ میدان موصل کے کس جانب ہے لہٰذا یہ نہیں بتلایا جا سکتا کہ کثافت مثبت یا منفی ہے۔

سوال 6.11: رداس a کے دو عدد دائری چادر سے متوازی چادر برق گیر (کپیسٹر) بنایا جاتا ہے۔یہ چادر $z=0$ اور $z=d$ پر پائے جاتے ہیں جبکہ z محدد ان کے محور سے گزرتی ہے۔نچلی چادر صفر وولٹ جبکہ بالائی چادر V_0 وولٹ پر ہے۔برق گیر (کپیسٹر) میں بھرے گئی ذو برق کا برقی مستقل $\epsilon(\rho)=\epsilon-0(1+\frac{\rho}{a})$ ہے جو رداسی سمت میں تبدیل ہوتا ہے۔برق گیر (کپیسٹر) میں V اور $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔بالائی چادر پر برقی بار حاصل کرتے ہوئے کپیسٹنس حاصل کریں۔چادر کے کناروں پر میدان کے پھولنے[18] کو نظر انداز کریں۔

جوابات:چونکہ $\boldsymbol{E}$ محدد z کی سمت میں ہے جبکہ ϵ محدد ρ کی سمت میں تبدیل ہوتا ہے لہٰذا لاپلاس اور پوئسن کے مساوات قابل استعمال ہیں۔یوں $V(z)=\frac{V_0 z}{d}$ ، $\boldsymbol{E}=-\frac{V_0}{d}$ ، $\rho_S=\epsilon_0(1+\frac{\rho}{d})\frac{V_0}{d}$ ، $Q=\frac{5\pi a^2\epsilon_0 V_0}{3d}$ اور $C=\frac{5\pi a^2\epsilon_0}{3d}$ ہیں۔

---

[18] fringing

سوال 6.12: صفحہ 243 پر مساوات 6.13 عمومی محدد میں لاپلاسی دیتا ہے۔اس مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 6.13: مثال 6.4 کو حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہوئے اس کا کپیسٹنس حاصل کریں۔

سوال 6.14: مثال 6.5 میں دیے مساوات 6.24 اور مساوات 6.25 حاصل کریں۔

سوال 6.15: مساوات 6.28 کے تکمل کو حل کریں۔

سوال 6.16: مساوات 6.29 حاصل کریں۔

سوال 6.17: مساوات 6.31 حل کریں۔

سوال 6.18: مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل طاقتی سلسلے کے طریقے سے حاصل کریں۔ثابت کریں کہ اس حل کو مساوات 6.47 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 6.19: دہرانے کے طریقے میں اشاریہ کے نشان کے بعد دو ہندسوں تک درستگی استعمال کرتے ہوئے شکل 6.5 میں دئے تمام نقطوں پر برقی دباو چار مرتبہ دہرانے سے حاصل کریں۔ڈبے کے وسط میں برقی دباو کیا حاصل ہوتی ہے۔

جواب: 22.49 V

باب 7

ساکن مقناطیسی میدان

برقی میدان کا منبع برقی بار ہے جس پر باب 2 میں تفصیل سے بات کی گئی۔مقناطیسی میدان کا منبع یا تو مقناطیس ہو سکتا ہے، یا وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان اور یا پھر برقی رو۔اس کتاب میں مقناطیس سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان پر غور نہیں کیا جائے گا۔وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا مقناطیسی میدان پر ایک اور باب میں غور کیا جائے گا جبکہ اس باب میں برقی رو سے پیدا ساکن مقناطیسی میدان پر غور کیا جائے گا۔

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون

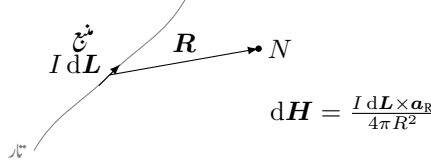
برقی رو اور اس سے پیدا مقناطیسی میدان کا تعلق **بایوٹ-سیوارٹ**[1] کا قانون[2]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.1}$$

بیان کرتا ہے جہاں سے مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر $(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}})$ حاصل ہوتی ہے۔آئیں شکل 7.1 کی مدد سے اس قانون کا مطلب سمجھیں۔

یہ قانون باریک تار کی انتہائی چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ جس میں برقی رو I گزر رہی ہو کی وجہ سے نقطہ N پر پیدا سمتی برقی میدان $\boldsymbol{H}$ دیتا ہے۔نقطہ N باریک تار کے چھوٹے حصے سے $\boldsymbol{R}$ فاصلے پر ہے۔باریک تار سے مراد ایسی ٹھوس نلکی نما

[1] Biot-Savart law

[2] یہ قانون فرانس کے بایوٹ اور سیوارٹ نے 1820 میں پیش کیا۔یہ دونوں ایمپیئر کے ساتھی تھے۔

شکل 7.1: بایوٹ سیوارٹ کا قانون۔

موصل تار ہے جس کی موٹائی کم سے کم ہو۔ چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی سمت برقی رو کی سمت میں ہے اور $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ مقناطیسی میدان کا منبع ہے۔

مقناطیسی شدت کی قیمت برقی رو ضرب باریک چھوٹی تار کی لمبائی $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}$ کے سمتی ضرب کے برائے راست تناسب جبکہ ان کے مابین فاصلہ R کے مربع کے بالعکس تناسب رکھتا ہے۔ تناسبی مستقل $\frac{1}{4\pi}$ ہے۔

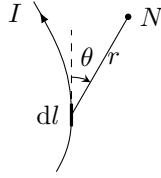
بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کا موازنہ کولمب کے قانون کے ساتھ کرنے کی غرض سے دونوں مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 &= \frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}\\ \mathrm{d}\boldsymbol{E}_2 &= \frac{\mathrm{d}Q_1\boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2}\end{aligned} \tag{7.2}$$

ان مساوات میں زیر نوشت میں 2 اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں میدان کی قیمت حاصل کی گئی ہے جبکہ زیر نوشت میں 1 میدان کے منبع کے مقام کو ظاہر کرتی ہے۔ دونوں میدان فاصلے کے مربع کا بالعکس تناسب رکھتے ہیں۔ دونوں اقسام کے میدان کی شدت اور میدان کی منبع کا خطی تعلق ہے۔ دونوں میں فرق میدان کی سمت کا ہے۔ برقی میدان کی سمت منبع سے اس نقطہ کی جانب ہے جس پر میدان حاصل کیا جا رہا ہو۔ مقناطیسی میدان کی سمت سمتی ضرب کے دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہوتی ہے۔

شکل 7.2 میں تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}l$ سے نقطہ N پر مقناطیسی میدان کی مقدار

$$\mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}l\sin\theta}{4\pi r^2} \tag{7.3}$$

ہو گا۔

شکل 7.2: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا میدان۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مساوات 7.1 کی شکل میں تجرباتی طور پر ثابت نہیں کیا جا سکتا چونکہ باریک تار کی چھوٹی لمبائی میں برقی رو تب گزرے گی جب برقی رو اس چھوٹی تار تک پہنچائی جائے۔ جو تار اس تک برقی رو پہنچائے گی، وہ بھی مقناطیسی میدان پیدا کرے گی۔ انہیں علیحدہ علیحدہ نہیں کیا جا سکتا۔ ہم فی الحال صرف یک سمت برقی رو کی بات کر رہے ہیں۔ یک سمت برقی رو کی صورت میں وقت کے ساتھ حجمی کثافتِ بار تبدیل نہیں ہو گا لہٰذا صفحہ 182 پر دئے استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{7.4}$$

حاصل ہو گا جسے مسئلہ پھیلاو کی مدد سے

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی ہوئی برقی رو صفر کے برابر ہے۔ یہ صرف اس صورت ممکن ہے جب برقی رو کسی بند راہ پر گزر رہی ہو۔ ہمیں ایسی ہی مکمل بند راہ کے برقی رو کے اثر کو دیکھنا ہو گا ناکہ تار کے کسی چھوٹے حصے کے برقی رو کو۔

یوں بایوٹ-سیوارٹ قانون کی تکمل شکل

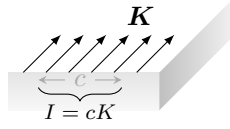
$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.5}$$

ہی تجرباتی طور پر ثابت کی جا سکتی ہے۔

مساوات 7.1 سے مساوات 7.5 لکھی جا سکتی ہے۔ البتہ مساوات 7.5 میں تکمل کے اندر کوئی بھی ایسی اضافی تفاعل شامل کیا جا سکتا ہے جس کا بند تکمل صفر کے برابر ہو۔ غیر سمتی میدان کا ڈھلوان ہر صورت بقائی میدان ہوتا ہے لہٰذا

K

c

$I = cK$

شکل 7.3: سطحی کثافت برقی رو کے c چوڑائی میں کل cK برقی رو ہو گا۔

مساوات 7.5 میں ∇G کے شمول سے اس کے جواب میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ G کوئی بھی غیر سمتی میدان ہو سکتا ہے۔

واضح رہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان مکمل برقی دور کے اثر کو شامل کرنے سے ہی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ برقی رو گزارتی تار کے کچھ حصے کے میدان یا ایسے میدان سے پیدا قوت کی بات بے معنی ہو گی۔

شکل 7.3 میں یکساں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ دکھایا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کو ایمپیئر فی اکائی چوڑائی پیش کیا جاتا ہے لہٰذا c چوڑائی کے حصے میں

$$I = cK$$

برقی رو ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو یکساں نہ ہو تب کسی بھی چوڑائی میں کل برقی رو بذریعہ تکمل

$$I = \int K \,\mathrm{d}c$$

حاصل ہو گی جہاں $\mathrm{d}c$ چوڑائی کا چھوٹا حصہ ہے۔ یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ یا حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کی صورت میں

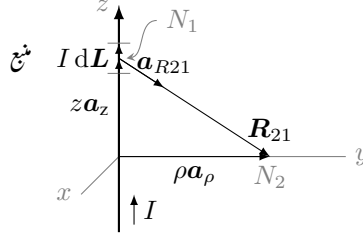
$$I \,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K} \,\mathrm{d}S = \boldsymbol{J} \,\mathrm{d}h \tag{7.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو

$$\boldsymbol{H} = \int_S \frac{\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}} \,\mathrm{d}S}{4\pi R^2} \tag{7.7}$$

یا

$$\boldsymbol{H} = \int_h \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}} \,\mathrm{d}h}{4\pi R^2} \tag{7.8}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 7.4: سیدھی لامحدود تار سے پیدا مقناطیسی میدان

آئیں سیدھی لامحدود لمبائی کی تار جس میں سے برقی رو گزر رہی ہو کی مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔ شکل 7.4 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس تار کے دونوں سرے لامحدود فاصلے پر ہیں۔ تار کے قریب نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان کا بیشتر حصہ تار کے اس حصے کی وجہ سے ہو گا جو N_2 کے قریب ہو۔ یوں لامحدود فاصلے پر تار کے سروں تک برقی رو پہنچانے والی تار کا نقطہ N_2 پر اثر کو نظرانداز کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

نقطہ N_1 پر تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں برقی رو کو منبع مقناطیسی میدان تصور کرتے ہوئے مساوات 7.1 کی مدد سے نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ

$$\boldsymbol{R}_{21} = \rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\text{Z}$$

کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} R_{21} &= |\boldsymbol{R}_{21}| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \boldsymbol{a}_\text{R} &= \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{|\boldsymbol{R}_{21}|} = \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\text{Z}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ نلکی محدد میں چھوٹی لمبائی

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho \boldsymbol{a}_\rho + \rho \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_\text{Z}$$

لکھی جاتی ہے۔ چونکہ یہاں $\mathrm{d}\rho = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہیں لہٰذا $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\text{Z}$ لکھتے ہوئے مساوات 7.1 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I \,\mathrm{d}z \boldsymbol{a}_\text{Z} \times (\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\text{Z})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔پورے تار کا مقناطیسی میدان اس مساوات کے تکمل سے حاصل ہو گا جہاں تکمل $-\infty$ تا $+\infty$ حاصل کیا جائے گا۔اس طرح

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \times (\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{I\rho}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{a}_\phi\,\mathrm{d}z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں صفحہ 26 پر مساوات 1.23 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi$ جبکہ مساوات 1.24 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0$ لکھے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا مساوات میں تکمل کے اندر $\boldsymbol{a}_\phi$ پر نظر رکھنی ہو گی۔اگرچہ $\boldsymbol{a}_\phi$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہو سکتی البتہ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ آیا تکمل کا متغیرہ یعنی z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت تو تبدیل نہیں ہوتی۔صفحہ 30 پر مساوات 1.34 کے تحت

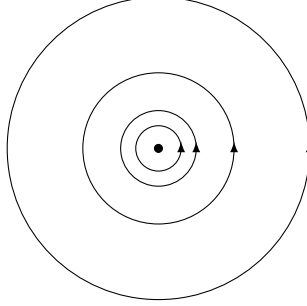
$$\boldsymbol{a}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$$

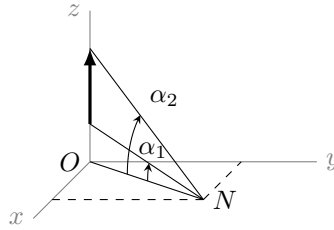
لکھا جا سکتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لہٰذا $\boldsymbol{a}_\phi$ کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_2 &= \frac{I\rho\boldsymbol{a}_\phi}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{I\rho\boldsymbol{a}_\phi}{4\pi}\,\frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned} \tag{7.9}$$

سے

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.10}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 7.5 میں برقی رو صفحہ سے باہر نکل رہی ہے جبکہ گول دائرے مقناطیسی میدان کو ظاہر کرتے ہیں۔اگر تار کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ انگوٹھا برقی رو کی سمت میں ہو تب اس ہاتھ کی انگلیاں تار کے گرد مقناطیسی میدان کی سمت میں لپٹی ہوں گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مقناطیسی میدان نا تو z تبدیل کرنے اور نا ہی زاویہ ϕ تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتا ہے۔اس کی قیمت صرف تار سے فاصلے پر منحصر ہے۔

شکل 7.5: سیدھی لمبی تار کا مقناطیسی میدان تار کے گرد دائرے بناتا ہے۔ برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے۔

z α_2 α_1 O y N x

شکل 7.6: سیدھی محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت۔

اگر شکل 7.4 میں تار لامحدود نہ ہو تب مساوات 7.6 میں تکمل کے محدود حدود پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی شدت

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi\rho}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.11}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں شکل 7.6 میں α_1 اور α_2 کی نشاندہی کی گئی ہے۔تار کا نچلا سرا xy سطح یعنی $z = 0$ سطح سے نیچے ہونے کی صورت میں α_1 کی قیمت منفی ہو گی۔یہی کچھ تار کے دوسرے سرے اور α_2 کے لئے بھی درست ہے۔

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

کولمب کے قانون کی مدد سے مختلف طرز پر پائے جانے والے بار کے برقی میدان حاصل کرنے کے بعد ہم نے گاوس کا قانون اخذ کیا جس سے ہماری زندگی نہایت آسان ہو گئی۔گاوس کے قانون کی مدد سے تشاکل بار سے پیدا برقی میدان انتہائی آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔تشاکل برقی رو کے مقناطیسی میدان حاصل کرنے کا بھی اتنا ہی آسان طریقہ موجود ہے جسے **ایمپیئر کا دوری قانون**[3] کہتے ہیں۔اس قانون کو بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حصہ 7.7.2 میں حاصل کیا گیا ہے۔فی الحال ہم اس قانون کو استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔اس قانون کے استعمال کے وقت مسئلے پر غور کرتے ہوئے بغیر حساب و کتاب کے فیصلہ کیا جاتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے کون کون سے اجزاء موجود نہیں ہونے چاہئے۔یہ فیصلہ برقی رو کے راستے کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔

ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ یک سمت برقی رو کے گرد کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کا لکیری بند تکمل گھیرے برقی رو کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I \tag{7.12}$$

لکیری بند تکمل کی سمت میں برقی رو کے گرد دائیں ہاتھ کی انگلیاں گھمانے سے اسی ہاتھ کا انگوٹھا مثبت برقی رو کی سمت دے گا۔ایسا کرتے وقت انگوٹھے کو باقی چار انگلیوں کے عمودی رکھا جاتا ہے۔

کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل سے مراد اس راہ کو انتہائی چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں تقسیم کر کے ہر ٹکڑے پر $\boldsymbol{H}$ کی قیمت استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کر کے تمام $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا مجموعہ حاصل کرنا ہے۔مقناطیسی

[3] Ampere's circuital law

شدت $\boldsymbol{H}$ کی قیمت مختلف مقامات پر عموماً مختلف ہو گی۔یوں کسی ایک نقطے پر $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت کسی دوسرے نقطے کے $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے مختلف ہو گی۔ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ اگرچہ یک سمت برقی رو کے گرد دو مختلف بند راہوں پر جگہ جگہ $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن دونوں راہ پر ان کا مجموعہ عین برقی رو کے برابر ہو گا۔

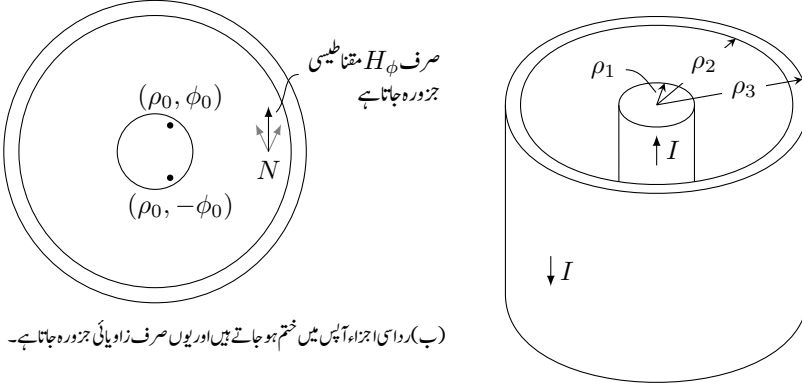
کسی بھی سطح کا محیط، بند راہ ہوتی ہے۔اسی طرح کوئی بھی بند راہ، لامحدود سطحوں کا محیط ہوتا ہے۔یوں بند راہ کا گھیرا ہوا برقی رو ان تمام سطحوں کو چھیرتا ہوا گزرے گا جن کا محیط یہ بند راہ ہو۔

گاوس کے قانون کا استعمال تب ممکن ہوتا ہے جب بند سطح میں کل برقی بار معلوم ہو۔ایمپیئر کا دوری قانون اس صورت استعمال کیا جا سکتا ہے جب بند راہ میں گھیرا کل یک سمت برقی رو معلوم ہو۔

آئیں شکل 7.4 میں دکھائے گئے برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت ایمپیئر کے دوری قانون یعنی مساوات 7.12 کی مدد سے دوبارہ حاصل کریں۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برقی رو کے گرد راہ یوں چُنی جاتی ہے کہ اس پر $\boldsymbol{H}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ یا تو آپس میں عمودی ہوں اور یا $\boldsymbol{H}$ کی قیمت قطعی اور اس کی سمت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے متوازی ہو۔پہلی صورت میں دونوں متغیرات کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 90=0$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں راہ کے اس حصے پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ دوسری صورت میں متغیرات کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 0=1$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو $H\,\mathrm{d}L$ لکھا جا سکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مقناطیسی شدت کی قیمت قطعی ہونے کی وجہ سے H کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں راہ کے اس راستے پر تکمل کی قیمت HL کے برابر ہو گی جہاں L راہ کے اس حصے کی لمبائی ہے۔

تار کے گرد اور اس کے ساتھ ساتھ حرکت کرنے سے واضح ہوتا ہے کہ مسئلے کی نوعیت نا تو تار کے گرد زاویہ ϕ پر اور نا ہی محدد z پر منحصر ہے۔تار سے دور یا اس کے قریب ہونے سے ہی مسئلے کی نوعیت میں تبدیلی آتی ہے۔یوں صاف ظاہر ہے کہ مقناطیسی شدت صرف ρ پر منحصر ہو سکتی ہے۔اسی طرح بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی شدت $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت رکھتی ہے یعنی اس کا صرف H_ϕ جزو پایا جائے گا۔یوں اگر ρ تبدیل کئے بغیر تار کے گرد چلا جائے تو ہم یقین رکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{H}$ کی مطلق قیمت H_ϕ تبدیل نہیں ہو گی۔ساتھ ہی ساتھ اس راہ پر کسی بھی نقطے پر $H_\phi\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi$ آپس میں متوازی ہوں گے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\int_0^{2\pi} H_\phi\rho\,\mathrm{d}\phi=H_\phi\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=H_\phi 2\pi\rho=I$$

(ب) رداسی اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں اور یوں صرف زاویائی جزو رہ جاتا ہے۔

(ا) ہم محوری تار کے اندرونی تار میں مثبت جبکہ بیرونی تار میں منفی برقی رو ہے۔

شکل 7.7: ہم محوری تار۔

یا

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جو ہم پہلے بھی حاصل کر چکے ہیں۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی دوسری مثال کی خاطر ہم شکل 7.7 میں دکھائے گئے ہم محوری تار لیتے ہیں۔فرض کریں کہ z محدد پر پڑی ایسی لامحدود لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی حصے میں I اور اس کے بیرونی سطح میں $-I$ برقی رو گزر رہی ہے۔اندرونی موصل موٹی ساخت کی تار کو نہایت پتلی فرضی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔آئیں ان پتلی فرضی تاروں سے نقطہ N پر پیدا مقناطیسی شدت پر غور کریں۔نقطہ N کو کارتیسی محدد کے x محدد پر رکھتے ہوئے مسئلے کی نوعیت شکل 7.7-ب میں دکھائی گئی ہے۔پچھلی مثال سے یہ واضح ہے کہ ایسی کسی بھی پتلی تار کی مقناطیسی شدت میں H_z جزو نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایسی تار کی مقناطیسی شدت تار کے گرد گول دائرہ بناتی ہے۔کسی بھی فرضی تار جو (ρ_0, ϕ_0) پر پائی جاتی ہو N پر ΔH_ρ اور ΔH_ϕ اجزاء پیدا کرے گی۔اسی طرح $(\rho_0, -\phi_0)$ پر پتلی تار سے پیدا مقناطیسی شدت کے بھی ایسے رداسی اور زاویائی اجزاء ہوں

گے۔ان دونوں پتلی تاروں کے رداسی اجزاء آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لٰہذا یہ ایک دوسرے کو ختم کریں گے جبکہ زاویائی اجزاء ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں لٰہذا N پر صرف زاویائی جزو پایا جائے گا۔

اندرونی ٹھوس موصل تار کے گرد ایسا گول دائرہ لیتے ہیں جس کا رداس ρ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے زیادہ مگر بیرونی تار کے اندرونی رداس ρ_2 سے کم ہو۔اس راہ پر ہم ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2) \tag{7.13}$$

لکھ سکتے ہیں۔

اندرونی تار کا رقبہ عمودی تراش $\pi\rho_1^2$ ہے لٰہذا اس میں کثافت برقی رو $\frac{I}{\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔اگر ρ کو اندرونی ٹھوس موصل تار کے رداس ρ_1 سے کم رکھا جائے تب یہ راہ

$$I_{\text{گھیرا}} = \frac{I}{\pi\rho_1^2}\pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}I$$

برقی رو کو گھیرے گا لٰہذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اندرونی ٹھوس تار میں

$$H_\phi = \frac{\rho I}{2\pi\rho_1^2} \qquad (\rho < \rho_1)$$

مقناطیسی شدت پایا جائے گا۔اسی طرح اگر ρ کو بیرونی تار کے بیرونی رداس ρ_3 سے زیادہ رکھا جائے تب یہ راہ اندرونی تار کے $+I$ اور بیرونی تار کے $-I$ کو گھیرے گی لٰہذا یہ کل $I - I = 0$ برقی رو کو گھیرے گا لٰہذا

$$H_\phi = 0 \qquad (\rho_3 < \rho)$$

ہو گا۔آخر میں اس صورت کو بھی دیکھتے ہیں جب ρ بیرونی تار کے اندر پایا جائے۔ایسی صورت میں یہ راہ

$$I_{\text{گھیرا}} = I - \left(\frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) I = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) I$$

برقی رو گھیرے گی لٰہذا بیرونی تار میں

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) \qquad (\rho_2 < \rho < \rho_3)$$

ہو گا۔

ہم محوری تار کے باہر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے۔اس کی وجہ یہ ہے کہ تار کے باہر کوئی بھی بند گول دائرہ اندرونی تار کی برقی رو I اور بیرونی تار کی برقی رو $-I$ دونوں کو گھیرتا ہے۔یہ دونوں برابر مقدار مگر الٹ سمت کے برقی رو ہر نقطے پر برابر مگر الٹ سمت میں مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ہم محوری تار کی یہ خاصیت کہ یہ بیرون تار کسی قسم کا مقناطیسی میدان نہیں پیدا کرتا انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔ہم محوری تار اسی خاصیت کی بنا پر ہر ایسی جگہ پر استعمال کیا جاتا ہے جہاں تار میں پائے گئے برقی اشارات سے بیرونی تار کسی قسم کا اثر ناقابل برداشت ہو۔

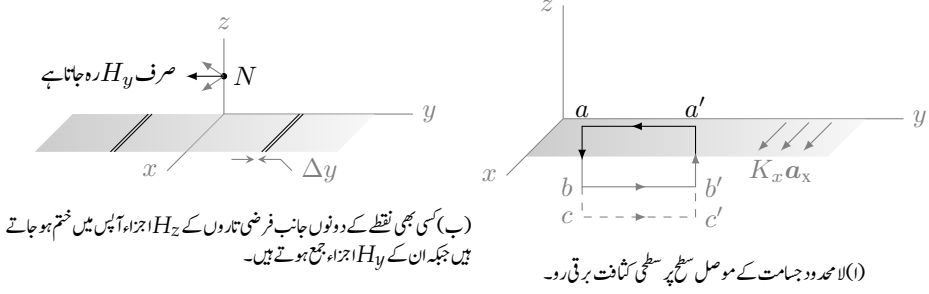
ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی تیسری مثال کو شکل 7.8-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں $z = 0$ لامحدود چوڑائی اور لامحدود لمبائی کے موصل سطح پر $K_x \boldsymbol{a}_{\text{x}}$ سطحی کثافت برقی رو گزر رہی ہے۔ہمیں اس سطح کے قریب نقطہ N پر مقناطیسی شدت حاصل کرنے سے دلچسپی ہے۔ سطح کے $x = +\infty$ سرے سے $x = -\infty$ سرے تک برقی رو بذریعہ دو لامحدود چوڑائی کے موصل سطحوں سے واپس پہنچتی ہے۔یہ سطحیں $z = +\infty$ اور $z = -\infty$ پر ہیں۔اتنی دور سطحوں کے اثر کو نقطہ N پر نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

موصل سطح کو Δy چوڑائی کی فرضی تاروں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسا شکل 7.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔یوں ہر ایسی فرضی تار $K_x \Delta y \boldsymbol{a}_{\text{x}}$ برقی رو گزارے گی۔لامحدود تار کے مقناطیسی میدان سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ایسی کسی بھی فرضی تار کی برقی رو H_x جزو پیدا نہیں کرے گا۔ سطح پر N کے ایک جانب فرضی تار کا H_z جزو، سطح پر N کے دوسری جانب فرضی تار کے H_z جزو کو ختم کرتا ہے جبکہ ان کے H_y اجزاء مل کر دگنی مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں۔اس طرح مقناطیسی شدت کا صرف اور صرف H_y جزو ممکن ہے۔

شکل 7.8-الف میں موصل سطح کے کچھ حصے کو گھیرتی ہوئی مستطیلی راہ $a'abb'$ دکھائی گئی ہے۔ aa' یا bb' کی لمبائی y_1 ہے جبکہ ab یا $a'b'$ کی لمبائی $2z_1$ ہے۔اس راہ کے z_1 حصوں پر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے لہٰذا اس حصے پر مقناطیسی شدت کا تکمل بھی صفر کے برابر ہو گا۔راہ کے y_1 اطراف سطح سے دونوں جانب z_1 فاصلے پر ہیں۔ سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں۔بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی کثافت برقی رو موصل سطح کے اوپر جانب $-H_{ya}\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ جبکہ اس کے نچلی جانب $+H_{yb}\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ مقناطیسی شدت پیدا کرتا ہے۔ مستطیلی راہ $K y_1$ برقی رو کو گھیرتی ہے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت

$$H_{ya} y_1 + H_{yb} y_1 = K_x y_1$$

(ا) لامحدود جسامت کے موصل سطح پر سطحی کثافت برقی رو۔

(ب) کسی بھی نقطے کے دونوں جانب فرضی تاروں کے H_z اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں جبکہ ان کے H_y اجزاء جمع ہوتے ہیں۔

شکل 7.8: لامحدود سطحی کثافت برقی رو۔

یا

$$H_{ya} + H_{yb} = K_x \tag{7.14}$$

ہو گا۔اب اگر موصل سطح کے ایک جانب مستطیلی راہ کا y_1 حصہ قدر دور کرتے ہوئے z_2 فاصلے پر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$H_{ya} + H_{yc} = K_x$$

صورت اختیار کر لے گی جس سے صاف ظاہر ہے کہ H_{yb} اور H_{yc} عین برابر ہیں یعنی مقناطیسی شدت کا دارومدار سطح سے فاصلے پر ہر گز نہیں ہے۔اس طرح تمام ایسے نقطے جو مثبت z پر پائے جاتے ہوں پر مقناطیسی شدت برابر ہو گی۔یہی کچھ تمام ایسے نقطوں کے لئے بھی درست ہے جو منفی z پر پائے جاتے ہوں۔

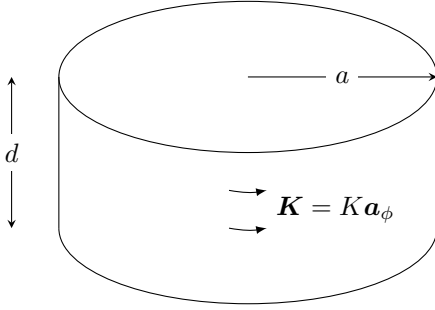
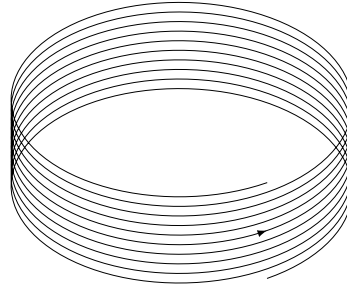
سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں لہٰذا دونوں جانب مقناطیسی شدت بھی برابر ہو گی یعنی

$$\left|\boldsymbol{H}_{ya}\right| = \left|\boldsymbol{H}_{yb}\right|$$

ہو گا۔اس طرح مساوات 7.14 سے $H_{ya} = H_{yb} = H_y = \frac{K_x}{2}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{H}_y = -\frac{1}{2} K_x \boldsymbol{a}_{\text{X}} \qquad (z > 0)$$
$$\boldsymbol{H}_y = +\frac{1}{2} K_x \boldsymbol{a}_{\text{X}} \qquad (z < 0)$$

حاصل ہوتا ہے جسے بہتر طور پر

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2} \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_N \tag{7.15}$$

(ب) پیچدار لچھے کو سطحی کثافت تصور کیا جا سکتا ہے۔

(ا) پیچ دار لچھا۔

شکل 7.9: پیچدار لچھے کے میدان کا حصول۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

اگر $z = -h$ پر دوسری لامحدود موصل سطح رکھی جائے جس میں سطحی کثافت برقی رو $-K_X\boldsymbol{a}_X$ ہو تب دونوں سطحی کثافت برقی رو کی مجموعی مقناطیسی شدت

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_N \qquad (-h < z < 0) \\
\boldsymbol{H} &= 0 \qquad (z < -h, \quad z > 0)
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

ہو گی۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال میں سب سے مشکل کام ایسی راہ تلاش کرنا ہے جس پر مقناطیسی میدان یا راہ کے عمودی ہو اور یا پھر اس کی قیمت مستقل ہو۔ جہاں قبل از وقت ایسا جاننا ممکن نہ ہو وہاں بایوٹ-سیوارٹ کا قانون ہی قابل استعمال ہو گا۔

آئیں ایمپیئر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے شکل 7.9-الف میں دکھائے گئے، لا محدود لمبائی کے پیچدار لچھے[4] کا مقناطیسی میدان حاصل کریں۔ لچھے کا رداس a جبکہ اس میں لمبائی جانب d فاصلے پر N چکر پائے جاتے ہیں جن میں برقی رو I گزر رہی ہے۔ لچھے کا محور عین z محدد پر پایا جاتا ہے۔

---

[4] solenoid

لچھے کے چکر انتہائی قریب قریب ہونے کی صورت میں لچھے کی تاروں میں برقی رو کو سطحی کثافت رو تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل 7.9-ب میں ایسا ہی کرتے ہوئے لچھے کو نلکی سطحی کثافت

$$\boldsymbol{K} = K\boldsymbol{a}_{\phi} = \frac{NI}{d}\boldsymbol{a}_{\phi}$$

تصور کیا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کی صورت میں سطح کے باہر مقناطیسی میدان صفر کے برابر ہو گا جبکہ اس کے اندر میدان نہ تو ρ اور نا ہی ϕ پر منحصر ہے۔ لامحدود لمبائی کی نلکی میں میدان z پر بھی منحصر نہیں ہو گا۔ ساتھ ہی ساتھ میدان صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ سمت میں ہو گا۔

نلکی کے اندر اور باہر، z محدد کے متوازی لمبائی d کی فرضی لکیروں کے سرے آپس میں جوڑنے سے بند راہ پر ایمپیئر کا دوری قانون لاگو کرتے ہوئے میدان

$$\boldsymbol{H} = K\boldsymbol{a}_{\text{Z}} = \frac{NI}{d}\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \qquad \text{نلکی کے اندر} \tag{7.17}$$

$$\boldsymbol{H} = 0 \qquad \text{نلکی کے باہر} \tag{7.18}$$

حاصل ہوتا ہے۔

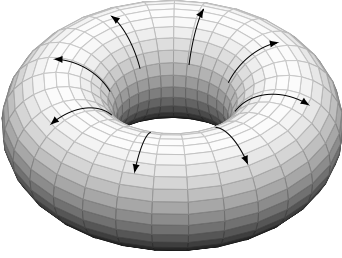
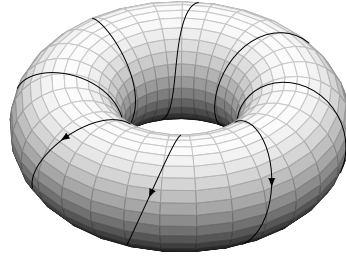
محدود لمبائی کی پیچدار لچھا جس کے چکر قریب قریب ہوں کا میدان مساوات 7.17 ہی دیتی ہے۔ یہ مساوات لچھے کے سروں اور تار سے دور میدان کی صحیح قیمت دیتی ہے۔

آئیں ایمپیئر کے دوری قانون کی ایک اور مثال دیکھیں۔ شکل 7.9-الف کے پیچدار لچھے کو دائری شکل دے کر شکل 7.10-الف حاصل ہوتا ہے۔

شکل 7.10-الف میں اندرسہ[5] شکل[6] کی سطح پر N چکر کی لپٹی تار میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ اندرسہ $z = 0$ سطح پر پڑی ہے جبکہ z محدد اس کے محور سے گزرتا ہے۔ لپٹی تار کے چکر قریب قریب ہونے کی صورت میں اندرسے کی سطح پر K کثافت برقی رو تصور کی جا سکتی ہے۔ اندرسے کا عمودی تراش رداس a کا دائرہ ہے جبکہ اندرسے کا اوسط رداس b ہے۔ اس طرح اندرسے کا اندرونی رداس $b - a$ جبکہ اس کا بیرونی رداس $b + a$ ہو گا۔ یوں اندرسے کے محور کے قریبی سطح پر کثافت برقی رو

$$K = \frac{NI}{2\pi(b-a)} \qquad \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

[5] بچپن میں اندرسہ کس نے نہیں کھایا۔ یہ شکل اندرسہ کی طرح ہے لہٰذا اس کتاب میں اسے اندرسہ ہی پکارا جائے گا۔ آپ اسے سائیکل کے ٹائر میں موجود ٹیوب تصور کر سکتے ہیں۔
[6] toroid

(ا) اندر سہ لچھا۔

(ب) اندر سہ کی سطح پر کثافت برقی رو پائی جاتی ہے۔

شکل 7.10: اندر سہ کی سطح پر تار میں برقی رو کو کثافت برقی رو تصور کیا جا سکتا ہے۔

ہو گی۔ ایمپیئر کا دوری قانون استعمال کرنے کی غرض سے ہم اندرسے کے اندر رداس $(b-a) < \rho < (b+a)$ کا دائرہ لیتے ہیں۔ یہ فرضی دائرہ اندرسے کے محور کے قریبی سطح پر کثافت K کو گھیرے گا لہٰذا یہ

$$2\pi(b-a)K$$

برقی رو کو گھیرے گا۔ یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے اس رداس پر مقناطیسی میدان

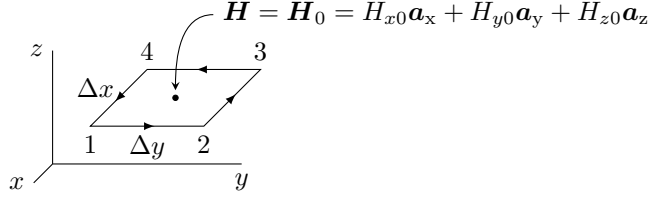
$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \frac{2\pi(b-a)K}{2\pi\rho} = \frac{NI}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi && \text{اندرسے کے اندر} \\ \boldsymbol{H} &= 0 && \text{اندرسے کے باہر} \end{aligned} \tag{7.19}$$

ہو گا۔

شکل 7.10-الف میں تار کے چکر قریب قریب نہ ہونے کی صورت میں جب تک ہم دو چکر کے مابین فاصلے سے چند گنا زیادہ دور، تار سے ہٹ کر رہیں، یہی مساوات اصل میدان کی قیمت کے قریب قریب جواب دے گی۔

7.3 گردش

آپ کو یاد ہو گا کہ ہم نے گاوس کے قانون کو انتہائی چھوٹے حجم پر لاگو کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی تھی۔ اس حصے میں ہم ایمپیئر کے دوری قانون کو انتہائی چھوٹی بند راہ پر استعمال کرتے ہوئے گردش[7] کی مساوات

[7] curl

شکل 7.11: گردش کی تعریف۔

حاصل کریں گے۔

کارتیسی محدد میں ہم کسی نقطے N پر Δx اور Δy اطراف کی چھوٹی بند راہ لیتے ہیں۔ شکل 7.11 میں اس چھوٹی بند راہ کو دکھایا گیا ہے جو رقبہ $\Delta x \Delta y$ کو گھیرتی ہے۔ یہ راہ مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H} = H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں پائی جاتی ہے۔ شکل میں راہ پر تیر کے نشان راہ پر چلنے کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس رقبے کے عین وسط میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_0 &= H_x(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_y(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_z(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ &= H_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس بند راہ کے گرد مقناطیسی شدت کا تکمل رقبہ $\Delta x \Delta y$ سے گزرتی برقی رو کے برابر ہو گا۔ آئیں اس تکمل کو حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بند راہ پر 1 سے 2 کی طرف چلتے ہوئے پورا چکر کاٹیں گے۔

کارتیسی محدد میں کسی بھی چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 7.11 میں 1 تا 2 پر $\mathrm{d}x = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ ہیں لہٰذا اس چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ چھوٹے چکور کا وسط (x_0, y_0, z_0) ہے۔ یوں چکور کا 1 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 - \frac{\Delta y}{2})$ پر اور 2 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2})$ پر ہو

گا۔یوں راہ کے پہلے حصے 1 تا 2 پر لکیری تکمل

$$\begin{aligned}
\int\limits_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left(H_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \cdot \mathrm{d}y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} &= \int\limits_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} H_y \,\mathrm{d}y \\
&= H_{y21} \int\limits_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \mathrm{d}y \\
&= H_{y21} \Delta y
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کو H_y کے بجائے H_{y21} لکھتے ہوئے اور اس راہ پر مقناطیسی شدت میں تبدیلی کو نظر انداز کرتے ہوئے تکمل کے باہر لے جایا گیا۔ہمیں اس طرح کے تکمل بار بار حاصل کرنے ہوں گے لہٰذا اس پورے عمل کو ہم

$$(\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} = H_{y21} \Delta y \tag{7.20}$$

لکھیں گے۔ہمیں رقبے کے عین وسط میں مقناطیسی شدت معلوم ہے البتہ راہ کے پہلے حصے پر ہمیں اس کے بارے میں معلومات فراہم نہیں ہے۔ایسی صورت میں ہمیں ٹیلر تسلسل[8] کو بروئے کار لانا ہو گا۔

ٹیلر تسلسل

$$f(x+\delta x) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\delta x)^2 + \cdots$$

سے آپ بخوبی واقف ہیں جہاں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور دیگر تفرق کو نقطہ x پر حاصل کیا جاتا ہے۔اگر اس میں $\delta x = \frac{\Delta x}{2}$ پر کیا جائے تو اس کی نئی شکل

$$f(x+\tfrac{\Delta x}{2}) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \cdots$$

حاصل ہوتی ہے جسے ہم اب استعمال کرتے ہیں۔

---

[8] Taylor series

اگر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تفاعل H_y کی قیمت $H_y(x_0, y_0, z_0)$ ہو تب نقطہ $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$ پر اس کی قیمت مسئلہ ٹیلر سے

$$\begin{aligned} H_y(x_0 + \tfrac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) &= H_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \cdots \\ &= H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \cdots \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ کو نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر حاصل کیا جاتا ہے۔راہ 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کی قیمت ٹیلر تسلسل کے پہلے دو اجزاء سے حاصل کرتے ہوئے

$$H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.21}$$

لکھ کر مساوات 7.20 کو

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} \doteq \left(H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.22}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.21 کو یوں بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔چھوٹے رقبے کے وسط میں x کے ساتھ H_y میں تبدیل ہونے کی شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں اگر x میں Δx تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x$ ہو گی۔اسی طرح اگر x میں $\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔اب رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر 1 تا 2 راہ کا درمیانہ نقطہ ہے لٰہذا یہاں

$$H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.23}$$

ہو گا جو عین مساوات 7.21 ہی ہے۔

راہ کے اگلے حصے یعنی 2 تا 3 یہی کچھ کرتے ہوئے

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32} = H_{x32}(-\Delta x) \doteq -\left(H_{x0} + \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.24}$$

جبکہ 3 تا 4 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43} = H_{43}(-\Delta y) \doteq -\left(H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.25}$$

اور 4 تا 1 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14} = H_{x14}\Delta x \doteq \left(H_{x0} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.26}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 7.22، مساوات 7.24، مساوات 7.25 اور مساوات 7.26 کو جمع کرتے ہوئے پورے بند راستے کا تکمل

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \tag{7.27}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر اس چھوٹے بند راہ کے گھیرے رقبے پر کثافت برقی رو

$$\boldsymbol{J} = J_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + J_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + J_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہو تب اس رقبے سے $J_z\Delta x\Delta y$ برقی رو گزرے گی۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت بند راہ کا تکمل اور رقبے سے گزرتی برقی رو برابر ہوں گے یعنی

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \doteq J_z\Delta x\Delta y$$

ہو گا جسے

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x\Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ رقبے کو جتنا چھوٹا کیا جائے مندرجہ بالا مساوات اتنی ہی زیادہ درست ہو گی حتیٰ کہ $\Delta x \to 0$ اور $\Delta y \to 0$ کی صورت میں یہ مکمل طور پر درست ہو گا اور یوں مساوات میں تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ بالکل برابر $=$ کی علامت استعمال کی جائے گی یعنی

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x\Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \tag{7.28}$$

لکھا جائے گا۔

اگر ہم کارتیسی محدد کے بقایا دو محدد کے عمودی چھوٹے رقبے لیں اور مندرجہ بالا عمل دہرائیں تو ہمیں

$$\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \tag{7.29}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \tag{7.30}$$

حاصل ہوں گے۔ مساوات 7.29 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δy اور Δz ہیں جس سے $J_x \Delta y \Delta z$ برقی رو گزرتی ہے۔اسی طرح مساوات 7.30 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δz اور Δx ہیں جس سے $J_y \Delta z \Delta x$ برقی رو گزرتی ہے۔

ایمپیئر کے دوری قانون سے شروع کرتے ہوئے ہم نے مساوات 7.28، مساوات 7.29 اور مساوات 7.30 حاصل کی جو مقناطیسی شدت کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو گھیرے گئے کثافت برقی رو کے برابر ٹھہراتے ہیں۔کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو اس متغیرہ کی گردش[9] کہتے ہیں۔انتہائی چھوٹے رقبے کے گرد گردش کرتے ہوئے کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل کو اس نقطے پر متغیرہ کے گھومنے یا گردش کی ناپ تصور کی جا سکتی ہے۔اسی لئے اس عمل کو گردش کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کی گردش بھی سمتیہ ہو گی۔ گردش کا کوئی بھی جزو انتہائی چھوٹے سیدھے رقبے کے گرد سمتیہ کے بند تکمل فی یہی رقبہ کے برابر ہو گا جہاں بند تکمل کی راہ درکار جزو کے عمودی سطح میں پایا جاتا ہو اور رقبے کی قیمت صفر کے قریب سے قریب تر ہو۔ گردش کی یہ تعریف کسی بھی محدد پر مبنی نہیں ہے۔اس تعریف کی حسابی شکل

$$\text{گردش}\, \boldsymbol{H} = \lim_{\Delta S_n \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta S_n}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{H}$ کی گردش حاصل کی گئی ہے۔اس مساوات میں ΔS_n وہ چھوٹا سیدھا رقبہ ہے جس کے گرد $\boldsymbol{H}$ کا بند تکمل حاصل کیا گیا ہے۔ گردش از خود سیدھی سطح کے عمودی ہو گا۔ رقبہ ΔS_n لکھتے ہوئے زیر نوشت میں n اسی حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ رقبے اور گردش کے درمیان نوے درجے کا زاویہ پایا جاتا ہے۔

[9] curl

کارتیسی محدد میں گردش $\boldsymbol{H}$ کے x، y اور z اجزاء مساوات 7.29، مساوات 7.30 اور مساوات 7.28 بالترتیب دیتے ہیں لہٰذا

$$\text{گردش}\,\boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \boldsymbol{J} \tag{7.31}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کو قالب کے مقطع[10] کی شکل میں

$$\text{گردش}\,\boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{J} \tag{7.32}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 116 پر مساوات 3.29 نیبلا ∇ کے عمل کو بیان کرتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

اور صفحہ 22 پر مساوات 1.19 دو سمتیات کا سمتی ضرب دیتا ہے۔ان سے گردش نہایت خوبصورتی سے

$$\text{گردش}\,\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{H} \tag{7.33}$$

لکھی جا سکتی ہے۔آپ جلد دیکھیں گے کہ صرف کارتیسی محدد میں ہی گردش ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کے صلیبی ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔اس کے باوجود کسی بھی محدد میں گردش کو $\nabla \times \boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں کارتیسی محدد میں H کی گردش یوں لکھی جائے گی۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{7.34}$$

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.35}$$

---

[10] determinant

لکھی جا سکتی ہے جو میکس ویل کی دوسری مساوات ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے ہوئے میدان کے لئے درست ہے۔یہاں میکس ویل کی تیسری مساوات کا بھی ذکر کر لیتے ہیں جو $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{7.36}$$

ہے۔ میکس ویل کے چوتھی مساوات پر اس کتاب میں آگے غور کیا جائے گا۔

آپ جانتے ہیں کہ ساکن برقی میدان بقائی میدان ہوتا ہے لہٰذا اس میں بار q کو کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔یوں $q\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا جس سے $\boldsymbol{E}$ کا گردش بھی صفر ہو گا۔مساوات 7.36 یہی کہتی ہے۔اس کے برعکس وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر مقناطیسی میدان غیر بقائی میدان ہے جس میں بار کو برقی رو گھیرتی ہوئی کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے توانائی درکار ہو گی۔اسی لئے اس کی گردش صفر نہیں ہو گی۔مساوات 7.35 یہی کہتی ہے۔

مشق 7.1: گردش یعنی $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کو

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \times \left(H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)$$

لکھ کر سمتی ضرب سے مساوات 7.31 حاصل کریں۔

مشق 7.2: اگر $\boldsymbol{H} = (x^2y+2z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (xz-y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (e^xyz)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ تب $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کیا ہو گا اور اس کی قیمت نقطہ $(0,1,2)$ پر کیا ہو گی۔

جوابات: $\nabla \times \boldsymbol{H} = (e^xz-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (2-e^xyz)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (z-x^2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور نقطے پر گردش کی قیمت $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو گی۔

مثال 7.1: سمتیہ $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\text{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے گردش کی گردش یعنی $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 7.34 سے

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tag{7.37}$$

لکھتے ہیں۔ مساوات 7.34 دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = &\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\text{X}}\\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\text{y}}\\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\end{aligned}$$

تمام تفرق حاصل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = &\left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}\right]\boldsymbol{a}_{\text{X}}\\
&+ \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y}\right]\boldsymbol{a}_{\text{y}}\\
&+ \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z}\right]\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\end{aligned}$$

اس مساوات کے پہلے جزو میں $\mp\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$، دوسرے جزو میں $\mp\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}$ اور تیسرے میں $\mp\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$ شامل کرتے ہوئے ذرا مختلف ترتیب سے لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} &= \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}\right] \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right] \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
&+ \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y}\right] \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right] \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \\
&+ \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right] \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right] \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned} \tag{7.38}
$$

یہاں رک کر $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کی ڈھلوان یعنی $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$ حاصل کرتے ہیں۔ پھیلاو

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
$$

استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A}\right) &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}\right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}\right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned} \tag{7.39}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{A} &\equiv \nabla^2 A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \nabla^2 A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \nabla^2 A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned} \tag{7.40}
$$

لکھیں تب مندرجہ بالا دو مساواتوں کی مدد سے مساوات 7.38 کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} \equiv \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{7.41}
$$

مساوات 7.40 سمتیہ کی لاپلاسی[11] ہے۔

مثال 7.2: سمتیہ $\boldsymbol{S}$ اور غیر سمتی مقدار M کے حاصل ضرب کی گردش کے لئے ثابت کریں کہ

$$\nabla \times (M\boldsymbol{S}) \equiv (\nabla M) \times \boldsymbol{S} + M\,(\nabla \times \boldsymbol{S}) \tag{7.42}$$

کے برابر ہے۔

حل: سمتیہ اور غیر سمتی مقدار کے حاصل ضرب کو

$$M\boldsymbol{S} = M\left(S_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + S_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + S_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) = MS_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + MS_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + MS_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھتے ہوئے اس کی گردش مساوات 7.34 کی طرح لکھ کر

$$\begin{aligned}\nabla \times M\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial MS_z}{\partial y} - \frac{\partial MS_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial MS_x}{\partial z} - \frac{\partial MS_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \\ + \left(\frac{\partial MS_y}{\partial x} - \frac{\partial MS_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

تفرق کھولتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla \times M\boldsymbol{S} = &\left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z + M\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}S_y - M\frac{\partial S_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\ &+ \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x + M\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x}S_z - M\frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \\ &+ \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y + M\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}S_x - M\frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

---

[11] vector Laplacian

اس کو یوں ترتیب دیتے ہیں

$$\nabla \times M\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z - \frac{\partial M}{\partial z}S_y\right)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x - \frac{\partial M}{\partial x}S_z\right)\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y - \frac{\partial M}{\partial y}S_x\right)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$$
$$+ M\left[\left(\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \left(\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right]$$

اس مساوات کا دوسرا جزو $M(\nabla \times \boldsymbol{S})$ کے برابر ہے جبکہ اس کا پہلا جزو $(\nabla M) \times \boldsymbol{S}$ کے برابر ہے جسے

$$(\nabla M) \times \boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \frac{\partial M}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + \frac{\partial M}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right) \times \left(S_x\boldsymbol{a}_{\text{X}} + S_y\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + S_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right)$$

لکھ کر صلیبی ضرب کے بعد ترتیب دینے سے

$$(\nabla M) \times \boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z - \frac{\partial M}{\partial z}S_y\right)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x - \frac{\partial M}{\partial x}S_z\right)\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y - \frac{\partial M}{\partial y}S_x\right)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$$

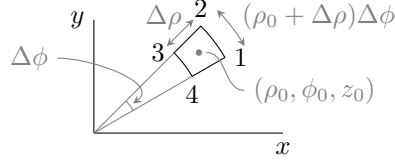
حاصل کیا جا سکتا ہے۔

7.3.1 نلکی محدد میں گردش

نلکی محدد میں J_z کثافت برقی رو کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جسے شکل 7.12 میں دکھایا گیا ہے۔ایسے رقبے کے اطراف $\Delta\rho$ اور $\rho\Delta\phi$ ہوں گے جبکہ اس سطح پر z کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی۔اس رقبے کے وسط میں

$$\boldsymbol{H}_0(\rho_0, \phi_0, z_0) = H_{\rho 0}\boldsymbol{a}_\rho + H_{\phi 0}\boldsymbol{a}_\phi + H_{z0}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$$

ہو گا۔کارتیسی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ اور $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر اطراف کی لمبائیاں عین برابر تھیں۔نلکی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta \rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ جبکہ وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ ہے۔انہیں اطراف پر مقناطیسی شدت بالترتیب

$$H_{\phi 21} \doteq H_{\phi 0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

شکل 7.12: نلکی محدد میں چھوٹا رقبہ۔

اور

$$H_{\phi 43} \doteq H_{\phi 0} - \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

ہو گی جہاں $\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}$ چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔یوں 1 سے 2 جانب چھوٹے رقبے کے گرد چکر کاٹتے ہوئے ان دو اطراف پر تکمل

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} &\doteq \left(H_{\phi 0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left(\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi \\ &\doteq \left[H_{\phi 0}\rho_0 + H_{\phi 0}\frac{\Delta\rho}{2} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43} &\doteq \left(H_{\phi 0} - \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left[-\left(\rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\right] \\ &\doteq \left[-H_{\phi 0}\rho_0 + H_{\phi 0}\frac{\Delta\rho}{2} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2} - \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi\end{aligned}$$

ہوں گے۔

چھوٹے رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ یا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر اطراف $\Delta\rho$ لمبائی رکھتے ہیں جبکہ ان پر اوسط شدت بالترتیب

$$H_{\phi 32} \doteq H_{\rho 0} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

اور

$$H_{\phi 14} \doteq H_{\rho 0} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

ہیں۔یوں ان اطراف پر تکمل

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32} \doteq \left(H_{\rho 0}+\frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)(-\Delta\rho)$$

اور

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14} \doteq \left(H_{\rho 0}-\frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)\Delta\rho$$

ہوں گے۔

یوں پورا تکمل ان چار جوابات کا مجموعہ

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(H_{\phi 0}+\rho_0\frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho}-\frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi \tag{7.43}$$

ہو گا۔اس چھوٹے رقبے سے $J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$ برقی رو گزرے گی۔یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

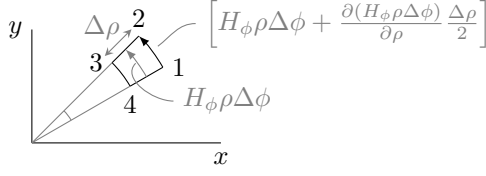
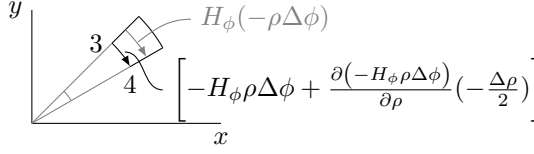
$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(H_{\phi 0}+\rho_0\frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho}-\frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi \doteq J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$$

یعنی

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi} \doteq \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0}+\frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi}\right) \doteq J_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $\Delta\rho$ اور $\Delta\phi$ کو کم سے کم کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات بالکل درست ہو گی اور تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ برابر کی علامت $=$ استعمال کی جائے گی۔اس طرح گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\phi\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi} = \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0}+\frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi}\right) = J_z \tag{7.44}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے بیرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔

(ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے اندرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.13: زاویائی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

اس سے پہلے کہ ہم گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں، آئیں مساوات 7.43 کو کچھ مختلف اور بہتر طریقے سے حاصل کریں۔ شکل 7.13-الف کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ اگر ہم کسی نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو ہم $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کریں گے۔ اس راہ پر تکمل تقریباً

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\phi \rho \Delta\phi$$

کے برابر ہو گا۔ اس تکمل کو تفاعل g تصور کرتے ہوئے یعنی $g = H_\phi\rho\Delta\phi$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم چھوٹے رقبے کے وسط سے رداسی سمت میں $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کریں تو اس تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}) = \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2} = \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں رداس ρ_0 کے برابر ہے۔ چونکہ چھوٹے رقبے کے عین وسط پر اس تکمل کی قیمت $H_{\phi0}\rho_0\Delta\phi$ کے برابر ہے لہٰذا وسط سے $\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2} \tag{7.45}$$

ہو گی۔اسی طرح، جیسا شکل 7.13-ب میں دکھایا گیا ہے، اگر ہم کسی نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو اس راہ پر تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=H_\phi(-\rho\Delta\phi)$$

کے برابر ہو گا۔اگر اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کیا جائے تب وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}&=-H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\&=-H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\end{aligned}\tag{7.46}$$

ہو گا۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.14-الف میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $-\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت $H_\rho\Delta\rho$ ہو گی۔اس نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت میں تبدیلی رو نما ہو گی جسے

$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})=\frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے اور یوں تکمل کی نئی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=H_\rho\Delta\rho-\frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

ہو گی۔اگر چھوٹے رقبے کے عین وسط کو یہی نقطہ تصور کیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات 4 تا 1 پر تکمل دیتا ہے یعنی

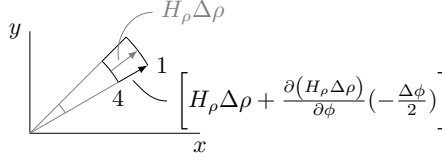
$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}=H_\rho\Delta\rho-\frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}\tag{7.47}$$

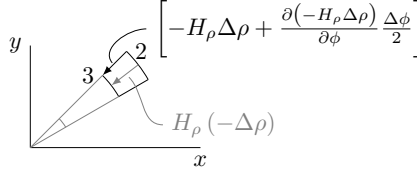
اسی طرح، جیسے شکل 7.14-ب میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $+\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $-\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=H_\rho(-\Delta\rho)$$

ہو گی۔اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کرتے ہوئے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر یہی تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}=-H_\rho\Delta\rho-\frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}\tag{7.48}$$

y x $H_\rho\Delta\rho$ 1 4 $\left[H_\rho\Delta\rho + \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}(-\frac{\Delta\phi}{2})\right]$

(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے کم زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

y x 2 3 $\left[-H_\rho\Delta\rho + \frac{\partial(-H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right]$ $H_\rho\,(-\Delta\rho)$

(ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے زیادہ زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.14: رداسی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

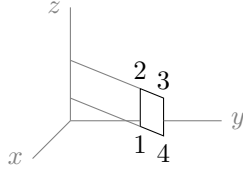
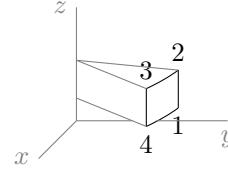
کے برابر ہو گا۔

مساوات 7.45، مساوات 7.46، مساوات 7.47 اور مساوات 7.48 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد پورا تکمل دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\Delta\phi\\ &= \left[\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi\end{aligned}\tag{7.49}$$

جہاں تفرق رقبے کے وسط پر حاصل کئے جاتے ہیں۔اس مساوات کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[H_{\phi0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi$$

جو بالکل مساوات 7.43 ہی ہے۔یاد رہے کہ $\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔یوں رداس

(ب) نلکی محدد میں شدت کا زاویائی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

(ا) نلکی محدد میں شدت کا رداسی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

شکل 7.15: نلکی محدد میں گردش کے رداسی اور زاویائی اجزاء کے رقبے۔

ρ_0 اور مقناطیسی شدت $H_{\phi 0}$ کے برابر ہوں گے۔ مساوات 7.49 سے گردش

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\phi\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta\rho\rho\Delta\phi} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right] = J_z \tag{7.50}$$

آئیں اب نلکی محدد میں گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں۔ گردش کا رداسی جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم $\rho=\rho_0$ سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف Δz اور $\rho_0\Delta\phi$ لمبائی رکھیں گے۔ اس رقبے کو شکل 7.15-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس پر 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے کا لکیری تکمل حاصل کیا جائے گا۔ مستقل رداس کی سطح پر کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta z}{2}$ تا $+\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $H_z\Delta z$ حاصل ہوتا ہے۔ اس نقطے سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر اس تکمل کی قیمت ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_z\Delta z + \frac{\partial(H_z\Delta z)}{\partial\phi}\left(+\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta z}{2}$ تا $-\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $-H_z\Delta z$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -H_z\Delta z + \frac{\partial(-H_z\Delta z)}{\partial\phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان دو جوابات سے رقبے کے z اطراف کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} + \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = +\frac{\partial H_z}{\partial\phi}\Delta z\Delta\phi \tag{7.51}$$

حاصل ہوتا ہے۔کسی بھی نقطے کے قریب $\frac{\Delta\phi}{2}-$ تا $\frac{\Delta\phi}{2}+$ پر تکمل کی قیمت $H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $\frac{\Delta z}{2}-$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}=H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح نقطے کے قریب $\frac{\Delta\phi}{2}+$ تا $\frac{\Delta\phi}{2}-$ پر تکمل کی قیمت $-H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $\frac{\Delta z}{2}+$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}=-H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(+\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ان دو جوابات کے مجموعے سے چھوٹے رقبے کے گرد گھومتے ہوئے زاویائی حصے کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}+\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}=-\rho\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\Delta z\Delta\phi \tag{7.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 7.51 اور مساوات 7.52 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل دیتا ہے جو رقبے سے گزرتی برقی رو $J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$ کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\left[\frac{\partial H_z}{\partial\phi}-\rho\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\Delta z\Delta\phi=J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$$

جس سے گردش کا رداسی جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\phi\to 0\\ \Delta z\to 0}}\frac{\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho\Delta\phi\Delta z}=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]=J_\rho \tag{7.53}$$

ملتا ہے۔

شکل 7.15-ب میں 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل مندرجہ ذیل ہیں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} &= H_z\Delta z + \frac{\partial (H_z\Delta z)}{\partial \rho}\left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} &= -H_z\Delta z + \frac{\partial (-H_z\Delta z)}{\partial \rho}\left(+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} &= H_\rho\Delta \rho + \frac{\partial (H_\rho\Delta \rho)}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} &= -H_\rho\Delta \rho + \frac{\partial (-H_\rho\Delta \rho)}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)
\end{aligned}$$

اور یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta\rho\Delta z} = \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right) = J_\phi \tag{7.54}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.54، مساوات 7.53 اور مساوات 7.50 کا مجموعہ نلکی محدد میں گردش دیتا ہے یعنی

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi\rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{7.55}$$

یہاں ایک مرتبہ پھر یہ بتلانا ضروری ہے کہ نلکی محدد میں ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کا صلیبی ضرب کسی صورت مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ نہیں دیتا۔اس کے باوجود $\boldsymbol{H}$ کی گردش کو $\nabla\times\boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 7.3: اگر $\boldsymbol{H} = (3\rho\cos\phi + 5)\boldsymbol{a}_\rho + 6\sin\phi\boldsymbol{a}_\phi + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو تب $\nabla\times\boldsymbol{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla\times\boldsymbol{H} = (\frac{6}{\rho}+3)\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات

صفحہ 119 پر حصہ 3.10 میں عمومی محدد کے استعمال سے پھیلاو کی مساوات حاصل کی گئی۔یہاں عمومی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔عمومی محدد کے متغیرات (u, v, w) جبکہ اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ ہیں۔ان میں تین اطراف

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L_u &= k_1 \,\mathrm{d}u \\
\mathrm{d}L_v &= k_2 \,\mathrm{d}v \\
\mathrm{d}L_w &= k_3 \,\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

لکھے جاتے ہیں۔

گردش کا پہلا جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم نقطہ (u, v, w) پر u کی عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف $k_2\Delta v$ اور $k_3\Delta w$ ہوں گے۔اب $v - \frac{\Delta v}{2}$ سے $v + \frac{\Delta v}{2}$ تک فاصلہ $k_2\Delta v$ کے برابر ہے لہٰذا اس پر چلتے ہوئے تکمل $H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔نقطہ (u, v, w) سے $-\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial (H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(-\frac{\Delta w}{2} \right)
$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $v + \frac{\Delta v}{2}$ سے $v - \frac{\Delta v}{2}$ تک تکمل $-H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔نقطہ (u, v, w) سے $+\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل

$$
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial (-H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(\frac{\Delta w}{2} \right)
$$

ہو گا۔یوں ان اطراف پر کل تکمل

$$
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} + \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w} \Delta v \Delta w \tag{7.56}
$$

ہو گا۔یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} &= H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial (H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(\frac{\Delta v}{2} \right) \\
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} &= -H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial (-H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(-\frac{\Delta v}{2} \right)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}+\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}=\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v}\Delta v\Delta w \tag{7.57}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v}-\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w}\right]\Delta v\Delta w \tag{7.58}$$

لکھتے ہوئے ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v}-\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w}\right]\Delta v\Delta w=J_u k_2 k_3\Delta v\Delta w$$

لکھ کر گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta v\to 0\\ \Delta w\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_2 k_3\Delta v\Delta w}=\frac{1}{k_2 k_3}\left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v}-\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w}\right]=J_u \tag{7.59}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ اسی مساوات میں متغیرات ذرا دیکھ کر تبدیل کرتے ہوئے گردش کے بقایا دو اجزاء

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta w\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1 k_3\Delta u\Delta w}=\frac{1}{k_1 k_3}\left[\frac{\partial (H_u k_1)}{\partial w}-\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial u}\right]=J_v \tag{7.60}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1 k_2\Delta u\Delta v}=\frac{1}{k_1 k_2}\left[\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial u}-\frac{\partial (H_u k_1)}{\partial v}\right]=J_w \tag{7.61}$$

لکھ سکتے ہیں۔عمومی محدد میں گردش کے ان اجزاء کو

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{k_2 k_3}\left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v}-\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u+\frac{1}{k_1 k_3}\left[\frac{\partial (H_u k_1)}{\partial w}-\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v\\ +\frac{1}{k_1 k_2}\left[\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial u}-\frac{\partial (H_u k_1)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w\end{aligned} \tag{7.62}$$

یا مقطع قالب

$$\text{گردش}\,\boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \frac{\boldsymbol{a}_u}{k_2k_3} & \frac{\boldsymbol{a}_v}{k_3k_1} & \frac{\boldsymbol{a}_w}{k_1k_2} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ k_1H_u & k_2H_v & k_3H_w \end{vmatrix} \tag{7.63}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات

جیسے صفحہ 119 پر حصہ 3.10 میں بتلایا گیا عمومی محدد میں

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= r \\ k_3 &= r\sin\theta \end{aligned}$$

اور $\boldsymbol{a}_u$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_v$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_w$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کرنے سے کروی محدد حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.62 میں یہی کچھ پر کرتے ہوئے یوں کروی محدد میں گردش کی مساوات

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi r\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(H_\phi r\sin\theta)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta \\ +\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta \\ +\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi \end{aligned} \tag{7.64}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 7.4: مندرجہ ذیل میدانوں کے لئے $\nabla \times \boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= 3\rho^2 \cos\phi \boldsymbol{a}_\rho - 2\rho \sin\phi \boldsymbol{a}_\phi + \frac{z}{\rho}\boldsymbol{a}_\text{z} \\
\boldsymbol{H} &= 2r^2 \cos\theta \boldsymbol{a}_\text{r} - 5r \sin\theta \boldsymbol{a}_\theta
\end{aligned}
$$

جوابات: $\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{z}{\rho^2}\boldsymbol{a}_\phi + (3\rho - 4)\sin\phi \boldsymbol{a}_\text{z}$ ، $\nabla \times \boldsymbol{H} = (2r - 10)\sin\theta \boldsymbol{a}_\phi$

7.4 مسئلہ سٹوکس

شکل 7.16-الف میں ایک رقبہ دکھایا گیا ہے جسے دو چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔بائیں چھوٹے رقبے کے لئے گردش

$$
\frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)_N
$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں زیر نوشت میں N اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ گردش رقبے ΔS_B کے عمودی ہے اور زیر نوشت میں B بائیں رقبے کو ظاہر کرتا ہے۔یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_B$ سے مراد بائیں رقبے کی سرحد پر چھوٹا فاصلہ ہے جبکہ $\boldsymbol{H}_B$ سے مراد بائیں چھوٹے رقبے کے وسط میں مقناطیسی شدت ہے۔ اس طرح اسی مساوات کو

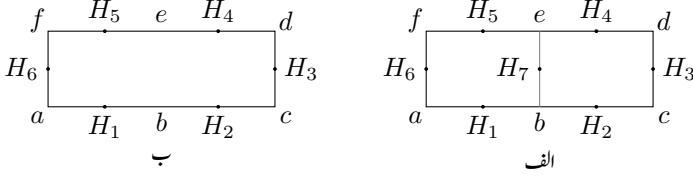
$$
\frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \boldsymbol{a}_N
$$

یا

$$
\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B &\doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \boldsymbol{a}_N \Delta S_B \\
&= (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_B
\end{aligned}
$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس رقبے کی اکائی عمودی سمتیہ ہے۔اب شکل کو دیکھ کر

$$
\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B \doteq \boldsymbol{H}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_7 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{eb} + \boldsymbol{H}_5 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{af}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 7.16: چھوٹے رقبوں کے گرد لکیری تکمل پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے۔

اسی طرح دائیں چھوٹے رقبے کے لئے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_D) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_D$$

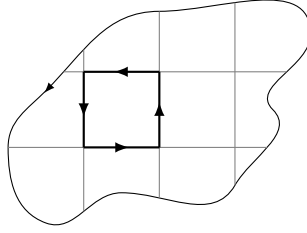
اور

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq \boldsymbol{H}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{dc} + \boldsymbol{H}_4 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_7 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{be}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

دائیں رقبے کے لکیری تکمل میں $\boldsymbol{H}_7 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{be} = -\boldsymbol{H}_7 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{eb}$ لکھ کر دونوں رقبوں کے لکیری تکمل جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B + \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D &\doteq \boldsymbol{H}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{dc} \\ &\quad + \boldsymbol{H}_4 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_5 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{af} \\ &\doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_B + (\nabla \times \boldsymbol{H}_D) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_D\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف ΔL_{be} پر دونوں کے لکیری تکمل آپس میں کٹ گئے ہیں۔ یہاں پہلی مساوات پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے جو شکل 7.16-ب کو دیکھ کر لکھی جا سکتی ہے۔ ہم نے شکل 7.16-الف میں رقبے کے صرف دو ٹکڑے لئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رقبے کے زیادہ ٹکڑے کرتے ہوئے بھی یہی طریقہ کار استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح اگر کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ایک کے گرد لکیری تکمل لیا جائے تو ان کا مجموعہ پورے رقبے کی سرحد پر گھومتے لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔ شکل 7.17 میں بڑے رقبے کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا دکھایا گیا ہے۔ ہر دو جڑے چھوٹے رقبوں کے مشترکہ طرف پر لکیری تکمل آپس میں کٹ جائیں گے۔ یوں تمام چھوٹے رقبوں کے

شکل 7.17: کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر کے گرد لکیری تکمل لیں۔ان تمام کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔

لکیری تکمل کے مجموعے کو بڑے رقبے کا لکیری تکمل لیتے ہوئے اور تمام چھوٹے رقبوں کے $(\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \Delta \boldsymbol{S}$ کے مجموعے کو تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.65}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو صرف بڑے رقبے S کی سرحد پر لیا جاتا ہے۔

اگرچہ ہم نے مساوات 7.65 مقناطیسی میدان کے لئے حاصل کی، درحقیقت یہ ایک عمومی مساوات ہے جو کسی بھی سمتی میدان کے لئے درست ہے۔یہ مساوات مسئلہ سٹوکس[12] بیان کرتی ہے۔

مسئلہ سٹوکس سے ایمپیئر کا دوری قانون باآسانی حاصل ہوتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ کے دونوں اطراف کا $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے دونوں اطراف کھلی سطح S پر سطحی تکمل لیتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں گے۔

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کثافت برقی رو کی سطحی تکمل سطح S سے گزرتی برقی رو کے برابر ہے لہٰذا مندرجہ بالا سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

[12] Stokes theorem

حاصل ہوتا ہے جو ایمپیئر کا دوری قانون ہے۔ایمپیئر کے دوری قانون کے اس مختصر حصول سے یہ حقیقت بھی واضح ہوتی ہے کہ I ان تمام سطحوں سے گزرتی برقی رو ہے جن کی سرحد تکمل میں استعمال بند راہ ہے۔

مسئلہ سٹوکس سطحی تکمل اور بند لکیری تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ مسئلہ پھیلاو حجمی تکمل اور بند سطحی تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔یہ دونوں مسئلے عمومی سمتیاتی ثبوت پیش کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔آئیں ایسی ایک مثال دیکھتے ہیں جس میں ہم $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ کو بیان کرنے کا مختلف طریقہ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں $\boldsymbol{A}$ کوئی بھی عمومی سمتی میدان ہو سکتا ہے۔

شروع کرنے سے پہلے یاد رہے کہ گردش کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جبکہ پھیلاو کا حاصل جواب غیر سمتی ہوتا ہے۔کسی بھی عمومی سمتی میدان $\boldsymbol{A}$ کا گردش $\nabla \times \boldsymbol{A}$ بھی سمتیہ ہو گا جبکہ اس گردش کا پھیلاو $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ غیر سمتی ہو گا جسے ہم T کہتے ہیں یعنی

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = T$$

دونوں اطراف کا حجمی تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}) \, \mathrm{d}h = \int_{\text{حجم}} T \, \mathrm{d}h$$

بائیں ہاتھ پر مسئلہ پھیلاو لاگو کرتے ہوئے

$$\oint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{حجم}} T \, \mathrm{d}h$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کا بایاں ہاتھ حجم کو گھیرتے بند سطح پر $\nabla \times \boldsymbol{A}$ کا تکمل ہے۔مسئلہ سٹوکس کسی بھی سطح پر سطحی تکمل اور اس سطح کے سرحد پر لکیری تکمل کا تعلق بیان کرتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ میں اگر سطح کو تھیلا سمجھا جائے تو تھیلے کا منہ سطح کی سرحد ہو گا جس پر لکیری تکمل لیا جائے گا۔جیسے جیسے تھیلے کے منہ کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے تھیلا بند سطح کی شکل اختیار کرے گا جبکہ سطح کی سرحد چھوٹی سے چھوٹی ہوتی جائے گی حتٰی کہ جب تھیلے کا منہ مکمل بند ہو جائے تو تھیلا مکمل بند سطح ہو گا جبکہ اس کی سرحد صفر کے برابر ہو گی۔صفر لمبائی کی راہ پر تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\int_0^0 \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

یوں

$$\int_{\text{حجم}} T \,\mathrm{d}h = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ یہ مساوات کسی بھی حجم کے لئے درست ہے لہٰذا یہ تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے بھی درست ہے یعنی

$$T \,\mathrm{d}h = 0$$

جس سے

$$T = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.66}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.66 انتہائی اہم ثبوت ہے جس کے تحت کسی بھی عمومی سمتی میدان کے گردش کا پھیلا صفر کے برابر ہوتا ہے۔اس ثبوت کو مندرجہ ذیل مثال میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے بھی حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 7.3: کسی بھی عمومی سمتی میدان $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی گردش اور گردش کا پھیلاو کارتیسی محدد میں حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہو گا۔

حل:پہلے گردش حاصل کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

جس کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

کے برابر ہے جہاں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$ اور $-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}$ کی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔

ساکن مقناطیسی میدان یعنی وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان کے لئے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

ہے۔اس مساوات کے دونوں اطراف کا پھیلاو حاصل کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 7.66 کے تحت گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{7.67}$$

ہو گا۔اس سے ظاہر ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف ایسی برقی رو سے حاصل ہوتا ہے جس کے لئے مساوات 7.67 درست ہو۔یہی نتیجہ ہم پہلے بھی مساوات 7.4 میں حاصل کر چکے ہیں جہاں ہم دیکھ چکے کہ $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ سے مراد بند راہ سے کل صفر یک سمت برقی رو کا گزرنا ہے۔

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو

خلاء میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ کی تعریف

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{7.68}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{B}$ کی اکائی ویبر فی مربع میٹر $\mathrm{Wb/m^2}$ ہے جسے ٹسلا[13] پکارا اور T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس مساوات میں μ_0 خلاء کا **مقناطیسی مستقل**[14] ہے جسے ہینری فی میٹر $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ میں ناپا جاتا ہے۔خلاء میں

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{7.69}$$

کے برابر ہے۔

[13] Tesla
[14] magnetic constant, permeability

چونکہ $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر ہے لہٰذا ویبر کی اکائی ہینری ضرب ایمپیئر ہے۔ہینری کو اکائی تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ہینری ضرب ایمپیئر کو ویبر لکھا جاتا ہے۔وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر غور کے دوران ہم دیکھیں گے کہ ویبر سے مراد وولٹ ضرب سیکنڈ بھی لیا جا سکتا ہے۔

خلاء میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کا تعلق

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

ہو بہو مساوات 7.68 کی طرح ہے۔کثافت برقی بہاو کا سطحی تکمل برقی بہاو ψ دیتا ہے۔

$$\psi = \int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کسی بھی بند سطح سے گزرتا برقی بہاو اس سطح میں گھیرے بار Q کے برابر ہوتا ہے۔

$$\psi = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

مثبت بار سے برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے جبکہ منفی بار پر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔یوں برقی بہاو کا منبع برقی بار ہے۔مقناطیسی قطب ہر صورت جوڑی کی شکل میں پائے جاتے ہیں۔آج تک تنہا (یک طرفہ) مقناطیسی قطب نہیں پایا گیا۔یوں آج تک ایسی صورت دیکھنے کو نہیں ملی جہاں تنہا مقناطیسی قطب سے مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا مقناطیسی بہاو اس پر اختتام پذیر ہو۔ مقناطیسی بہاو کا منبع برقی رو ہے۔ یاد رہے کہ نا تو مقناطیسی بہاو اس برقی رو سے خارج اور نا ہی اس پر اختتام پذیر ہوتی ہے بلکہ یہ بند دائرے کی شکل میں برقی رو کو گھیرتی ہے۔کثافت مقناطیسی بہاو کا سطحی تکمل **مقناطیسی بہاو**[15] Φ دیتا ہے جسے **ویبر**[16] Wb میں ناپا جاتا ہے۔

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \mathrm{Wb} \tag{7.70}$$

چونکہ مقناطیسی بہاو بند دائرہ بناتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح میں جتنا مقناطیسی بہاو داخل ہوتا ہے، اتنا ہی مقناطیسی بہاو اس سطح سے خارج بھی ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح پر مقناطیسی بہاو کا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{7.71}$$

---

[15] magnetic flux
[16] Weber

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.72}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم نے مساوات 7.71 کو ثابت نہیں کیا بلکہ حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے اسے لکھا ہے۔اس کو آگے ثابت کیا جائے گا۔فی الحال اس کو قبول کر لیں اور یوں مساوات 7.72 کو بھی درست تصور کریں۔

ساکن مقناطیسی اور ساکن برقی میدان کے لئے مساوات 7.72 میکس ویل کی چوتھی اور آخری مساوات ہے۔ان تمام کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \\ \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned} \tag{7.73}$$

ان کے ساتھ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \epsilon_0 \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{7.74}$$

کو بھی شامل کرتے ہیں۔ہم برقی میدان کی شدت اور ساکن برقی دباو کا تعلق بھی پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{7.75}$$

مساوات 7.73 برقی اور مقناطیسی میدان کے پھیلاو اور گردش بیان کرتے ہیں جو ان میدان کی خاصیت کے نقطہ اشکال ہیں۔ان کی تکمل اشکال مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= Q = \int_{\text{حجم}} \rho_h \, \mathrm{d}h \\ \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} &= 0 \\ \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} &= I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ \oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= 0 \end{aligned} \tag{7.76}$$

ہم جلد ساکن مقناطیسی میدان کے مقناطیسی دباو پر بھی غور کریں گے۔ہم نے برقی میدان پر غور کے دوران موصل اجزاء کے اثر کو بھی تقطیب $\boldsymbol{P}$ کی صورت میں شامل کیا۔ایسا کرتے ہوئے جزو برقی مستقل کا سہارا لیا گیا۔اگلے باب میں اسی طرح دیگر اجزاء کا مقناطیسی میدان پر اثر دیکھا جائے گا۔

آئیں مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو کا استعمال ہم محوری تار کے اندر بہاو کے مثال کی صورت میں دیکھیں۔ایسی ہم محوری تار جسے شکل 7.7 میں دکھایا گیا ہے میں مقناطیسی شدت

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں۔ یوں کثافت مقناطیسی بہاو

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

ہو گا۔اندرونی اور بیرونی تار کے درمیان مقناطیسی بہاو وہی ہو گا جو ان تاروں کے درمیان رداسی سیدھی سطح سے گزرے گا۔تار کو z محدد پر تصور کرتے ہوئے $z = 0$ تا $z = d$ تک رداسی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^d \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi \cdot (\mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_\phi)$$

یعنی

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{7.77}$$

ہو گی۔ یہ مساوات آگے جا کر ہم محوری تار کے امالہ کے حصول میں کام آئے گی۔

مشق 7.5: تانبے کی تار کو پانی سے ٹھنڈا کرتے ہوئے اس میں زیادہ کثافت برقی رو گزاری جا سکتی ہے۔ایک ایسی ہم محوری تار جس کی اندرونی تار کا اندرونی رداس 25 mm جبکہ اس کا بیرونی رداس 28 mm ہے اور جس کی بیرونی تار کا اندرونی رداس 35 mm اور بیرونی رداس 37 mm ہے میں 10 000 A کا یک سمت برقی رو تاروں میں الٹ سمت میں گزر رہی ہے۔ٹھنڈا پانی اندرونی تار کے اندر اور تاروں کے درمیان فاصلے سے گزار کر انہیں ٹھنڈا رکھا

جاتا ہے۔ دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین $\boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{B}$ حاصل کرنے کے بعد $1\,\mathrm{m}$ لمبائی کے لئے دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔

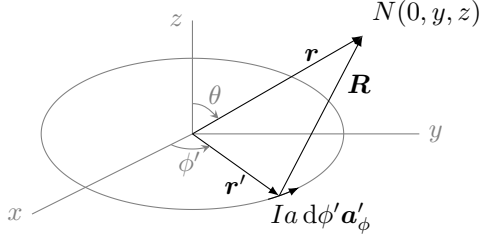
جوابات: اندرونی تار میں $J = 20\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 109\,\mu\mathrm{Wb}$ ہیں۔بیرونی تار میں $J = 22.1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 56.6\,\mu\mathrm{Wb}$ ہیں۔تاروں کے درمیانی فاصلے میں $\Phi = 446\,\mu\mathrm{Wb}$ ہے۔

مشق 7.6: $z = 0$ سطح پر ρ رداس کے گول بند دائرے میں I برقی رو گزر رہی ہے۔گول دائرے کا وسط کارتیسی محدد کے مبدا $(0,0,0)$ پر ہے۔اگر مثبت z جانب سے دیکھا جائے تو برقی رو گھڑی کے الٹ سمت میں گھوم رہی ہے۔بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے دائرے کے عین وسط میں $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\rho}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

مندرجہ بالا مشق میں آپ نے دائرے کے وسط پر مقناطیسی میدان حاصل کیا۔یہی طریقہ استعمال کرتے ہوئے دائرے کے محور پر کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔البتہ جیسے ہی محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان مطلوب ہو مسئلہ خاصہ مشکل ہو جاتا ہے۔مندرجہ ذیل مثال میں اس حقیقت کو سامنے رکھا جائے گا کہ محور سے ہٹ کر برقی رو گزارتے گول دائرے کا مقناطیسی میدان حاصل کرنا کیوں ممکن نہیں ہو گا۔اس کے بعد اس مسئلے کا **اعدادی حل**[17] حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مسئلے کا اعدادی حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 7.4: شکل 7.18 میں $x = 0$ سطح یعنی yz سطح پر نقطہ $N(0,y,z)$ پر گول بند دائرے میں یک سمت برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کریں۔

[17] numerical solution

شکل 7.18: گول بند دائرے میں یک سمت برقی رو کا محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان۔

حل: رداس a کے گول دائرے پر نقطہ $N'(a, \frac{\pi}{2}, \phi')$ پر چھوٹی سمتی لمبائی کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}' = a\,\mathrm{d}\phi' \boldsymbol{a}_\phi'$ لکھا جا سکتا ہے جہاں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\phi'$ کو کارتیسی محدد میں

$$\boldsymbol{a}_\phi' = -\sin\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}' = a\,\mathrm{d}\phi' \left(-\sin\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ چھوٹی لمبائی خود $(a\cos\phi', a\sin\phi')$ پر پائی جاتی ہے یعنی

$$\boldsymbol{r}' = a\boldsymbol{a}_\rho' = a\cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + a\sin\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

کے برابر ہے۔نقطہ N کا مقام کارتیسی محدد میں

$$\boldsymbol{r} = y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہے۔یوں

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = -a\cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{R}| = R &= \sqrt{(-a\cos\phi')^2 + (y - a\sin\phi')^2 + z^2} \\ &= \sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'} \end{aligned}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{R}} = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{-a\cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ بایوٹ سیوارٹ قانون میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{R}} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I \,\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R}}{4\pi R^3}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں پہلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R}$ کی سادہ شکل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R} &= a\,\mathrm{d}\phi' \left(-\sin\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right) \times \left[-a\cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right] \\
&= a\,\mathrm{d}\phi' \left[z\cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\sin\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (a - y\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right]
\end{aligned}$$

یوں بایوٹ سیوارٹ کے قانون کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\sin\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (a - y\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\phi'$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں H_x جزو صفر کے برابر ہے۔ یہ حقیقت سیدھی منطق سے ثابت ہوتی ہے۔ کسی بھی زاویہ ϕ' پر چھوٹی لمبائی سے پیدا میدان کو زاویہ $\pi - \phi'$ پر چھوٹی لمبائی کا میدان ختم کرتا ہے۔ یوں یہ جزو صفر کے برابر ہے۔ یہی نتیجہ تحلیلی طور پر حاصل کرنے کی خاطر، H_x جزو میں نیا متغیرہ $w = a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'$ پر کرتے ہوئے تکمل

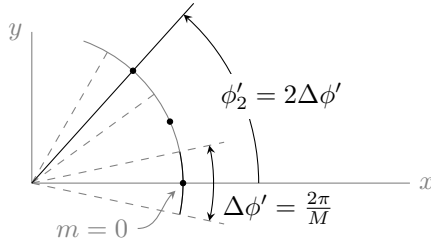
$$H_x = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ بقایا دو اجزاء

$$\begin{aligned}
H_y &= \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} \\
H_z &= \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a - y\sin\phi')\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{7.78}$$

ہیں۔ یہ دونوں بیضوی تکمل[18] ہیں جنہیں الجبرائی طریقے سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

بیضوی تکمل کا اعدادی حل[19] بذریعہ کمپیوٹر حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے بیضوی تکمل کا

elliptic integral[18]
numerical solution[19]

شکل 7.19: تکمل کے راہ کو متعدد چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

اعدادی حل حاصل کریں۔

مثال 7.5: مندرجہ بالا مثال میں H_y اور H_z کے حل بیضوی تکمل کی صورت میں حاصل ہوئے۔ نقطہ $N(0, a, a)$ پر H_y کا اعدادی حل حاصل کریں۔

حل: اس نقطے پر

$$
\begin{aligned}
H_y &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2+a^2+a^2-2a^2\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{I}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(3-2\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

لکھا جائے گا۔ اس تکمل کو مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 7.19 کو دیکھ کر آگے پڑھیں۔ تکمل کی راہ کو M برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑا پر $\Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ کے برابر ہو گا۔ ان ٹکڑوں کی گنتی کا حساب ہم m سے رکھتے ہیں جہاں m کی قیمت 0 تا $(M-1)$ ہے۔ یوں پہلے ٹکڑے کو $m = 0$ سے ظاہر کیا جائے گا اور اس ٹکڑے کے عین وسط میں زاویہ $\phi_0' = 0$ ہو گا۔ شکل میں راہ کے چھوٹے ٹکڑوں کے عین وسط کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ دوسرے ٹکڑے پر $m = 1$ اور زاویہ $\phi_1' = \Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ ہو گا۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے، تیسرے پر $m = 2$ اور زاویہ $\phi_2' = 2\Delta\phi' = \frac{2\times 2\pi}{M}$ ہو گا۔ یوں عمومی ٹکڑے m پر زاویہ $\phi_m' = m\Delta\phi' = \frac{2m\pi}{M}$ ہو گا۔

اگر ان چھوٹے ٹکڑوں پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو رد کرنا ممکن ہو تب ہر چھوٹے ٹکڑے پر تکمل تقریباً

$$\begin{aligned}\Delta H_y &= \frac{I}{4\pi a}\frac{\sin\phi'_m \Delta\phi'}{\left(3-2\sin\phi'_m\right)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{I}{4\pi a}\frac{\sin\left(\frac{2m\pi}{M}\right)\frac{2\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

کے برابر ہو گا۔یوں تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$H_y = \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔جدول 7.1 میں $M = 10$ کی صورت میں m کے تمام قیمتوں پر حاصل $\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$ اجزاء دئے گئے ہیں۔ان تمام کا مجموعہ

$$\begin{aligned}H_y &= \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{M}\,(0.00000+0.23852+0.82674+0.82674+0.23852+0.00000\\ &\qquad -0.06889-0.08763-0.08763-0.06889)\\ &= \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{10}(1.8175)\\ &= 1.1420\left(\frac{I}{4\pi a}\right)\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔زیادہ سے زیادہ ٹکڑے لیتے ہوئے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔اگر $M = 100$ کر دیا جائے تب $H_y = \frac{1.1433I}{4\pi a}$ حاصل ہوتا ہے۔

جدول کو دیکھتے ہوئے ظاہر ہے کہ $m = 0$ اور $m = 5$ برابر حصہ ڈالتے ہیں۔اسی طرح $m = 1$ اور $m = 4$ بھی برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے پورے جدول کو حل کرنا درکار نہیں ہے۔درحقیقت موجودہ مثال میں جدول کے صرف پانچ یعنی آدھے خانوں کا حل درکار ہے۔موجودہ مسئلے میں صرف دس چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے تقریباً درست جواب حاصل ہوتا ہے۔دس اور سو ٹکڑوں کے جوابات میں صرف

$$\left(\frac{1.1433-1.1420}{1.1433}\right)\times 100 = 0.11\,\%$$

کا فرق ہے۔

m	$\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$
0	0.00000
1	0.23852
2	0.82674
3	0.82674
4	0.23852
5	0.00000
6	−0.06889
7	−0.08763
8	−0.08763
9	−0.06889

جدول 7.1: دائرے پر برقی رو سے حاصل مقناطیسی میدان کی شدت بذریعہ اعدادی حل۔

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو

برقی میدان کے مسائل برقی دباو کے استعمال سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔گھریلو 220 V کے برقی دباو سے آپ بخوبی واقف ہیں۔اگرچہ برقی دباو سے ہمیں روز مرہ زندگی میں عموماً واسطہ پڑتا ہے اور یہ ہمارے لئے ایک حقیقت رکھتا ہے، مقناطیس و برقیات کے میدان میں برقی دباو کی اہمیت صرف اس وجہ سے ہے کہ اس کی مدد سے برقی مسائل باآسانی حل ہو جاتے ہیں۔مثال کے طور پر ہم کسی بھی بار سے پہلے برقی دباو اور پھر برقی دباو سے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

برقی دباو غیر سمتی مقدار ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ برقی دباو کے طرز پر **غیر سمتی مقناطیسی دباو**[20] بیان کیا جا سکتا ہے۔البتہ یہ صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر قابل بیان ہوتا ہے۔یوں اس کا استعمال ہر جگہ ممکن نہیں ہو گا۔اس کے برعکس **سمتی مقناطیسی دباو**[21] بھی بیان کیا جا سکتا ہے جو انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔سمتی مقناطیسی دباو **اینٹینا**[22]، **موج‌ نما**[23] اور مائیکرو ویو چولھے (خرد موج چولھے)[24] پر غور کرنے میں مدد دیتا ہے۔یہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی قابل استعمال ہو گا اور یہ ان مقامات پر بھی قابل بیان ہو گا جہاں برقی رو پائی جائے۔آئیں پہلے غیر سمتی مقناطیسی دباو دیکھیں۔

---

[20] scalar magnetic potential
[21] vector magnetic potential
[22] antenna
[23] waveguide
[24] microwave oven

برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق صفحہ 152 پر مساوات 4.46 میں بیان کیا گیا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں بالکل اسی طرح غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی ڈھلوان منفی مقناطیسی شدت دیتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m$$

یہ نیا تفاعل مقناطیسی میدان کے دیگر تفاعل کے ساتھ ہم آہنگ ہونا چاہیے لہٰذا اسے ایمپیئر کے دوری قانون کے نقطہ صورت پر پورا اترنا ہو گا۔اس طرح

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \nabla \times (-\nabla V_m) \tag{7.79}$$

ہو گا۔ البتہ جیسے آپ مشق 7.7 میں دیکھیں گے، کسی بھی متغیرہ کی ڈھلوان کی گردش صفر کے برابر ہوتا ہے۔یوں مقناطیسی میدان کی شدت اور غیر سمتی مقناطیسی دباو کا تعلق صرف اس صورت درست ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{J} = 0$ ہو یعنی

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{7.80}$$

اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مقناطیسی دباو پر لاگو شرط کہ کثافت برقی رو صفر ہونا ضروری ہے ناقابل قبول شرط ہے۔اگرچہ کئی صورتوں میں کثافت برقی رو صفر ہو گی اور V_m کا استعمال ممکن ہو گا لیکن ہمیں ایسے مسائل بھی درپیش ہوں گے جہاں کثافت برقی رو صفر نہ ہو گی۔ایسی صورت میں V_m ہمارے کسی کام کا نہ ہو گا۔ غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اسے ایمپیئر میں ناپا جائے گا۔

خلاء میں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

سے

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

یا

$$\nabla^2 V_m = 0 \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{7.81}$$

جو لاپلاس مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔یوں غیر سمتی مقناطیسی دباو لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ہم دیکھیں گے کہ ہر طرف یکساں خاصیت کی مقناطیسی اشیاء میں بھی V_m لاپلاس مساوات پر پورا اترتی ہے۔یاد رہے کہ V_m صرف اور صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر درست ثابت ہوتا ہے۔

اگلے باب میں V_m پر تفصیلی غور کیا جائے گا۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ چونکہ مقناطیسی میدان بقائی میدان نہیں ہے لہٰذا V_m کی قیمت اٹل نہیں ہو گی۔آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں کسی نقطے کو برقی زمین رکھتے ہوئے کسی دوسرے نقطے پر برقی دباو اٹل قیمت رکھتی ہے۔مقناطیسی میدان میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ایسی ایک مثال دیکھنے کی خاطر z محدد پر رکھی لامحدود لمبائی کی تار پر غور کرتے ہیں جس میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب I برقی رو گزر رہی ہو۔ایسی تار کے گرد جہاں $\boldsymbol{J} = 0$ ہے

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

ہو گا اور غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 7.80 اور نلکی محدد میں V_m کے ڈھلوان کا زاویائی جزو لیتے ہوئے

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

یا

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

سے

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تکمل کے مستقل کو صفر چنا گیا ہے تا کہ $\phi = 0$ پر مقناطیسی زمین ہو۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہے لہٰذا یہی مقناطیسی زمین ہے۔اب اگر ہم تار کے گرد پورا چکر کاٹیں تو ہم اسی مقناطیسی زمین پر دوبارہ پہنچتے ہیں لیکن مندرجہ بالا مساوات کے تحت $\phi = 2\pi$ پر $V_m = -I$ کے برابر ہے نا کہ صفر۔تار کے گرد دو چکر کے بعد اسی نقطے پر $V_m = -2I$ حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے پر غیر سمتی مقناطیسی دباو کی متعدد قیمتیں ممکن ہیں۔آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں ایک مرتبہ برقی زمین چننے کے بعد کسی بھی ایک نقطے پر ایک ہی برقی دباو کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

آئیں غیر سمتی مقناطیسی دباو کے متعدد قیمتوں کا ممکن ہونا سمجھیں۔ساکن برقی میدان میں

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$
$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

ہوتا ہے لہٰذا دو نقطوں کے مابین لکیری تکمل

$$V_{ab} = -\int_b^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کا دارومدار تکمل کے راہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ساکن مقناطیسی میدان میں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \qquad (\boldsymbol{J} = 0)$$

ہوتا ہے لیکن

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

کے برابر ہوتا ہے اگرچہ تکمل کی راہ پر $\boldsymbol{J} = 0$ ہے۔یوں تکمل لیتے ہوئے جب بھی ایک چکر پورا ہو، تکمل کی قیمت میں I برابر اضافہ آئے گا۔ہاں اگر تکمل کی راہ صفر برقی رو گھیرے تب غیر سمتی مقناطیسی دباو بھی ایک قیمت رکھے گا۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے غیر سمتی مقناطیسی دباو

$$V_{ab} = -\int_b^a \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \qquad (\text{قیمت راہ پر منحصر ہے}) \tag{7.82}$$

بیان کی جاتی ہے۔ہم یہ فیصلہ کر سکتے ہیں کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کرتے وقت صرف ایک چکر کاٹا جائے گا۔اس شرط پر چلتے ہوئے V_m ایک قیمت رکھے گا۔یہ آپ مندرجہ بالا مثال سے دیکھ سکتے ہیں یعنی

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi \qquad (-\pi < \phi \leq \pi) \tag{7.83}$$

کی صورت میں $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہی حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات میں چکر کی وضاحت ضروری ہے۔صفر زاویہ سے شروع ہو کر اگر زاویہ ϕ مثبت جانب بڑھایا جائے تو $\phi = \pi$ تک پہنچا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر صفر زاویہ سے شروع ہو کر زاویہ ϕ منفی کرتے ہوئے $\phi = \pi$ تک پہنچنے کی کوشش کی جائے تو ایسا ممکن نہیں ہے۔یوں $\phi = \pi$ پر V_m کی ایک عدد قیمت ہو گی۔

مشق 7.7: کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے مثال 7.3 کے طرز پر ثابت کریں کہ کسی بھی غیر سمتی متغیرہ کے ڈھلوان کی گردش صفر کے برابر ہو گی یعنی

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \tag{7.84}$$

آئیں اب سمتی مقناطیسی دباو پر غور کرتے ہیں۔ہم شروع

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.85}$$

سے کرتے ہیں۔سمتی مقناطیسی دباو کو اس مساوات کے ہم آہنگ ہونا ہو گا۔مساوات 7.66 میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی سمتی متغیرہ کی گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا اگر $\boldsymbol{B}$ سمتی متغیرہ A کا گردش

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.86}$$

ہو تب بھی $\boldsymbol{B}$ کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$$

ہی ہو گا۔ہم مساوات 7.86 میں دئے $\boldsymbol{A}$ کو سمتی مقناطیسی دباو کی تعریف مان کر آگے بڑھتے ہیں۔یوں سمتی مقناطیسی دباو خود بخود مساوات 7.85 کے ہم آہنگ ہو گا۔ یوں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A}$$

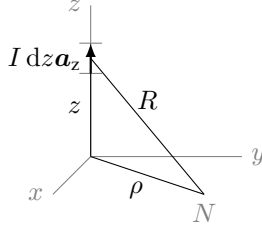
اور

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}$$

حاصل ہوتے ہیں۔کسی بھی سمتی متغیرہ کی گردش کی گردش عموماً صفر کے برابر نہیں ہوتی۔سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کی اکائی ویبر فی میٹر $\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}}$ ہے۔گردش کی گردش کی مختلف صورت صفحہ 301 پر مساوات 7.41 میں حاصل کی گئی ہے۔

ہم حصہ 7.7.1 میں دیکھیں گے کہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}$ کے تعریف اور بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے

$$\boldsymbol{A} = \oint \frac{\mu_0 I \, \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.87}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم نے $\boldsymbol{A}$ کی تعریف اس کی گردش کے ذریعے کی ہے۔چونکہ ڈھلوان کی گردش صفر کے برابر ہوتی ہے لہٰذا ہم مندرجہ بالا مساوات کے ساتھ کسی غیر سمتی متغیرہ کا ڈھلوان بھی جمع کر سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے $\boldsymbol{B}$ یا

شکل 7.20: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا سمتی مقناطیسی دباو۔

$\boldsymbol{H}$ کی قیمتوں پر کوئی اثر نہ پڑتا۔ساکن مقناطیسی میدان میں عموماً ڈھلوان جمع نہیں کیا جاتا اور اس مساوات کو یوں ہی رکھا جاتا ہے۔

ساکن برقی دباو کی مساوات

$$V = \int \frac{\rho_L\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

کے ساتھ مساوات 7.87 کا موازنہ کرنے سے یہ بات بہتر سمجھ میں آتی ہے کہ $\boldsymbol{A}$ واقع سمتی مقناطیسی دباو ہی ہے۔یہ دونوں مساوات لکیری تکمل دیتی ہیں۔ایک برقی رو اور دوسرا کثافت بار کا لکیری تکمل دیتی ہے۔دونوں میں تفرقی فاصلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا اثر R کے بالعکس متناسب ہے اور دونوں مساوات میں خلاء کی خاصیت یعنی μ_0 اور ϵ_0 استعمال ہوتے ہیں۔

مساوات 7.87 کی تفرق شکل

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.88}$$

بھی لکھی جا سکتی ہے جب تک $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے حاصل $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ کا کوئی مطلب نہ لیا جائے۔یاد رہے کہ جب تک بند تکمل پورا نہ لیا جائے، حاصل $\boldsymbol{A}$ کوئی معنی نہیں رکھتا۔

شکل 7.20 میں z محدد پر لامحدود لمبائی کے برقی رو گزارتے تار کا چھوٹا حصہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دکھایا گیا ہے۔نقطہ N پر یہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

یا

$$\mathrm{d}A_z = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}z}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}\ , \quad \mathrm{d}A_\rho = 0, \quad \mathrm{d}A_\phi = 0 \tag{7.89}$$

سمتی مقناطیسی دباو پیدا کرے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کے ہر چھوٹے حصے کا پیدا کردہ سمتی مقناطیسی دباو تار کے اسی حصے کی سمت میں ہو گا۔

مقناطیسی شدت نلکی محدد میں مندرجہ بالا مساوات کی گردش

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{H} &= \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial\,\mathrm{d}A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi\\ &= \frac{I\,\mathrm{d}z}{4\pi}\frac{\rho\boldsymbol{a}_\phi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

سے حاصل ہو گا۔یہی مساوات شکل 7.20 کو دیکھتے ہوئے بایوٹ سیوارٹ کی مساوات سے لکھی جا سکتی ہے۔

سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کے کلیات دیگر اشکال کی کثافت برقی رو کے لئے بھی لکھے جا سکتے ہیں۔یوں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ کے لئے برقی رو کے چھوٹے حصے کو

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S$$

اور حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کے لئے

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ لکیری برقی رو کے چھوٹے حصے کو عموماً $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا جاتا ہے۔یوں برقی رو کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے فاصلے کو سمتی تصور کیا جاتا ہے۔اس کے برعکس مندرجہ بالا دو مساوات میں کثافت برقی رو کو سمتی مقدار تصور کیا گیا جبکہ تفرقی سطح $\mathrm{d}S$ اور تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کو غیر سمتی تصور کیا گیا۔یوں $\boldsymbol{A}$ کے دیگر کلیے

$$\boldsymbol{A} = \int_S \frac{\mu_0\boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S}{4\pi R} \tag{7.90}$$

اور

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu_0\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h}{4\pi R} \tag{7.91}$$

ہیں۔

سمتی مقناطیسی دباو مختلف اشکال کی برقی رو اور کثافت برقی رو سے مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔ برقی دباو کی طرح سمتی مقناطیسی دباو کی زمین بھی لامحدود فاصلے پر رکھی جاتی ہے یعنی $R \to \infty$ پر $\boldsymbol{A} \to 0$ تصور کیا جاتا ہے۔ لامحدود فاصلے پر کوئی بھی برقی رو $R \to \infty$ کی بنا پر سمتی مقناطیسی دباو پر کوئی اثر نہیں ڈال سکتا۔

مثال 7.6: رداس a کی موصل تار میں یکساں برقی رو I گزر رہی ہے۔ تار کے اندر $\boldsymbol{B}$ حاصل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ بھی حاصل کریں۔

حل: تار کو z محدد پر پڑا تصور کرتے ہیں۔ تار کے اندر ρ رداس کا بند دائرہ $\frac{I\pi\rho^2}{\pi a^2}$ برقی رو گھیرے گی لہٰذا اس دائرے پر $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{a}_\phi$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا صرف زاویائی جزو پایا جاتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{A}$ کی گردش کو مساوات 7.55 کی مدد سے لکھتے ہوئے صرف زاویائی جزو لیتے ہیں۔ اس طرح

$$B_\phi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ برقی رو $\boldsymbol{a}_\text{z}$ سمت میں ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کا صرف A_z جزو متوقع ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

یعنی

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}$$

صورت اختیار کر لے گا جس سے

$$A_z = \frac{\mu_0 I\rho^2}{4\pi a^2} + M$$

حاصل ہوتا ہے جہاں M تکمل کا مستقل ہے۔

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول

ساکن مقناطیس میدان کے تمام قوانین بایوٹ سیوارٹ کے قانون،

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I \,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.92}$$

سمتی مقناطیسی دباو کے تعریف

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.93}$$

اور مقناطیسی میدان کی شدت اور کثافت مقناطیسی بہاو کے تعلق

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{7.94}$$

سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔امید کی جاتی ہے کہ طلبہ و طالبات مندرجہ ذیل ثبوت کو سمجھتے ہوئے پڑھیں گے۔آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ انہیں یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو

سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کی مساوات

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J} \,\mathrm{d}h}{4\pi R} \tag{7.95}$$

ثابت کرنے کی خاطر ہم اس سے بایوٹ سیوارٹ کا قانون یعنی مساوات 7.92 حاصل کرتے ہیں۔مساوات 7.91 میں (x_2, y_2, z_2) پر سمتی مقناطیسی دباو دی گئی ہے جبکہ (x_1, y_1, z_1) وہ مقام ہے جہاں برقی رو گزارتا تار کا چھوٹا حصہ پایا جاتا ہے۔یوں چھوٹے حجم کو $\mathrm{d}h_1$ لکھیں گے جو $\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}y_1 \,\mathrm{d}z_1$ کے برابر ہو گا۔تکمل کے متغیرات x_1، y_1 اور z_1 ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{A}_2 = \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}_1 \,\mathrm{d}h_1}{4\pi R_{21}} \tag{7.96}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{\boldsymbol{B}_2}{\mu_0} = \frac{\nabla_2 \times \boldsymbol{A}_2}{\mu_0}$$

کے برابر ہے جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 لکھ کر یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ گردش نقطہ (x_2, y_2, z_2) پر حاصل کیا جائے گا لہٰذا گردش کے متغیرات بھی x_2، y_2 اور z_2 ہی ہوں گے۔آپ کو یاد ہو گا کہ صفحہ 153 پر مثال 4.4 میں ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے بالکل اسی طرح کیا گیا تھا۔یوں موجودہ مسئلے میں گردش حاصل کرتے وقت تمام تفرق x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں گے۔

اس طرح مساوات 7.96 سے $\boldsymbol{A}_2$ پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{\mu_0}\nabla_2 \times \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}_1 \,\mathrm{d}h_1}{4\pi R_{21}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ گردش بنیادی طور پر تفرق کا عمل ہے۔اس مساوات میں تکمل کی گردش حاصل کی جا رہی ہے۔تکمل اور تفرق جس ترتیب سے حاصل کئے جائیں، اس کا حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں ہے لہٰذا ہم تفرق کے عمل کو تکمل کے اندر لے جا سکتے ہیں جبکہ $\frac{\mu_0}{4\pi}$ مستقل ہے جسے تکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \nabla_2 \times \frac{\boldsymbol{J}_1 \,\mathrm{d}h_1}{R_{21}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہاں $\mathrm{d}h_1 = \mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}y_1 \,\mathrm{d}z_1$ پہلے تو غیر سمتی مقدار ہے جس کی گردش حاصل نہیں کی جا سکتی۔ اس کے علاوہ اس کا x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہے لہٰذا اسے گردش کے عمل سے باہر لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \left(\nabla_2 \times \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\right)\mathrm{d}h_1 \tag{7.97}$$

یہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}$ ضرب غیر سمتی مقدار $\frac{1}{R_{21}}$ کا گردش لیا جا رہا ہے۔مثال 7.2 میں کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{S}$ اور غیر سمتی مقدار M کے حاصل ضرب کی گردش

$$\nabla \times (M\boldsymbol{S}) \equiv (\nabla M) \times \boldsymbol{S} + M(\nabla \times \boldsymbol{S}) \tag{7.98}$$

حاصل کی گئی۔اس کی مدد سے مساوات 7.97 کو کھولتے ہیں جہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}_1$ اور غیر سمتی مقدار $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں۔

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}\right) \times \boldsymbol{J}_1 + \frac{1}{R_{21}}(\nabla_2 \times \boldsymbol{J}_1)\right]\mathrm{d}h_1 \tag{7.99}$$

اس مساوات کے دوسرے جزو میں $\boldsymbol{J}_1$ صرف x_1، y_1 اور z_1 پر منحصر ہے۔نقطہ (x_2, y_2, z_2) کا اس پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں لہٰذا $\boldsymbol{J}_1$ کے تمام تفرق جو x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں صفر کے برابر ہوں گے۔یوں $\nabla_2 \times \boldsymbol{J}_1 = 0$ ہو گا۔

صفحہ 153 پر مساوات 4.48 کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات

$$\boldsymbol{H}_2 = -\frac{1}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{a}_{R21}\times\boldsymbol{J}_1}{R_{21}^2}\,\mathrm{d}h_1$$

یا

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_1\times\boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2}\,\mathrm{d}h_1$$

لکھی جا سکتی ہے۔اس میں $\boldsymbol{J}_1\,\mathrm{d}h_1$ کی جگہ لکیری انداز میں $I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1$ پر کرتے ہوئے اور بند تکمل لکھ کر جانی پہچانی بایوٹ سیوارٹ مساوات

$$\boldsymbol{H}_2 = \oint_h \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔یوں ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 7.96 درست ہے اور یہ مساوات 7.92، مساوات 7.93 اور مساوات 7.94 پر پورا اترتا ہے۔

7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

آئیں اب ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.100}$$

کو بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔

شروع کرتے ہیں مساوات 7.93 اور مساوات 7.94 سے جن سے

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{7.101}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 301 پر مساوات 7.41 استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\left[\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right) - \nabla^2\boldsymbol{A}\right] \tag{7.102}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں پھیلاو اور لاپلاسی کے عمل درکار ہیں۔

پھیلاو کو پہلے حل کرتے ہیں۔مساوات 7.96 کی پھیلاو

$$\nabla_2\cdot\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_h \nabla_2\cdot\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\,\mathrm{d}h_1 \tag{7.103}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ صفحہ 168 پر مثال 4.7 میں سمتیہ $\boldsymbol{D}$ اور غیر سمتی مقدار V کے لئے

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)$$

ثابت کیا گیا۔ یہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}_1$ جبکہ غیر سمتی مقدار $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں لہٰذا اس مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\right) = \frac{1}{R_{21}}(\nabla \cdot \boldsymbol{J}_1) + \boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla \frac{1}{R_{21}}\right) \tag{7.104}$$

جس کی مدد سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}}(\nabla_2 \cdot \boldsymbol{J}_1) + \boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}\right)\right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.105}$$

ہو گا۔

چونکہ $\boldsymbol{J}_1$ صرف متغیرات x_1، y_1 اور z_1 پر منحصر ہے لہٰذا اس کے x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہوں گے لہٰذا $\nabla_2 \cdot \boldsymbol{J}_1 = 0$ ہو گا۔

ہم صفحہ 154 پر مساوات 4.50

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}$$

کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[-\boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{21}}\right)\right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.106}$$

لکھ سکتے ہیں۔ مساوات 7.104 کے دوبارہ استعمال سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}}(\nabla_1 \cdot \boldsymbol{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\right)\right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.107}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.67 کہتی ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف اس صورت پیدا ہو گا جب $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ ہو۔ چونکہ ہمیں ساکن مقناطیسی میدان سے ہی غرض ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\right) \mathrm{d}h_1 \tag{7.108}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 123 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے تحت حجمی تکمل کو سطحی تکمل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \tag{7.109}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سطح S_1 اس تمام حجم کو گھیرتی ہے جس پر حجمی تکمل حاصل کیا گیا تھا۔ چونکہ حجمی تکمل اس غرض سے حاصل کیا گیا تھا کہ ساکن مقناطیسی میدان پیدا کرنے والے برقی رو کو مکمل طور پر شامل کیا جائے لہٰذا اس حجم کے باہر کسی قسم کا کوئی برقی رو نہیں پایا جاتا۔ اگر حجم سے باہر کوئی بھی برقی رو ہوتی تب ہمیں حجم کو بڑھا کر اس برقی رو کے اثر کو بھی شامل کرنا ہوتا۔ ہم تکمل لیتے ہوئے حجم کو مزید بڑھا سکتے ہیں تا کہ اس کی سطح کو برقی رو نہ چھوئے۔ ہم ایسا اس لئے کر سکتے ہیں کہ برقی رو سے خالی حجم کے شمول سے تکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں ضرورت سے زیادہ حجم پر تکمل سے مراد یہ بھی ہے کہ سطحی تکمل ایسی سطح پر لی جائے جس پر کثافت برقی رو صفر کے برابر ہو۔ صفر کثافت برقی رو کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.110}$$

حاصل ہوتی ہے جو کہتی ہے کہ سمتی مقناطیسی دباو کا پھیلاو صفر کے برابر ہے۔ اس مساوات میں زیر نوشت میں 2 نہیں لکھا گیا ہے جو اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں مقناطیسی میدان کی بات ہو رہی ہو۔ پھیلاو بھی اسی نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم مساوات 7.102 حل کرنے کی خاطر پھیلاو اور لاپلاسی حاصل کرنے نکلے تھے۔ پھیلاو حاصل ہو چکا ہے آئیں اب لاپلاسی حاصل کریں۔

برقی دباو اور سمتی مقناطیسی دباو کے ایک جزو

$$V = \int_h \frac{\rho \, \mathrm{d}h}{4\pi\epsilon_0 R}$$
$$A_x = \int_h \frac{\mu_0 J_x \, \mathrm{d}h}{4\pi R}$$

کا موازنہ کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ ρ اور J_x کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے اور $\frac{1}{\epsilon_0}$ اور μ_0 کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے ایک مساوات سے دوسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ اب ہم پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

میں یہی تبدیلیاں کرتے ہوئے

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

اور

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

لکھ سکتے ہیں جنہیں یوں

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{7.111}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.102 میں مساوات 7.110 اور مساوات 7.111 استعمال کرتے ہوئے یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.112}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 7.7: مندرجہ بالا حصے میں برقی دباو کے لاپلاسی سے سمتی مقناطیسی دباو کی لاپلاسی اخذ کی گئی۔ سمتی مقناطیسی دباو کے لاپلاسی کو ایمپیئر کے دوری قانون اور $\boldsymbol{A}$ کی تعریف سے حاصل کریں۔

حل: ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل اور $\boldsymbol{A}$ کی تعریف

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$
$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

سے

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ صفحہ 301 پر مساوات 7.41 استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 7.110 کی مدد سے

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{7.113}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 7.1: لامحدود لمبائی کی سیدھی تار y محدد پر پڑی ہے۔اس میں $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ جانب $5\,\text{mA}$ برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ $N(2,5,3)$ پر مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ اور $|\boldsymbol{H}|$ حاصل کریں۔اگر تار $x = 3$ ، $z = -1$ پر ہو تب جوابات کیا ہوں گے۔دونوں تاروں کی موجودگی میں جوابات حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{H} = 184\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 122\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$ ، $|\boldsymbol{H}| = 221\,\frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{H} = 187\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 47\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$ ، $|\boldsymbol{H}| = 193\,\frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{H} = 371\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 75\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$ ، $|\boldsymbol{H}| = 378\,\frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$

سوال 7.2: مساوات 7.11 حاصل کریں۔

سوال 7.3: سطح $z = 0$ پر y محدد کے متوازی لامحدود لمبائی کی آٹھ عدد تاریں پڑی ہیں جن میں $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ جانب $1\,\text{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔یہ تار $y = -3.5$ ، $y = -2.5$ ، $\cdots$ ، $y = 2.5$ ، $y = 3.5$ پر پائے جاتے ہیں۔نقطہ $(0,0,1)$ اور $(0,0,50)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

جوابات: $0.421\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ، $0.0254\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ؛ محدد پر پچاس گنا دور میدان صرف سترہ گنا کم ہے۔

سوال 7.4: چار میٹر لمبی تار کو چکور کی شکل دی جاتی ہے جس کا رقبہ $1\,\text{m}^2$ ہے۔اس چکور کو $z = 0$ سطح پر رکھا جاتا ہے۔تار میں برقی رو $10\,\text{mA}$ گزرنے کی صورت میں چکور کے وسط $N(0,0,0)$ میں مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔نقطہ $P(0,0,1)$ پر بھی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $9\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$ ، $2.3\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال 7.5: شکل 7.8ا کے لامحدود سطح سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 7.6: ایک تار کو دائری شکل دے کر سطح $z = 0$ پر رکھا جاتا ہے۔دائرے کا رقبہ $1\,\text{m}^2$ ہے۔تار میں $10\,\text{mA}$ گزرنے کی صورت میں دائرے کے وسط $N(0,0,0)$ میں مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔نقطہ $P(0,0,1)$ پر بھی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $2.82\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$ ، $1.86\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال 7.7: محدد x اور y میں بڑھتے جانب $55\,\text{mA}$ برقی رو گزر رہی ہے۔نقطہ $N(5,6,4)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

جواب: $854\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 673\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 57\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$

سوال 7.8: مساوات 7.23 حاصل کرنے کے طرز پر شکل 7.11 میں 3 تا 4 پر H_{y34} حاصل کریں۔

جواب: شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔یوں $-\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی سے $\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\partial H_y}{\partial x}$ تبدیلی رو نما ہو گی اور یوں نئی قیمت $H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔

سوال 7.9: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے کارتیسی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 7.10: سطحی رو $\boldsymbol{K} = \frac{8}{\rho}\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ خطہ $\rho = 3\,\text{m}$ تا $\rho = 7\,\text{m}$ میں پائی جاتی ہے۔سطح $\phi = 0$ سے گزرتی کل برقی رو حاصل کریں۔نقطہ $N(0,0,z)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کرتے ہوئے میدان کی قیمت $z = 10$ پر دریافت کریں۔

جوابات: $I = 8\ln\frac{7}{3}\,\text{A}$ ، $\boldsymbol{H} = \left[\frac{4}{\sqrt{z^2+3^2}} - \frac{4}{\sqrt{z^2+7^2}}\right]\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $55.4\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال 7.11: سطحی رو $\boldsymbol{K} = 8\rho\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ خطہ $\rho = 3\,\text{m}$ تا $\rho = 7\,\text{m}$ میں پائی جاتی ہے۔سطح $\phi = 0$ سے گزرتی کل برقی رو حاصل کریں۔نقطہ $N(0,0,z)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کرتے ہوئے میدان کی قیمت $z = 10$ پر دریافت کریں۔

جوابات: $I = 160\,\text{A}$ ، $\boldsymbol{H} = 4\left[\frac{2z^2+49}{\sqrt{(z^2+49)}} - \frac{2z^2+9}{\sqrt{z^2+9}}\right]\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $1.52\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 7.12: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے نلکی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 7.13: رداس a کے دائری چادر پر یکساں سطحی کثافت بار ρ_S پائی جاتی ہے۔چادر کے محور کو محدد کے مبدا پر رکھتے ہوئے چادر کو سطح $z = 0$ پر رکھا جاتا ہے۔اگر چادر محور کے گرد زاویائی رفتار ω سے گھوم رہی ہو تب نقطہ $N(0,0,z)$ پر مقناطیسی میدان H کیا ہو گا؟ میدان کی قیمت $\rho_S = 5\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $\omega = 100\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ کی صورت میں $(0,0,0.1)$ پر حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{\omega\rho_S}{2}\left[\frac{2z^2+4}{\sqrt{z^2+4}} - 2z\right]$ ، $1.42\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال 7.14: سطح $z = 0$ پر خطہ $x = -3\,\text{m}$ تا $x = 3\,\text{m}$ پر سطحی برقی رو $\boldsymbol{K} = 4\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔نقطہ $N(0,0,5)$ پر مقناطیسی میدان حاصل کریں۔

جواب: $0.688\boldsymbol{a}_{\text{x}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 7.15: گول دائرے پر برقی رو کا دائرے کے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کرتے ہوئے مساوات 7.78 میں دئے بیضوی تکمل حاصل کئے گئے۔ان میں H_y کا اعدادی حل مثال 7.5 میں حاصل کیا گیا۔بالکل اسی طرز پر تکمل کو دس ٹکڑوں میں کرتے ہوئے H_z کی عددی قیمت نقطہ $N(0,a,a)$ پر حاصل کریں۔

جواب: $0.96525\left(\frac{I}{4\pi a}\right)$

سوال 7.16: سطح $x = 0$ پر سطحی برقی رو $1200\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔خطہ $0 < z < \infty$ ، $5 < y < 15$ پر برقی رو سے نقطہ $N(10,0,0)$ پر پیدا مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{H} = 45.6\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 49.6\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 7.17: خطہ $0 < z < 5$ میں یکساں کثافت برقی رو $15\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ پائی جاتی ہے۔ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے ثابت کریں کہ $\boldsymbol{H}_{z<0} = -\boldsymbol{H}_{z>5}$ کے برابر ہے۔نقطہ $(2,5,7)$ اور نقطہ $(4,12,2)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

جوابات: $37.5\boldsymbol{a}_{\text{x}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $-7.5\boldsymbol{a}_{\text{x}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 7.18: محدد کے مبدا پر رداس a کا موصل کرہ پایا جاتا ہے۔ منفی z محدد پر $10\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\text{A}$ کی برقی رو، کرہ کی سطح پر نقطہ $(0,0,-a)$ تک پہنچتی ہے جہاں سے یہ کرہ کے سطح پر یکساں پھیل کر نقطہ $(0,0,a)$ تک پہنچتی ہے اور اس کے بعد مثبت z محدد پر بڑھتے جانب چلے جاتی ہے۔ کرہ کے اندر اور اس کے باہر مقناطیسی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $0\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\frac{10}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_{\phi}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 7.19: منفی z محدد سے برقی رو I موصل $\theta = 30^{\circ}$ سطح تک پہنچ کر سطح پر یکساں پھیل کر چلے جاتی ہے۔ نقطہ $(0,0,z)$ اور نقطہ $(5,5,5)$ پر مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔

جوابات: $0\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\frac{I}{2\pi\sqrt{50}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 7.20: تفاعل $\boldsymbol{G} = (5x+yz)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 3xyz\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \frac{x^2y}{z}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ نقطہ $N(0.6,0.4,0.2)$ اور اس کے قریب پایا جاتا ہے۔ سطح $z = 0.2$ پر $2a$ لمبائی کے اطراف کے مربع لکیر پر $\oint \boldsymbol{G}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کریں جہاں مربع کا مرکز نقطہ N پر ہے۔ لکیری تکمل کو مربع کے رقبے سے تقسیم کریں اور $a \to 0$ لیتے ہوئے $\nabla\times\boldsymbol{G}_z$ حاصل کریں۔

جوابات: چاروں اطراف کے لکیری تکمل $0.48a^2+0.288a$ ، $0.48a^2-0.288a$ ، $-0.4a^2+6.16a$ اور $-0.4a^2-6.16a$ ہیں۔ یوں $\nabla\times\boldsymbol{G}_z = 0.04$ ہے۔

سوال 7.21: مساوات 7.34 استعمال کرتے ہوئے تفاعل $\boldsymbol{G} = (5x+yz)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 3xyz\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \frac{x^2y}{z}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کا نقطہ $N(0.6,0.4,0.2)$ پر $\nabla\times\boldsymbol{G}$ حاصل کریں۔ سوال 7.20 میں حاصل کئے گئے $\nabla\times\boldsymbol{G}_z$ کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: $1.08\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.04\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$

سوال 7.22: ہم محوری تار میں $\boldsymbol{E} = 3000\rho^{1.3}\cos(\omega t - 0.3z)\boldsymbol{a}_{\rho}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ تار میں $\nabla\times\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $900\rho^{1.3}\sin(\omega t - 0.3z)\boldsymbol{a}_{\phi}$

سوال 7.23: میدان $V = 5(x^2 + y^2)$ اور $V = 10x^3 + y^2 + xz^4$ کے لئے $\nabla^2 V$ اور $\nabla \times \boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: 20 ، 0 ، $60x + 2 + 12xz^2$ ، 0

سوال 7.24: میدان $\boldsymbol{H} = x^2y^2z\boldsymbol{a}_{\text{X}} - xy^2z^2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ دیا گیا ہے۔ مسئلہ سٹوکس کے دونوں اطراف باری باری استعمال کرتے ہوئے، سطح $y = 1$ میں خطہ $1 < x < 2$ ، $1 < z < 3$ سے $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ جانب گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: $13.3\,\text{A}$

سوال 7.25: میدان $\boldsymbol{H} = \frac{2xy}{z^2}\boldsymbol{a}_{\text{X}} - \frac{y^2}{z^2}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + x^2y^2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ دیا گیا ہے۔ سطح $x = 0.5$ میں خطہ $1 < y < 2$ ، $2 < z < 3$ سے $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ جانب گزرتی برقی رو درکار ہے۔ الف) برقی رو کو بذریعہ سطحی تکمل حاصل کریں۔ ب) برقی رو کو بذریعہ لکیری تکمل حاصل کریں

جواب: $0.426\,\text{A}$

سوال 7.26: کروی محدد میں میدان $\boldsymbol{H} = \frac{50r}{\sin\theta}\boldsymbol{a}_{\phi}$ دیا گیا ہے۔ مسئلہ سٹوکس کے دونوں اطراف باری باری استعمال کرتے ہوئے کروی خطہ $r = 0.2$ ، $0 < \phi < 2\pi$ ، $0 < \theta < 60°$ سے گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: $5.44\,\text{A}$

سوال 7.27: میدان $\boldsymbol{H} = \frac{4r^2}{\sin\theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + 50r\sin\theta\boldsymbol{a}_{\phi}$ دیا گیا ہے۔ سطح $\theta = 45°$ میں خطہ $0 < \phi < 2\pi$ ، $0 < r < 3$ سے $\boldsymbol{a}_{\theta}$ جانب گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: $-1414\,\text{A}$

سوال 7.28: پاکستان میں کل زمینی مقناطیسی میدان $45\,\mu\text{T}$ تا $50\,\mu\text{T}$ پایا جاتا ہے جس کا افقی جزو اوسطاً $30\,\mu\text{T}$ کے لگ بھگ ہے۔ ایک تار جس میں $1\,\text{A}$ کی برقی رو گزر رہی ہو، کتنے فاصلے پر زمینی میدان کے افقی جزو برابر مقناطیسی میدان پیدا کرے گی۔

جواب: $4.2\,\mathrm{cm}$

سوال 7.29: بیس سنٹی میٹر لمبائی اور پانچ سنٹی میٹر رداس کا پیچدار لچھا جس میں برقی رو گزر رہی ہو میں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H} = 200\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N_1(0.02, 0^\circ, 0.02)$ اور $N_2(0.04, 50^\circ, 0.06)$ کے درمیان غیر سمتی مقناطیسی دباو V_{m21} حاصل کریں۔ سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ سے $\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ حاصل کرتے ہوئے $\rho = 0$ پر $\boldsymbol{A} = 0$ لیتے ہوئے انہیں دو نقطوں کے مابین $\boldsymbol{A}_{21}$ حاصل کریں۔ یہ مساوات استعمال کرتے وقت $\boldsymbol{A}$ کا درست جزو اپنے علم سے چنیں۔

جوابات: $-8\,\mathrm{A}$ ، $2.5\boldsymbol{a}_{\phi}\,\frac{\mu\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}}$

سوال 7.30: نلکی کثافت برقی رو $50\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ رداس $\rho = 2\,\mathrm{m}$ پر پائی جاتی ہے جبکہ رداس $\rho = 4\,\mathrm{m}$ پر $25\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ اور رداس $\rho = 5\,\mathrm{m}$ پر $-40\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ پائے جاتے ہیں۔ زاویہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ لیتے اور $\phi = 180^\circ$ کو رکاوٹ تصور کرتے ہوئے نقطہ $N_1(3.5, 60^\circ, 0)$ پر غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m حاصل کریں۔

جوابات: $-66.6\,\mathrm{A}$

سوال 7.31: سطح $z = 0$ پر تار $x = 4$ میں $0.2\,\mathrm{A}$ کی برقی رو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب پائی جاتی ہے جبکہ تار $x = -4$ میں $0.2\,\mathrm{A}$ برقی رو $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب پائی جاتی ہے۔ محدد کے مبدا پر $V_m = 0$ لیتے ہوئے z محدد پر غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m حاصل کریں۔

جواب: $-\frac{0.2}{\pi}\tan^{-1}\frac{z}{4}\,\mathrm{A}$

باب 8

مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ

برقی بار کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے جس میں موجود ساکن یا حرکت کرتے بار پر قوت دفع یا قوت کشش پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی میدان برقی رو یعنی حرکت کرتے بار سے پیدا ہوتا ہے اور اس میدان میں حرکت کرتے بار پر قوت پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی میدان ساکن بار پر قوت پیدا نہیں کرتا۔

اس باب میں برقی رو گزارتی تار پر قوت اور قوت مروڑ کا جائزہ لیا جائے گا۔ اس کے بعد مقناطیسی اشیاء اور آخر میں امالہ [1] پر غور کیا جائے گا۔

8.1 متحرک بار پر قوت

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ برقی میدان میں بار بردار ذرے پر

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} \tag{8.1}$$

قوت اثر انداز ہوتی ہے۔ مثبت بار کی صورت میں یہ قوت برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہوتی ہے۔ قوت کی قیمت بار Q اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔ بار ساکن ہو یا حرکت کر رہا ہو، اس پر قوت کی مقدار اسی مساوات سے حاصل ہوتی ہے۔

---

[1] inductance

اسی طرح تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ مقناطیسی میدان میں ساکن بار بردار ذرے پر مقناطیسی میدان کوئی قوت پیدا نہیں کرتا البتہ متحرک بار بردار ذرے پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.2}$$

قوت پیدا کرتا ہے۔یہ قوت بار کے براہ راست متناسب ہوتی ہے۔اسی طرح قوت بار کے رفتار $\boldsymbol{v}$، کثافت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ اور ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے بھی براہ راست متناسب ہوتی ہے۔قوت کی سمت $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں کے عمودی یعنی $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ سمت میں ہوتی ہے۔

مقناطیسی قوت رفتار کے عمودی ہے لہٰذا یہ رفتار کی قیمت پر اثر انداز نہیں ہوتا البتہ یہ اس کی سمت پر ضرور اثر ڈالتا ہے۔اس طرح مقناطیسی قوت بار بردار ذرے کے متحرک توانائی میں تبدیلی لانے سے قاصر ہے۔ اس کے برعکس برقی قوت جسے مساوات 8.1 بیان کرتی ہے بار بردار ذرے کی رفتار میں تبدیلی پیدا کرتے ہوئے حرکی توانائی میں تبدیلی پیدا کرتا ہے۔دونوں میدانوں میں یہ بنیادی فرق ہے کہ برقی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا کرتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا نہیں کرتا۔

دونوں میدانوں کی بیک وقت موجودگی میں بار بردار ذرے پر کل قوت

$$\boldsymbol{F} = Q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{8.3}$$

دونوں میدانوں سے علیحدہ علیحدہ پیدا قوتوں کے مجموعے کے برابر ہے۔مساوات 8.3 لورنز مساوات قوت[3][2] کہلاتی ہے۔برقی اور مقناطیسی میدانوں میں بار بردار ذرے، مثلاً الیکٹران، کے راہ اسی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔

مشق 8.1: ایک عدد نقطہ بار جس کی قیمت $-3\,\mathrm{C}$ اور رفتار $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو پر مندرجہ ذیل میدانوں میں قوت کی مطلق قیمت حاصل کریں۔ (الف) $\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$، (ب) $\boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$، (پ) دونوں میدانوں کی بیک وقت موجودگی میں۔

جوابات: $18.49\,\mathrm{N}$ ، $71.3\,\mathrm{N}$ ، $78.7\,\mathrm{N}$

---

[2] یہ مساوات ہینڈرک لورنز کے نام ہے۔

[3] Lorentz force equation

8.2 تفرقی بار پر قوت

مقناطیسی میدان میں متحرک تفرقی بار dQ پر تفرقی قوت $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ عمل کرے گی۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.4}$$

آپ جانتے ہیں کہ منفی بار کی باریک ترین مقدار الیکٹران کا بار ہے۔مثبت بار کی باریک ترین قیمت بھی اتنی ہی لیکن مثبت قطب کی ہے۔منفی بار کو مثال بناتے ہوئے، یوں مندرجہ بالا مساوات میں تفرقی بار سے مراد کم از کم اتنا بار ہے جس میں الیکٹرانوں کی تعداد اتنی ہو کہ کسی ایک الیکٹران کے بار کا اثر قابل نظر انداز ہو۔اسی طرح اس تفرقی بار کا حجم اگرچہ چھوٹا ہے لیکن اس حجم کی جسامت الیکٹرانوں کے مابین اوسط فاصلے سے بہت زیادہ ہے۔مساوات 8.4 تفرقی بار پر کل قوت دیتا ہے۔یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ یہ قوت کسی ایک الیکٹران پر اثر انداز نہیں ہوتا بلکہ یہ تمام الیکٹرانوں پر علیحدہ علیحدہ قوتوں کا مجموعہ ہے۔

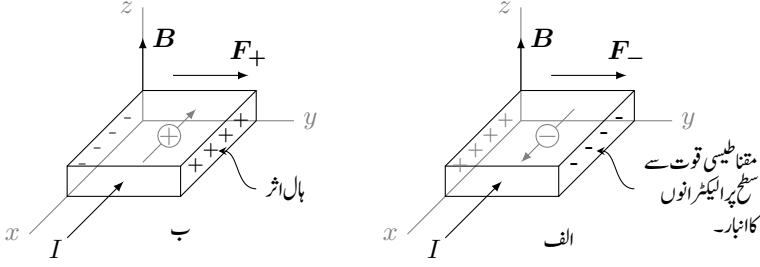
موصل تار میں برقی رو، الیکٹران کی حرکت کی بدولت ہے۔برقی رو گزارتے تار کو مقناطیسی میدان میں رکھنے سے تار میں ہر الیکٹران پر مقناطیسی قوت کا اثر پایا جائے گا۔اگرچہ کسی ایک الیکٹران پر انتہائی کم قیمت کی قوت پائی جاتی ہے لیکن موصل تار میں الیکٹرانوں کی تعداد انتہائی زیادہ ہوتی ہے۔یوں انتہائی زیادہ تعداد میں انتہائی کم قوتوں کا مجموعہ معقول قیمت کی قوت پیدا کرتا ہے۔آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ مجموعی قوت تار تک کس طرح منتقل ہوتی ہے۔

موصل میں مثبت ایٹم یا آئن ساکن ہوتے ہیں جبکہ الیکٹران آزادی سے حرکت کر سکتے ہیں۔مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے موصل تار میں حرکت پذیر منفی الیکٹران پر مقناطیسی قوت عمل کرتی ہے جس سے مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین فاصلوں میں تبدیلی رونما ہوتی ہے۔اب مثبت اور منفی بار کے مابین کولمب قوتیں ایسی تبدیلی کو روکتے ہیں لہٰذا حرکت پذیر الیکٹران پر مقناطیسی قوت یوں ساکن آئن تک پہنچ پاتی ہیں جو بطور تار پر مقناطیسی قوت کی صورت میں رونما ہوتی ہے۔

مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین کولمب قوتیں انتہائی طاقتور ہوتی ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان سے پیدا فاصلوں میں تبدیلی قابل ناپ نہیں ہوتی۔مثبت اور منفی باروں کے مابین فاصلے کی بنا پر انہیں دو چادر برق گیر تصور کیا جا سکتا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ ایسے برق گیر کی چادروں کے مابین برقی دباو پایا جاتا ہے۔یوں الیکٹران کی حرکت اور مقناطیسی میدان دونوں کی سمتوں کے عمودی دو الٹ اطراف کے مابین تار پر معمولی برقی دباو پایا جاتا ہے جسے **ہال اثر**[4] کے نام[5] سے جانا جاتا ہے۔

---

[4] Hall effect

[5] ایڈون حال نے اس اثر کو 1879 میں دریافت کیا۔

شکل 8.1: ہال اثر سے متحرک بار کا قطب دریافت کیا جا سکتا ہے۔

ہال اثر کو شکل 8.1 کی مدد سے باآسانی سمجھا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں موصل یا n قسم کے نیم موصل برقی رو گزارتا تار دکھایا گیا ہے۔ تار میں برقی رو I کی سمت $-\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ہے للہذا تار میں آزاد منفی بار اس کے الٹ یعنی $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ تار میں آزاد الیکٹران کو ہلکی سیاہی میں تیر کے نشان پر دائرے میں بند $-$ علامت سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں تیر اس کے حرکت کی سمت ظاہر کرتا ہے۔ یہ تار $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ سمت کے مقناطیسی میدان میں پڑی ہے۔ تار میں آزاد بار منفی قطب کے ہیں للہذا ان پر مساوات 8.2 کے تحت $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ سمت میں قوت $\boldsymbol{F}_{-}$ عمل کرے گا۔ قوت کی علامت پر زیر نوشت میں منفی کی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ یہ قوت متحرک منفی بار پر اثر انداز ہوتا ہے۔ یوں تار کے دائیں طرف پر منفی الیکٹرانوں کا انبار جمع ہوتا ہے جبکہ تار کے بائیں طرف پر الیکٹران کی تعداد کم ہو جاتی ہے جس سے اس جانب ساکن مثبت آئن بے پردہ[6] ہو جاتے ہیں۔ شکل 8.1-الف میں تار کے دائیں طرف $-$ اور بائیں طرف $+$ کے علامات انہیں کو ظاہر کرتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ مثبت اور منفی بار کے مابین برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ اور یوں برقی دباو پایا جاتا ہے للہذا تار کے دائیں اور بائیں اطراف کے مابین **ہال برقی دباو**[7] پایا جائے گا۔ تار کا بایاں طرف ہال برقی دباو کا مثبت سرا ہو گا۔

آئیں ایسی صورت دیکھیں جہاں متحرک مثبت بار کی بدولت برقی رو پائی جائے۔ شکل 8.1-ب میں بقایا صورت حال بالکل شکل-الف کی طرح ہے البتہ یہاں تار p قسم کے نیم موصل کا بنا ہوا ہے جس میں برقی رو مثبت **آزاد خول**[8] کے حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ یوں اگر برقی رو $-\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ سمت میں ہو تب آزاد خول بھی اسی سمت میں حرکت کریں گے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں بھی مقناطیسی قوت آزاد بار کو دائیں جانب دھکیل رہے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس مرتبہ ہال برقی دباو کا مثبت سرا تار کا دائیں طرف پایا جاتا ہے جو شکل-الف کے عین الٹ ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ آیا نیم موصل n یا p قسم کا ہے۔

---

uncovered[6]
Hall voltage[7]
free holes[8]

ہال اثر استعمال کرتے ہوئے مختلف پیمائشی آلات بنائے جاتے ہیں مثلاً یک سمتی رو پیما، مقناطیسی بہاو پیما[9] وغیرہ۔

سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ سے حرکت کرتا ہوا حجمی کثافت بار ρ_h کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{8.5}$$

کو جنم دیتا ہے۔اس مساوات کو صفحہ 180 پر حاصل کیا گیا۔ چھوٹے حجم $\mathrm{d}h$ میں تھوڑے سے بار کو

$$\mathrm{d}Q = \rho_h \, \mathrm{d}h \tag{8.6}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 8.4 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \rho_h \, \mathrm{d}h \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}h \tag{8.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم مساوات 7.6 میں دیکھ چکے ہیں کہ $\boldsymbol{J} \, \mathrm{d}h$ کو برقی رو گزارتے تار کا تفرقی حصہ تصور کیا جا سکتا ہے جسے

$$\boldsymbol{J} \, \mathrm{d}h = \boldsymbol{K} \, \mathrm{d}S = I \, \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح مساوات 8.7 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}S \tag{8.8}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I \, \mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.9}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.7، مساوات 8.8 اور مساوات 8.9 کے تکمل سے انہیں یوں

$$\boldsymbol{F} = \int_h \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}h \tag{8.10}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}S \tag{8.11}$$

$$\boldsymbol{F} = \oint I \, \mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.12}$$

---

[9] magnetic flux meter

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.12 میں اگر سیدھی تار لی جائے جس کی لمبائی L ہو تو تکمل سے

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.13}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں قوت کی قیمت

$$F = ILB \sin \alpha \tag{8.14}$$

ہے جہاں تار اور مقناطیسی میدان کے درمیان زاویہ α ہے۔مساوات 8.13 اور مساوات 8.14 پورے دور کے کچھ حصے پر قوت دیتے ہیں۔دور کے بقایا حصوں پر بھی اسی طرح قوت حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 8.1: محدد z پر لامحدود لمبائی کی تار میں $1.5\,\mathrm{A}$ کی برقی رو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب گزر رہی ہے۔اس کے قریب نقطہ $N_1(3,2,5)$ تا $N_2(4,6,1)$ کے درمیان سیدھی موصل تار میں $2.3\,\mathrm{A}$ کی برقی رو N_1 سے N_2 کی جانب گزر رہی ہے۔اس تار پر مقناطیسی قوت حاصل کریں۔

حل: پہلی تار مقناطیسی میدان

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \frac{1.5\mu_0}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi \\
&= \frac{1.5\mu_0}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right) \\
&= \frac{1.5\mu_0}{2\pi(x^2+y^2)}(-y\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})
\end{aligned}$$

پیدا کرتا ہے جو دوسری تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ پر قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 2.3\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.15}$$

پیدا کرے گی۔تار کی مساوات $\boldsymbol{L} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں x ، y اور z متغیرات کو ایک ہی متغیرہ t کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
x &= 3 + (4-3)t = 3 + t \\
y &= 2 + (6-2)t = 2 + 4t \\
z &= 5 + (1-5)t = 5 - 4t
\end{aligned}$$

جہاں $t=0$ پر کرنے سے ابتدائی نقطہ $N_1(3,2,5)$ اور $t=1$ پر کرنے سے اختتامی نقطہ $N_2(4,6,1)$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{L}=(3+t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(2+4t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(5-4t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھ کر $\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}t\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+4\,\mathrm{d}t\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-4\,\mathrm{d}t\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح پوری تار پر قوت مساوات 8.15 کے تکمل سے یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=\int_0^1 2.3(\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\,\mathrm{d}t\times\frac{1.5\mu_0}{2\pi[(3+t)^2+(2+4t)^2]}[-(2+4t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(3+t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}]\\&=\int_0^1\frac{3.45\mu_0}{2\pi(17t^2+22t+13)}[4(t+3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+8(2t+1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(17t+11)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

لکھی جا سکتی ہے جس سے

$$\boldsymbol{F}=369\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+386\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+478\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{nN}$$

حاصل ہوتا ہے۔

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت

شکل میں نقطہ N_1 پر تار کا ایک چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1$ دکھایا گیا ہے جس میں I_1 برقی رو گزر رہی ہے جبکہ نقطہ N_2 پر تار کا دوسرا چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ دکھایا گیا ہے جس میں I_2 برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ N_2 پر تار کے پہلے ٹکڑے سے پیدا مقناطیسی میدان مساوات 7.2 دیتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2=\frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

مساوات 8.9 مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_2$ میں تار کے تفرقی حصے پر تفرقی قوت دیتا ہے۔ تفرقی مقناطیسی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ سے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ پر پیدا قوت درکار ہے۔اس قوت کو تفرقی قوت کا تفرقی حصہ $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2)$ لکھتے ہوئے مساوات 8.9 کو

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2)=I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2\times\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2 = \mu_0 \,\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ کے برابر ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{21}^2} \,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}) \tag{8.16}$$

یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان حاصل کرتے وقت ضروری ہے کہ پورے تار پر تکمل حاصل کیا جائے۔مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر مکمل تکمل لیتے ہوئے میدان $\boldsymbol{H}_2$ استعمال نہیں کیا گیا بلکہ تفرقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ استعمال کیا گیا ہے۔یوں اگر اس مساوات سے قوتیں حاصل کی جائیں تو یہ درست نہیں ہوں گی۔یہ دیکھنے کے لئے تصور کریں کہ نقطہ $(1,2,3)$ پر $I_1 \,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \mathrm{A\,m}$ جبکہ نقطہ $(-1,3,2)$ پر $I_2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \mathrm{A\,m}$ پایا جاتا ہے۔دوسرے نقطے پر قوت حاصل کرتے ہیں۔یہاں $\boldsymbol{R}_{21} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے لہٰذا دوسرے تار پر قوت

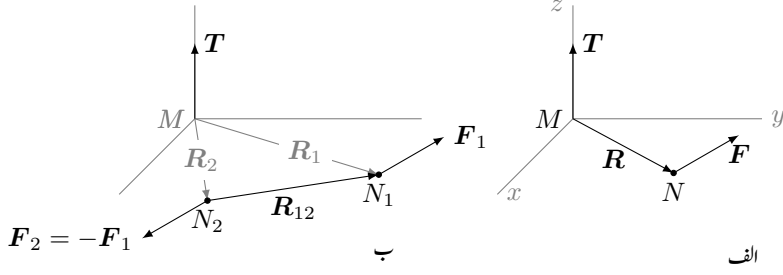
$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi \left(2^2 + 1^1 + 1^2\right)^{\frac{3}{2}}} (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times \left[(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \times \left(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\right] \\ &= -108.86\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \,\mathrm{nN}\end{aligned}$$

ہو گا۔اب بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے پہلے نقطے پر

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi \left(2^2 + 1^1 + 1^2\right)^{\frac{3}{2}}} (2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \times \left[(-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times \left(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\right] \\ &= 54.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \,\mathrm{nN}\end{aligned}$$

قوت حاصل ہوتی ہے جہاں $\boldsymbol{R}_{12} = -\boldsymbol{R}_{21}$ استعمال کیا گیا۔آپ کو یاد ہو گا کہ چھوٹی سی چھوٹی مقدار کے دو باروں کے مابین ہر صورت قیمت میں برابر اور سمت میں الٹ قوتیں پائی جاتی ہیں۔مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہے اور برقی رو گزارتے دو چھوٹے حصوں پر نا تو قوت کی قیمتیں برابر ہیں اور نا ہی ان کی سمتوں کا آپس میں کوئی تعلق ہے۔یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ مقناطیسی میدان میں مکمل بند دور حل کرتے ہوئے ہی صحیح جوابات حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ایسا ہی کرتے ہیں۔

مساوات 8.16 کا دوگنا تکمل لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2}\right] \\ &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\boldsymbol{a}_{R21} \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R_{21}^2}\right] \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2\end{aligned} \tag{8.17}$$

شکل 8.2: قوت کا معیار اثر۔

حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں اندرونی تکمل نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان حاصل کرنے کے لئے درکار ہے جبکہ بیرونی تکمل اسی نقطے پر تار پر کل قوت حاصل کرنے کے لئے درکار ہے۔

8.4 قوت اور قوت مروڑ

مساوات 8.12 مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تار پر قوت دیتا ہے جسے یکساں میدان میں $\boldsymbol{B}$ کو تکمل کے باہر لے جاتے ہوئے

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{B} \times \oint \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب کوئی بھی برقی دور مکمل بند دائرہ بناتا ہے۔کسی بھی شکل کے بند دائرے کا لکیری تکمل $\oint \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا یکساں میدان میں برقی دور کی پورے تار پر کل صفر قوت پائی جائے گی۔البتہ اگر میدان یکساں نہ ہو تب ضروری نہیں کہ پورے دور پر قوت صفر ہو۔

مساوات 8.10 اور مساوات 8.11 کے برقی رو کو بھی متعدد متوازی جڑے باریک تار نما ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسی ہر باریک تار پر بھی یکساں میدان میں صفر قوت ہو گا لہٰذا ان اشکال کے برقی رو کے ادوار پر بھی کل صفر قوت ہی پایا جائے گا۔

یکساں میدان میں پورے دور پر صفر قوت پائی جاتی ہے البتہ دور پر قوت مروڑ[10] یعنی قوت کا معیار اثر[11] عموماً صفر نہیں

[10] torque
[11] moment of force

ہوتا۔ قوت کا معیار اثر حاصل کرنے کی خاطر قوت اور قوت مروڑ کے **محور یعنی چول**[12] کا جاننا ضروری ہے۔ شکل 8.2-الف میں نقطہ N پر قوت $\boldsymbol{F}$ عمل کر رہا ہے۔ ہم نقطہ M کو محور چنتے ہیں۔ نقطہ M سے N تک سمتی فاصلہ $\boldsymbol{R}$ **قوت کا بازو**[13] کہلاتا ہے۔ قوت کا معیار اثر $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F} \tag{8.18}$$

کے برابر ہے۔ قوت مروڑ کی قیمت، قوت کے بازو کی لمبائی ضرب قوت کی قیمت ضرب ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے برابر ہے جبکہ اس کی سمت دونوں کے عمودی ہے جسے صلیبی ضرب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

شکل 8.2-ب میں پختہ شکل کے جسم پر دو مختلف نقطوں پر برابر مگر الٹ سمت کی قوت لاگو کی گئی ہیں۔ چونکہ اس جسم پر کل قوت صفر کے برابر ہے لہٰذا یہ کسی بھی سمت میں سیدھی حرکت نہیں کرے گی۔ محور M پر ان قوت مروڑ کا مجموعہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{R}_2\times\boldsymbol{F}_2\\&=(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2)\times\boldsymbol{F}_1\\&=\boldsymbol{R}_{12}\times\boldsymbol{F}_1\end{aligned}$$

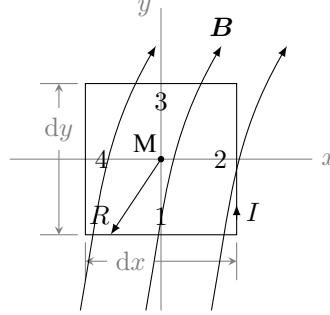
ہو گا جہاں دوسرے قدم پر $\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_1$ پر کیا گیا ہے۔اس مساوات میں قوتوں کے محور کا $\boldsymbol{R}_{12}$ پر کوئی اثر نہیں ہے لہٰذا کل قوت صفر ہونے کی صورت میں قوت مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے۔اسی عمل کو زیادہ قوتوں پر بھی لاگو کیا جا سکتا ہے۔

چونکہ قوت مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے لہٰذا ہم محور اس مقام پر چن سکتے ہیں جس پر قوت مروڑ کا حصول زیادہ آسان ہو۔ہم سطحی قوتوں کی صورت میں ایسا محور عموماً قوتوں کے ہم سطحی ، جسم کے دھرے پر پایا جاتا ہے۔

آئیں شکل 8.3 میں دئے برقی رو گزارتے تار پر غیر یکساں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں قوت مروڑ حاصل کریں۔ تصور کریں کہ تار چول M پر صرف گھوم سکتا ہے۔ اس تار کے اطراف $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ ہیں جبکہ اس میں برقی رو I کی سمت تیر کے نشان سے ظاہر کی گئی ہے۔اس چھوٹے رقبے کے وسط M پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B}_0=B_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{8.19}$$

---

[12] pivot
[13] moment arm

شکل 8.3: مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تفرقی بند دائرے پر قوت مروڑ۔

کے برابر ہے۔ یوں وسط سے $-\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 1 پر مقناطیسی میدان ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0 - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔صرف یک رتبی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_1 = \left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times \boldsymbol{B}_1$$

یا

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times \left[\left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right.\\&\qquad\left. + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right]\\&= I\,\mathrm{d}x\left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]\end{aligned}$$

ہو گی۔اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیانے نقطے تک ہو گا یعنی $\boldsymbol{R}_1 = -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ لہٰذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= \boldsymbol{R}_1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 \\
&= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x \left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_\mathrm{z} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_\mathrm{y} \right] \\
&= -\frac{I}{2} \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}
\end{aligned}$$

ہو گا۔

اسی طرح وسط سے $+\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 3 پر مقناطیسی میدان مکلارن تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔صرف یک رتبی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_3 = \left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 = -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{B}_3$$

یا

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 = -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times & \left[\left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_\mathrm{y} \right. \\
& \left. + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \right] \\
= I\,\mathrm{d}x & \left[- \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_\mathrm{z} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_\mathrm{y} \right]
\end{aligned}$$

ہو گی۔اس قوت کا بازو مبدا سے اس طرف کے درمیان تک یعنی $\boldsymbol{R}_3 = \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ ہے لہٰذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \boldsymbol{R}_3 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 \\
&= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x \left[-\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \right] \\
&= -\frac{I}{2}\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} \right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}
\end{aligned}$$

ہو گا۔

ان دو قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -IB_{y0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$$

کے برابر ہے۔بالکل اسی طرح تیسرے اور چھوتے اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = IB_{x0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں تمام اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔قوسین میں بند حصے کو صلیبی ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{B}_0 \right)$$

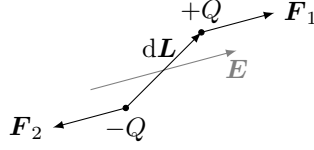
یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} \tag{8.20}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بند راہ سمتی رقبے $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کو گھیرتی ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت نہیں لکھا گیا۔

بند دائرے میں برقی رو ضرب چھوٹے سمتی رقبے کا حاصل ضرب تفرقی مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر[14] $\mathrm{d}\boldsymbol{m}$ کی تعریف ہے جس کی اکائی $\mathrm{A\,m^2}$ ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.21}$$

[14] differential magnetic dipole moment

شکل 8.4: برقی جفت قطب پر برقی میدان میں قوت مروڑ۔

اور

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = \mathrm{d}\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{8.22}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

مساوات 8.20، مساوات 8.21 اور مساوات 8.22 عمومی مساوات ہیں جن میں چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ مربع کے علاوہ کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے اور اس کی سمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔

غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں تار پر کل قوت صفر نہیں ہو گی۔

شکل 8.4 میں برقی میدان میں برقی جفت قطب دکھایا گیا ہے۔مثبت بار پر قوت $\boldsymbol{F}_1 = Q\boldsymbol{E}$ اور منفی بار پر قوت $\boldsymbol{F}_2 = -Q\boldsymbol{E}$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس جفت قطب پر تفرقی قوت مروڑ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T} &= \mathrm{d}\boldsymbol{L} \times Q\boldsymbol{E}\\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}\end{aligned}$$

کے برابر ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = Q\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ برقی جفت قطب ہے۔قوت مروڑ کی سمت صفحہ کے اندر جانب کو ہے۔ آپ نے دیکھا کہ مقناطیسی اور برقی جفت قطب پر قوت مروڑ کی مساوات یکساں ہیں۔بالکل مقناطیسی جفت قطب کی طرح یہاں بھی قوت مروڑ کا تخمینہ لگاتے وقت جفت قطب کے احاطے میں میدان $\boldsymbol{E}$ کی تبدیلی کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

مثال 8.2: شکل 8.3 میں چھوٹے رقبے کو اتنا چھوٹا تصور کریں کہ اس پر مقناطیسی میدان یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ایسی صورت میں تفرقی قوت مروڑ حاصل کریں۔

حل: یکساں میدان کی صورت میں

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times \left(B_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)\\ &= I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)\\ &= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 &= -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times \left(B_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)\\ &= I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)\\ &= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان نتائج سے کل قوت مروڑ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\right)$$

ہی حاصل ہوتا ہے۔

شکل 8.5: قوت مروڑ دونوں مقناطیسی میدان کو متوازی بنانے کی کوشش کرتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے ثابت ہوتا ہے کہ غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں قوت مروڑ حاصل کرتے وقت چھوٹے رقبے پر میدان کی تبدیلی کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔اس مثال سے یہ بھی ظاہر ہے کہ یکساں مقناطیسی میدان میں تار پر کل قوت صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اگر مقناطیسی میدان حقیقت میں یکساں ہی ہو تب کسی بھی بڑے رقبے پر بھی قوت مروڑ بالکل اسی مساوات

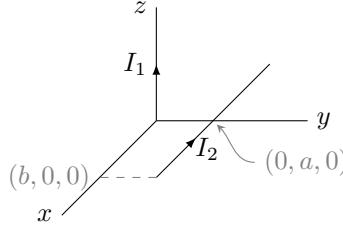
$$\boldsymbol{T} = I\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \qquad \text{یکساں مقناطیسی میدان} \tag{8.23}$$

سے حاصل ہو گا البتہ غیر یکساں میدان کی صورت میں قوت مروڑ کی تعریف استعمال کرتے ہوئے ہی صحیح جواب حاصل ہو گا۔ سوال 8.9 میں آپ سے غیر یکساں میدان میں قوت مروڑ حاصل کرنے کو کہا گیا ہے جبکہ سوال 8.10 میں مندرجہ بالا مساوات استعمال کرنے کو کہا گیا ہے۔

غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ برقی رو گزارتے بند دائرے پر قوت مروڑ اس سمت میں دائرے کو گھمانے کی کوشش کرتا ہے جس میں دائرے سے پیدا مقناطیسی میدان اور بیرونی لاگو مقناطیسی میدان کی سمتیں ایک ہی ہوں۔اس حقیقت کو شکل 8.5 کی مدد سے یاد رکھا جا سکتا ہے جہاں برقی رو گزارتے تار کی جگہ چھوٹا مقناطیس بیرونی میدان میں دکھایا گیا ہے۔ چھوٹا مقناطیس اس سمت میں گھومتا ہے جہاں دونوں میدان متوازی ہوں۔

مثال 8.3: محدد z پر لامحدود لمبائی کی تار میں I_1 برقی رو $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ سمت میں گزر رہی ہے۔اس کے قریب سطح $z = 0$ پر تار $y = a$ ، $-b < x < b$ میں $-\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ سمت میں I_2 برقی رو گزر رہی ہے۔نقطہ $(0, a, 0)$ پر محور تصور کرتے ہوئے لمبی تار کے میدان میں چھوٹی تار پر قوت مروڑ حاصل کریں۔صورت حال شکل 8.6 میں دکھائی گئی ہے۔

حل: محدد z پر برقی رو میدان

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

شکل 8.6: چھوٹی تار پر قوت مروڑ کا حصول۔

پیدا کرتی ہے جسے کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x^2 + y^2)}(-y\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس میدان کی قیمت اور سمت غیر یکساں ہیں۔کارتیسی میدان میں انتہائی چھوٹی لمبائی کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھا جاتا ہے۔چھوٹی تار پر $\mathrm{d}y = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ ہیں لہٰذا $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ لکھتے[15] ہوئے تار کے انتہائی چھوٹے حصے پر قوت

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F} &= I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \\
&= I_2\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x^2 + y^2)}(-y\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}) \\
&= \frac{I_1 I_2 \mu_0 x\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{2\pi(x^2 + y^2)}
\end{aligned}$$

لکھی جا سکتی ہے۔نقطہ $(0, a, 0)$ کو محور تصور کرتے ہوئے $\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ لکھا جائے گا۔یوں تار کی انتہائی چھوٹے حصے پر قوت مروڑ

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{R} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F} \\
&= x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times \frac{I_1 I_2 \mu_0 x\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{2\pi(x^2 + y^2)} \\
&= -\frac{I_1 I_2 \mu_0 x^2 \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}}{2\pi(x^2 + y^2)}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

[15] طلباء یہاں عموماً غلطی کرتے ہوئے $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ لکھتے ہیں۔یاد رہے کہ تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے در اصل سمت تعین کرتے ہیں۔

ہو گا۔یوں پورے تار پر کل قوت مروڑ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= \int_b^{-b} -\frac{I_1 I_2 \mu_0 x^2 \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{2\pi(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{I_1 I_2 \mu_0}{\pi}\left(b - a\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \quad \mathrm{N\,m}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $y = a$ پر کیا گیا ہے۔

8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے

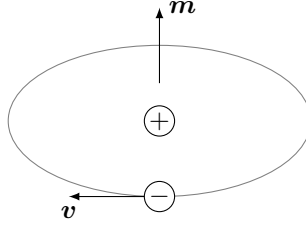
شکل 8.7 میں ایٹمی مرکز کے گرد مدار میں گھومتا الیکٹران دکھایا گیا ہے۔حرکت کرتی بار برقی رو پیدا کرتی ہے۔ایسی برقی رو جو مقید الیکٹران کی بنا پر ہو **مقید برقی رو**[16] I_m کہلائی جاتی ہے۔اس الیکٹران کو بند گول دائرے پر مقید برقی رو تصور کیا جا سکتا ہے جو مقناطیسی جفت قطب $\boldsymbol{m}$ کو جنم دیتی ہے۔الیکٹران منفی ہونے کی وجہ سے مقید برقی رو $\boldsymbol{v}$ کے الٹ سمت میں ہو گا۔ایٹمی مسائل صرف **کوانٹم میکانیات**[17] سے ہی سمجھے جا سکتے ہیں۔یہاں صرف اتنا بتانا ضروری ہے کہ لوہا، نِکل[18] اور کوبالٹ [19] ایسے عناصر ہیں جن کا $\boldsymbol{m}$ قدر زیادہ قیمت رکھتا ہے۔یہ اشیاء **فولادی مقناطیسی اشیاء**[20] کہلاتے ہیں۔ہم انہیں اشیاء پر غور کرتے ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء میں ایٹموں کے باہمی قوتوں کی وجہ سے قریبی جفت قطب ایک ہی سمت میں رخ کر لیتے ہیں۔ایسے ہم **صف**[21] خطوں میں متعدد ایٹم شامل ہوتے ہیں۔ان خطوں کو **مقناطیسی خطے**[22] کہتے ہیں۔مقناطیسی خطے مختلف شکل کے ہو سکتے ہیں اور ان کی جسامت ایک مائیکرو میٹر تا کئی سنٹی میٹر ممکن ہے۔کسی بھی قدرتی مقناطیسی شہ میں انفرادی مقناطیسی خطے کے مقناطیسی جفت قطب کا معیار اثر انتہائی بڑی مقدار کا ہوتا ہے البتہ مختلف مقناطیسی خطوں کے جفت قطب کے رخ مختلف سمتوں میں ہوتے ہیں۔اسی وجہ سے پورا حجم از خود کوئی مقناطیسی معیار اثر نہیں

---

[16] bound current
[17] quantum mechanics
[18] nickel
[19] cobolt
[20] ferromagnetic
[21] aligned
[22] magnetic domain

m

v

شکل 8.7: مدار میں گھومتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر کو بیرونی میدان کے متوازی دکھایا گیا ہے۔

رکھتا۔ہاں بیرونی مقناطیسی میدان B_0 لاگو کرنے سے وہ مقناطیسی خطے جو B_0 کے ہی سمت میں رخ کئے ہوں کا حجم بڑھ جاتا ہے جبکہ بقایا مقناطیسی خطوں کا حجم کم ہو جاتا ہے۔یوں اندرونی مقناطیسی میدان بیرونی میدان سے کئی گنا بڑھ جاتا ہے۔بیرونی میدان ہٹا دینے سے تمام مقناطیسی خطے اپنی پرانی صورت اختیار نہیں کر پاتے۔یوں تمام مقناطیسی خطوں کا مجموعی بقایا مقناطیسی معیار اثر رہ جاتا ہے۔یہ حقیقت کہ مقناطیسی اشیاء کی خصوصیات ماضی کے حالات پر منحصر ہے، **مقناطیسی چال**[23] کہلاتا ہے۔

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل

تصور کریں کہ کسی مادے کے اکائی حجم میں n مقناطیسی جفت قطب پائے جاتے ہوں۔ اس مادے کے Δh حجم میں $n\Delta h$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی مقناطیسی معیار اثر ان کا سمتی مجموعہ

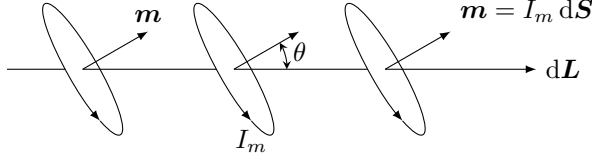
$$\boldsymbol{m}_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta h} \boldsymbol{m}_i \tag{8.24}$$

ہو گا۔انفرادی $\boldsymbol{m}$ مختلف قیمت اور سمت کے ہو سکتے ہیں۔اجتماعی مقناطیسی معیار اثر فی اکائی حجم

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{1}{\Delta h} \sum_{i=1}^{n\Delta h} \boldsymbol{m}_i \tag{8.25}$$

کو **مقناطیسیت**[24] پکارا اور $\boldsymbol{M}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مقناطیسیت کی اکائی بالکل $\boldsymbol{H}$ کے اکائی کی طرح ایمپیئر فی میٹر $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کا صفحہ 201 پر دی گئی مساوات 5.25 کے ساتھ موازنہ کریں جو تقطیب کی تعریف بیان کرتی ہے۔مندرجہ ذیل پڑھتے ہوئے بھی تقطیب پر تبصرے کو ساتھ ساتھ دیکھتے رہیں۔

---

[23] hysteresis
[24] magnetization

شکل 8.8: بیرونی مقناطیسی میدان جفت قطب کو صف بستہ کئے ہوئے ہے جس سے بند راہ سے گھیرے گئے سطح میں مقید برقی رو سے اضافہ پایا جاتا ہے۔

شکل 8.8 میں بند راہ کا کچھ حصہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دکھایا گیا ہے جس پر مقناطیسی جفت قطب دکھائے گئے ہیں۔ چھوٹے رقبے $\mathrm{d}S$ کے گرد گھومتی مقید برقی رو I_m مقناطیسی معیار اثر $\boldsymbol{m} = I_m \,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کو جنم دیتی ہے۔ بیرونی مقناطیسی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب ہم صف ہو کر $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے ساتھ θ کا زاویہ بناتے ہیں۔ یوں چھوٹے حجم $\mathrm{d}S\cos\theta\,\mathrm{d}L$ یعنی $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں جفت قطب کی کل تعداد $n\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ ہو گی۔ آئیں دیکھتے ہیں کہ بند راہ سے گھیری سطح سے گزرتی برقی رو میں بیرونی میدان لاگو کرنے سے کیا تبدیلی رو نما ہوتی ہے۔ اگر بند راہ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{L}}$ جانب چلا جائے تو گھیری گئی سطح بائیں ہاتھ کو ہے۔ بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں تمام جفت قطب بلا ترتیب پائے جاتے ہیں۔ بیرونی میدان $\boldsymbol{B}$ لاگو کرنے کی صورت میں تمام کے تمام $n\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ جفت قطب ہم صف ہو جاتے ہیں جس کی وجہ سے گھیری سطح سے کل مقید گزرتی برقی رو بڑھ جاتی ہے۔ ہر انفرادی جفت قطب گھیری گئی سطح سے گزرتی برقی رو میں I_m کا اضافہ کرتا ہے لہٰذا تمام ہم صف جفت قطب مل کر

$$\mathrm{d}I_m = nI_m \,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.26}$$

اضافہ پیدا کرتے ہیں۔ پوری بند راہ کے گرد چلتے ہوئے یوں کل اضافہ

$$I_m = \oint \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.27}$$

ہو گا۔

مندرجہ بالا مساوات ایمپیئر کے دوری قانون کی مساوات کے ساتھ قریبی مشابہت رکھتی ہے۔ یوں $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{H}$ کے تعلق پر نظر ثانی کرتے ہوئے یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ یہ خلاء کے علاوہ دیگر اشیاء میں بھی کارآمد ہو۔ ہمارا موجودہ تبصرہ بیرونی میدان $\boldsymbol{B}$ میں جفت قطب پر قوت اور قوت مروڑ پر رہا ہے۔ آئیں $\boldsymbol{B}$ کو ہی بنیادی متغیرہ تصور کرتے ہوئے $\boldsymbol{H}$ کی بہتر تعریف حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر ایمپیئر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو I اور مقید برقی رو I_m کے مجموعے $I_{\text{کل}}$ کی صورت

$$\oint \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = I_{\text{کل}} \tag{8.28}$$

میں لکھتے ہیں جہاں

$$I_{\text{کل}} = I + I_m \tag{8.29}$$

کے برابر ہے۔مندرجہ بالا تین مساوات سے

$$I = I_{\text{کل}} - I_m = \oint \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.30}$$

حاصل ہوتا ہے۔قوسین میں بند حصے کو $\boldsymbol{H}$ کی بہتر تعریف لیتے ہیں یعنی

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{8.31}$$

جسے یوں

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \right) \tag{8.32}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ خلاء میں $\boldsymbol{M}$ صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے خلاء میں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ ہی حاصل ہوتا ہے۔مساوات 8.30 میں $\boldsymbol{H}$ کی نئی تعریف پر کرنے سے ایمپیئر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو کی صورت

$$I = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.33}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

مختلف اقسام کی برقی رو کے لئے

$$\begin{aligned} I_m &= \oint_S \boldsymbol{J}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ I_{\text{کل}} &= \oint_S \boldsymbol{J}_{\text{کل}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ I &= \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جن سے بذریعہ مسئلہ سٹوکس مساوات 8.27، مساوات 8.33 اور مساوات 8.28 کے گردش

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{J}_m \\ \nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} &= \boldsymbol{J}_{\text{کل}} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \end{aligned} \tag{8.34}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ ہمیں یہاں سے آگے مساوات 8.33 اور مساوات 8.34 سے غرض رہے گا۔یہ دونوں مساوات آزاد برقی رو کے تعلق پیش کرتے ہیں۔

مساوات 8.32 کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$، مقناطیسی میدان کی شدت $\boldsymbol{H}$ اور مقناطیسیت $\boldsymbol{M}$ کے تعلق کو بیان کرتی ہے۔ خطی[25] اور غیر سمتی خاصیت[26] کے اشیاء میں مقناطیسیت اور میدان کی شدت کا خطی تعلق

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{8.35}$$

پایا جاتا ہے جہاں χ_m کو مقناطیسی اثر پذیری[27] کہا جاتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \chi_m \boldsymbol{H}\right)\\ &= \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ قوسین میں بند حصے کو جزوی مقناطیسی مستقل[28] پکارا اور μ_R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$\mu_R = 1 + \chi_m \tag{8.36}$$

یوں

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_R \boldsymbol{H}$$

یا

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.37}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں μ

$$\mu = \mu_0 \mu_R \tag{8.38}$$

مقناطیسی مستقل[29] پکارا جاتا ہے۔جزوی مقناطیسی مستقل μ_R کے استعمال سے بایوٹ سیوارٹ کا قانون اور ایمپیئر کے دوری قانون کو خلاء کے علاوہ ان تمام اشیاء میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جو خطی اور غیر سمتی خاصیت رکھتے ہوں۔ایسی اشیاء مساوات 8.35 پر پورا اترتی ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء کے μ_R کی قیمت 10 تا 100 000 پائی جاتی ہے۔

---

[25] linear
[26] isotropic
[27] magnetic susceptibility
[28] relative magnetic constant, relative permeability
[29] magnetic constant, permeability

سمتی خاصیت[30] کی اشیاء میں $\boldsymbol{H}$ کا ہر کارتیسی جزو $\boldsymbol{B}$ کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہٰذا ان کا تعلق تناوی شکل

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z \\ B_y &= \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z \\ B_z &= \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z \end{aligned} \tag{8.39}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔یہ مساوات صفحہ 205 پر دئے مساوات 5.40 کی طرح ہے۔یوں سمتی خاصیت کی اشیاء میں $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ کے تعلق میں μ تناوی مستقل ہے۔مساوات $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ اب بھی درست ہے اگرچہ $\boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{M}$ عموماً غیر متوازی ہوں گے۔

مقناطیسی اثر پذیری کی بات کرتے ہوئے خطی تعلق تصور کیا گیا ہے۔حقیقت میں ایسا خطی تعلق صرف غیر مقناطیسی اشیاء میں ہی پایا جاتا ہے۔

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط

ہم موصل اور ذو برق کے سرحدی شرائط دیکھ چکے ہیں۔انہیں دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔بالکل انہیں کی طرح شکل 8.9 کی مدد سے مقناطیسی سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں جہاں دو مقناطیسی اشیاء کی سرحد دکھائی گئی ہے جن کے مقناطیسی مستقل μ_1 اور μ_2 ہیں۔ سرحد پر چھوٹے نلکی نما ڈبے کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے گاوس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

کے اطلاق سے

$$B_{n1}\Delta S - B_{n2}\Delta S = 0$$

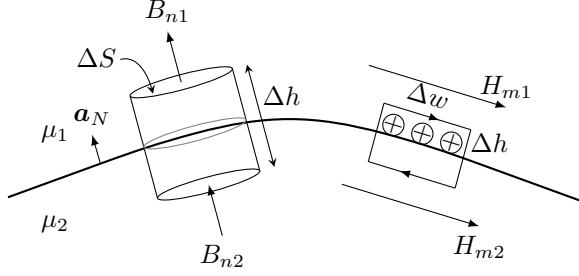
یعنی

$$B_{n2} = B_{n1} \tag{8.40}$$

یا

$$H_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}H_{n1} \tag{8.41}$$

---

[30] anisotropic

شکل 8.9: مقناطیسی سرحدی شرائط۔

حاصل ہوتے ہیں۔یوں عمودی $\boldsymbol{B}$ سرحد پر بلا جوڑ ہے جبکہ عمودی $\boldsymbol{H}$ سرحد پر $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ کی شرح سے جوڑ دار ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات کو یوں

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \tag{8.42}$$

$$\boldsymbol{a}_N \cdot \left(\boldsymbol{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\boldsymbol{H}_1\right) = 0 \tag{8.43}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

سرحد پر عمودی $\boldsymbol{M}$ کا تعلق سرحد پر عمودی $\boldsymbol{H}$ کے تعلق سے حاصل ہوتا ہے۔خطی خاصیت کے مقناطیسی اشیاء کے لئے یوں

$$M_{n2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}}\frac{\mu_1}{\mu_2}M_{n1} \tag{8.44}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو K تصور کرتے ہوئے کثافت کے عمودی ΔL چوڑائی پر برقی رو $I_{\Delta L} = K\Delta L$ لکھی جا سکتی ہے۔یوں سرحد پر متوازی اجزاء کی شرط شکل میں مستطیل راہ پر ایمپیئر کے دوری قانون

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

کے اطلاق سے

$$H_{m1}\Delta w - H_{m2}\Delta w = K_{\perp}\Delta w$$

یعنی

$$H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp} \tag{8.45}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $K_{\perp}$ سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔ سمتی ضرب کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{K}_{\perp} \tag{8.46}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ سرحد پر عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ سرحد کے متوازی $\boldsymbol{B}$ کے لئے یوں

$$\frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2} = K_{\perp} \tag{8.47}$$

یا

$$\boldsymbol{a}_N \times \left(\frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2}\right) = \boldsymbol{K}_{\perp} \tag{8.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح خطی خاصیت کی اشیاء کے لئے سرحد کے متوازی $\boldsymbol{M}$ کے لئے

$$M_{m2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{m1} - \chi_{m2} K_{\perp} \tag{8.49}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ سرحد پر صفر کثافت برقی رو کی صورت میں مندرجہ بالا تین مساوات سادہ صورت اختیار کر لیتے ہیں۔دونوں اشیاء غیر موصل ہونے کی صورت میں سرحد پر کثافت برقی رو صفر ہی ہوتی ہے۔

مثال 8.4: مساوات $3x - 2y + 5z < 1$ خطہ-1 جبکہ مساوات $3x - 2y + 5z > 1$ خطہ-2 کو ظاہر کرتی ہے۔ ان خطوں کے جزوی مقناطیسی مستقل $\mu_{R1} = 2.5$ اور $\mu_{R2} = 5$ ہیں ۔خطہ-1 میں $\boldsymbol{H}_1 = 30\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 20\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 40\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے۔سرحد کے عمودی، خطہ-1 سے خطہ-2 کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ حاصل کریں۔پہلے خطے میں سرحد کے عمودی اور متوازی میدان کے اجزاء حاصل کریں۔اسی طرح دوسرے خطے میں سرحد کے عمودی اور متوازی میدان حاصل کریں۔ سرحد کے عمود کے ساتھ دونوں خطوں میں میدان کیا زاویہ بناتا ہے۔

حل: سرحدی مساوات کی ڈھلوان سے اکائی سمتیہ حاصل ہو گی۔چونکہ ڈھلوان کی سمت بڑھتے جانب ہوتی ہے لہٰذا اس کی سمت خطہ-1 سے خطہ-2 کی جانب ہو گی۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_N &= \frac{\nabla(3x-2y+5z)}{\left|\nabla(3x-2y+5z)\right|}\\ &= \frac{3\boldsymbol{a}_\text{X}-2\boldsymbol{a}_\text{y}+5\boldsymbol{a}_\text{Z}}{\sqrt{38}}\\ &= 0.487\boldsymbol{a}_\text{X}-0.324\boldsymbol{a}_\text{y}+0.811\boldsymbol{a}_\text{Z}\end{aligned}$$

میدان کا عمودی جزو

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{n1} &= (\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{a}_N)\boldsymbol{a}_N\\ &= -24.33(0.487\boldsymbol{a}_\text{X}-0.324\boldsymbol{a}_\text{y}+0.811\boldsymbol{a}_\text{Z})\\ &= -11.84\boldsymbol{a}_\text{X}+7.89\boldsymbol{a}_\text{y}-19.74\boldsymbol{a}_\text{Z}\end{aligned}$$

ہے جسے میدان سے منفی کرنے سے متوازی جزو حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{m1} &= \boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_{n1}\\ &= (30\boldsymbol{a}_\text{X}+20\boldsymbol{a}_\text{y}-40\boldsymbol{a}_\text{Z})-(-11.84\boldsymbol{a}_\text{X}+7.89\boldsymbol{a}_\text{y}-19.74\boldsymbol{a}_\text{Z})\\ &= 41.84\boldsymbol{a}_\text{X}+12.11\boldsymbol{a}_\text{y}-20.26\boldsymbol{a}_\text{Z}\end{aligned}$$

چونکہ سرحد پر مقناطیسی میدان بے جوڑ ہوتا ہے لہٰذا سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی میدان برابر ہوں گے۔

$$\boldsymbol{H}_{m2}=\boldsymbol{H}_{m1}=41.84\boldsymbol{a}_\text{X}+12.11\boldsymbol{a}_\text{y}-20.26\boldsymbol{a}_\text{Z}$$

سرحدی شرائط سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{n2}=\frac{\mu_{R1}}{\mu_{R2}}\boldsymbol{H}_{n1} &= \frac{2}{5}(-11.84\boldsymbol{a}_\text{X}+7.89\boldsymbol{a}_\text{y}-19.74\boldsymbol{a}_\text{Z})\\ &= -5.92\boldsymbol{a}_\text{X}+3.95\boldsymbol{a}_\text{y}-9.87\boldsymbol{a}_\text{Z}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں دوسرے خطے میں میدان

$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_{m2}+\boldsymbol{H}_{n2}=35.92\boldsymbol{a}_\text{X}+16.05\boldsymbol{a}_\text{y}-30.13\boldsymbol{a}_\text{Z}$$

ہے۔پہلے خطے میں

$$\cos\theta_1=\frac{|\boldsymbol{H}_{n1}|}{|\boldsymbol{H}_1|}=0.452$$

سے

$$\theta_1 = 63.1^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ دوسرے خطے میں اسی طرح

$$\theta_2 = \cos^{-1} \frac{|\boldsymbol{H}_{n2}|}{|\boldsymbol{H}_2|} = 75.8^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔

8.8 مقناطیسی دور

یک سمت برقی ادوار حل کرنے سے آپ بخوبی آگاہ ہوں گے۔کئی مقناطیسی مسائل بالکل انہیں کی طرح حل ہوتے ہیں۔برقی مشین مثلاً موٹر اور ٹرانسفارمر کی کارکردگی پر غور کرتے وقت انہیں مقناطیسی ادوار سمجھا جاتا ہے۔میری کتاب "برقی آلات" میں اس ترکیب پر پورا باب ہے اور پوری کتاب میں اسی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے مختلف برقی مشین پر غور کیا گیا ہے۔ آئیں اس ترکیب کو دیکھیں۔

سب سے پہلے ان برقی اور مقناطیسی مساوات کو پاس پاس لکھتے ہیں جن کی مدد سے مقناطیسی ادوار کا تصور پیدا ہوتا ہے۔برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{8.50}$$

ہے۔غیر سمتی مقناطیسی دباو اور مقناطیسی میدان کی شدت کے تعلق

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m \tag{8.51}$$

سے بھی آپ بخوبی واقف ہیں۔منبع برقی دباو کو محرک برقی دباو پکارا جاتا ہے۔اسی مشابہت کی بنا پر غیر مقناطیسی دباو کو محرک مقناطیسی دباو پکارا جائے گا۔متحرک مقناطیسی دباو کی اکائی ایمپیئر ہے۔حقیقت میں عموماً متعدد چکر کے لچھے کو بطور متحرک مقناطیسی دباو استعمال کیا جاتا ہے اور یوں اس کی اکائی ایمپیئر-چکر[31] لی جاتی ہے۔یاد رہے کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو صرف اس خطے میں معنی رکھتا ہے جہاں برقی رو موجود نہ ہو۔

---

[31] ampere-turns

دو نقطوں کے درمیان برقی دباو کے فرق کو

$$V_{AB} = -\int_B^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.52}$$

لکھا جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح دو نقطوں کے درمیان مقناطیسی دباو کے فرق کو

$$V_{mAB} = -\int_B^A \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.53}$$

لکھا جاتا ہے۔ صفحہ 332 پر مساوات 7.83 میں بتلایا گیا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو کے حصول کے دوران مندرجہ بالا تکمل میں $\phi = \pi$ پر سے نہیں گزرا جائے گا۔ اس حقیقت کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

برقی ادوار میں اوہم کے قانون کی نقطہ شکل

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{8.54}$$

سے کون خبردار نہیں ہے۔ یہ مساوات کثافت برقی رو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق بیان کرتی ہے۔ مقناطیسی ادوار میں اس کا مقابل

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.55}$$

ہے جو کثافت مقناطیسی بہاو اور مقناطیسی میدان کے شدت کا تعلق پیش کرتی ہے۔

کل برقی رو بذریعہ سطحی تکمل

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.56}$$

حاصل ہوتی ہے۔ کل مقناطیسی بہاو بھی ایسے ہی تکمل سے حاصل ہو گا لہٰذا

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.57}$$

لکھا جائے گا۔ یوں برقی ادوار میں I اور مقناطیسی ادوار میں Φ اہمیت کے حامل ہیں۔

برقی ادوار میں برقی دباو اور برقی رو کی شرح کو برقی مزاحمت پکارا اور R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$V = IR \tag{8.58}$$

ہم بالکل اسی طرح متحرک مقناطیسی دباو اور مقناطیسی بہاو کی شرح کو ہچکچاہٹ کا نام دیتے ہیں جسے $\Re$ سے ظاہر کیا جائے گا لہٰذا مقناطیس ادوار کے لئے

$$V_m = \Phi\Re \tag{8.59}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہچکچاہٹ کی اکائی ایمپیئر-چکر فی ویبر $(\mathrm{A \cdot t/Wb})$ ہے۔

خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ جس کی موصلیت σ ہو سے بنایا گیا برقی مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma S} \tag{8.60}$$

کے برابر ہے جہاں مزاحمت کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پوری لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔ اگر خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ سے ہچکچاہٹ بنایا جائے تو اس کی قیمت

$$\Re = \frac{d}{\mu S} \tag{8.61}$$

ہو گی جہاں ہچکچاہٹ کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔ حقیقت میں ہوا کے علاوہ ایسا کوئی مادہ نہیں پایا جاتا جس سے اٹل قیمت کی ہچکچاہٹ بنائی جا سکے۔

مثال 8.5: ایک سلاخ جس کی لمبائی $15\,\mathrm{cm}$ اور رداس $1\,\mathrm{mm}$ ہے کی موصلیت $1200\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے پر $220\,\mathrm{V}$ برقی دباو لاگو کی جاتی ہے۔ سلاخ کی مزاحمت اور اس میں برقی رو حاصل کریں۔ سلاخ میں کثافت برقی رو بھی حاصل کریں۔

حل: مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma A} = \frac{0.15}{7 \times 10^4 \times \pi \times 0.001^2} = 39.8\,\Omega$$

اور برقی رو

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{39.8} = 5.5\,\mathrm{A}$$

اور یوں کثافت برقی رو ہو گا

$$J = \frac{I}{A} = \frac{5.5}{\pi \times 0.001^2} = 1.75\,\frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$$

مثال 8.6: ایک سلاخ جس کی لمبائی 15 cm اور رداس 2 cm ہے کا جزو مقناطیسی مستقل 1000 ہے۔اس پر 100 چکر کا لچھا جس میں 0.5 A برقی رو ہو مقناطیسی دباو لاگو کرتا ہے۔سلاخ کی ہچکچاہٹ اور اس میں مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔سلاخ میں کثافت مقناطیسی بہاو بھی حاصل کریں۔

حل:ہچکچاہٹ

$$\Re = \frac{d}{\mu_R \mu_0 A} = \frac{0.15}{1000 \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times \pi \times 0.02^2} = 94\,988\,\text{A} \cdot \text{t/Wb}$$

اور مقناطیسی بہاو

$$\Phi = \frac{V_m}{\Re} = \frac{100 \times 0.5}{94988} = 0.53\,\text{mWb}$$

اور یوں کثافت مقناطیسی بہاو ہو گی

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.00053}{\pi \times 0.02^2} = 0.42\,\text{T}$$

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی

ساکن برقی میدان پر غور کے دوران ہم نے نقطہ بار پر قوت کے تجرباتی نتائج سے کولمب کا قانون اخذ کیا۔اس قانون کو استعمال کرتے ہوئے مختلف نقطہ بار کو لامحدود فاصلے سے مختلف اختتامی مقامات پر رکھنے کی خاطر کل درکار توانائی حاصل کی گئی۔یہی ساکن برقی میدان کی مخفی توانائی تھی۔اس مخفی توانائی کی عمومی مساوات

$$W_{\text{برقی}} = \frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}h \tag{8.62}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کا تعلق راست تناسب تصور کیا گیا ہے۔

یہاں خیال آتا ہے کہ مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی بھی اسی طرز پر حاصل کی جا سکتی ہے جیسے برقی میدان کی مخفی توانائی حاصل کی گئی تھی، یعنی، ایک برقی رو گزارتے تار کے قریب دوسرے برقی رو گزارتے تار کو قریب لاتے ہوئے درکار توانائی معلوم کر کے۔حقیقت میں معاملہ اتنا سادہ نہیں ہے۔جیسے کہ اگلے باب میں بتلایا جائے گا، مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے حصے میں برقی دباو پیدا ہوتا ہے جس میں معاملہ خاصہ تبدیل ہو جاتا ہے۔

مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی اگلے باب میں پوئنٹنگ سمتیہ[32] سے حاصل کی جائے گی۔یہاں مقناطیسی مخفی توانائی کی مساوات صرف پیش کرتے ہیں

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}h \tag{8.63}$$

جو شکل سے برقی مخفی توانائی کے مساوات کے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔اس میں $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ پر کرنے سے

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \mu H^2\,\mathrm{d}h \tag{8.64}$$

اور

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \frac{B^2}{\mu}\,\mathrm{d}h \tag{8.65}$$

بھی حاصل ہوتے ہیں۔

برقی مخفی توانائی کی طرح یہاں بھی یہ بتلانا کہ مخفی توانائی درحقیقت کہاں پر ہے نا ممکن ثابت ہوتا ہے البتہ حساب و کتاب آسان بنانے کی خاطر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ توانائی پورے حجم میں بطور کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$ پائی جاتی ہے جسے جاول فی مربع میٹر $\mathrm{J/m^3}$ میں ناپا جائے گا۔

Poynting vector[32]

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ

برقی ادوار میں مزاحمت، برق گیر[33] (کپیسٹر) اور امالہ گیر[34] کردار ادا کرتے ہیں۔مزاحمت اور برق گیر (کپیسٹر) پر ہم بات کر چکے ہیں۔برقی دباو اور برقی رو کی شرح کو مزاحمت کہا گیا۔ ہم نے دیکھا کہ مزاحمت کی قیمت کا دارومدار مزاحمت کی لمبائی، رقبہ عمودی تراش اور موصلیت پر ہے۔اسی طرح دو چادروں میں سے کسی ایک پر بار کی مطلق قیمت اور ان چادروں کے درمیان برقی دباو کی شرح کو برقی گنجائش (کپیسٹنس) کہا گیا۔ہم نے دیکھا کہ برقی گنجائش کی قیمت کا دارومدار برق گیر (کپیسٹر) کے چادروں کے رقبے، ان چادروں کے درمیان فاصلے اور چادروں کے درمیان مادے کی برقی مستقل پر ہے۔یوں مزاحمت اور برق گیر (کپیسٹر) کے قیمت ان کے شکل، جسامت اور مادے کے مستقل پر ہے۔اس حصے میں ہم امالہ گیر کی امالیت L پر غور کریں گے جس کی اکائی ہینری[35] H ہے۔امالہ گیر[36] اور اس کی امالیت[37] دونوں کے لئے ہم امالہ کا لفظ استعمال کریں گے۔نیچے کئی مساوات میں امالہ اور فاصلہ دونوں کے لئے ایک ہی علامت یعنی L استعمال کیا گیا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ متن سے ان کا فرق کرنا ممکن ہو گا۔ہم دیکھیں گے کہ اس کی قیمت کا دارومدار امالہ گیر کی شکل، جسامت اور مقناطیسی مستقل پر ہے۔

امالہ سمجھنے کی خاطر ارتباط بہاو[38] کا ذکر ضروری ہے۔تصور کریں کہ N چکر لا لچھا جس میں I برقی رو گزر رہا ہے کل Φ مقناطیسی بہاو پیدا کرتا ہے۔تصور کریں کہ Φ ان تمام N چکر سے گزرتا ہے۔یوں تمام کا تمام مقناطیسی بہاو ہر چکر سے گزرتی ہے۔یوں پہلے چکر سے Φ بہاو گزرتی ہے، دوسرے چکر سے بھی Φ بہاو گزرتی ہے اور اسی طرح بقایا ہر چکر سے بھی اتنا ہی بہاو گزرتا ہے۔ارتباط بہاو سے مراد $N\Phi$ ہے یعنی تمام چکر سے گزرتے بہاو کا مجموعہ۔

ارتباط بہاو اور برقی رو کی شرح کو امالہ کہا جاتا ہے۔اگر ارتباط بہاو اسی برقی رو سے پیدا ہو تب ان کی شرح کو خود امالہ[39] کہتے ہیں جسے عموماً چھوٹا کر کے صرف امالہ پکارا جاتا ہے۔اس کے برعکس اگر برقی رو ایک تار میں ہو اور ارتباط بہاو دوسری تار کی ہو تب ان کے شرح کو مشترکہ امالہ[40] کہتے ہیں۔اس حصے میں خود امالہ پر ہی غور کیا جائے گا۔اگلے حصے میں مشترکہ امالہ پر غور کیا جائے گا۔

$$L = \frac{N\Phi}{I} \tag{8.66}$$

[33] capacitor
[34] inductor
[35] Henry
[36] inductor
[37] inductance
[38] flux linkage
[39] self inductance
[40] mutual inductance

اس مساوات میں تصور کیا گیا ہے کہ پورا مقناطیسی بہاو تمام چکر سے گزرتا ہے۔امالہ کی یہ تعریف صفر خطی مقناطیسی اشیاء کے لئے معنی رکھتی ہے۔ خطی مقناطیسی اشیاء سے مراد ایسے مقناطیسی اشیاء ہیں جن میں مقناطیسی بہاو اور برقی رو راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔فولادی مقناطیسی اشیاء میں مقناطیسی چال کی بنا پر امالہ کی کوئی ایک تعریف تمام موقعوں کے لئے کارآمد ثابت نہیں ہوتی۔ہم خطی مقناطیسی اشیاء تک ہی بحث کو محدود رکھیں گے۔

آئیں ہم محوری تار کے اکائی لمبائی کی امالہ حاصل کریں۔صفحہ 287 پر مساوات 7.13

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم محوری تار میں تاروں کے درمیانی خطے میں مقناطیسی شدت دیتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے اس خطے میں z_0 لمبائی پر کل مقناطیسی بہاو

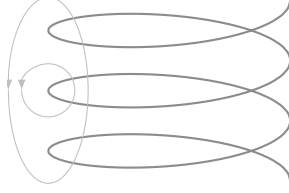
$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_S B_\phi \, \mathrm{d}S \\
&= \int_0^{z_0} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu I \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}z}{2\pi\rho} \\
&= \frac{\mu I z_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}
\end{aligned}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہ مقناطیسی بہاو دونوں تاروں کے درمیانے خطے میں اندرونی تار کے گرد گھومتا ہے لہٰذا تکمل میں کسی بھی زاویہ پر z_0 لمبی ρ_1 تا ρ_2 رداسی سطح لی جا سکتی ہے۔یوں اکائی لمبائی پر ہم محوری تار کی امالہ

$$L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{8.67}$$

ہو گی۔یہاں $N = 1$ یعنی ایک ہی چکر ہے اور تمام کا تمام مقناطیسی بہاو پورے برقی رو کے گرد چکر کاٹتی ہے۔

اب تصور کریں کہ پیچدار لچھے کی امالہ درکار ہو جسے شکل 8.10 میں دکھایا گیا ہے۔ایسے لچھے کے پہلے چکر کا پورا بہاو پہلے چکر سے گزرتا ہے البتہ اس کا کچھ ہی حصہ دوسرے یا تیسرے چکر سے گزرتا ہے۔یہی کچھ بقایا چکر کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں لچھے کی ارتباط بہاو حاصل کرنے کی خاطر ہر چکر سے گزرتی انفرادی بہاو لیتے ہوئے تمام کا مجموعہ حاصل کیا جائے گا یعنی

$$\text{ارتباط بہاو} = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$$

شکل 8.10: متعدد چکر کے لچھے میں ہر چکر سے گزرتی مقناطیسی بہاو مختلف ہو سکتی ہے۔

آئیں اب امالہ کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

کسی بھی بند راہ پر یک سمت برقی رو I گزرنے سے کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

پیدا ہوتی ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ سمتی مقناطیسی دباو ہے جسے

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایسی بند راہ سطح S کو گھیرتی ہے جس میں سے گزرتی کل مقناطیسی بہاو Φ کو تکمل

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس تکمل میں $\boldsymbol{B}$ پر کرنے سے

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔مسئلہ بایوٹ سیوارٹ کی مدد سے اسے

$$\Phi = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں بند تکمل سطح کی سرحد یعنی برقی رو گزارتے بند راہ پر حاصل کیا جائے گا۔اس مساوات میں $\boldsymbol{A}$ پر کرنے سے

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں امالہ کی عمومی مساوات

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.68}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہاں تکمل کے اندر L فاصلے کو ظاہر کرتی ہے جبکہ مساوات کے بائیں ہاتھ یہی علامت امالہ کو ظاہر کرتی ہے۔

امالہ کی مساوات سے ظاہر ہے کہ امالہ کی قیمت کا دارومدار صرف اور صرف تار یا لچھے کی شکل و جسامت اور مقناطیسی مستقل پر منحصر ہے۔

امالہ کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر سطحی تکمل لیا گیا۔ایک چکر کے بند راہ جس سطح کو گھیرتی ہے، اس کی شکل ذہن میں آسانی سے بن جاتی ہے البتہ پیچدار لچھا جس سطح کو گھیرتا ہے اس کی شکل ذہن میں ذرا مشکل[41] سے بنتی ہے۔ سطحی تکمل لیتے وقت ایسی تمام ممکنہ سطح استعمال کی جا سکتی ہیں جن کا سرحد پیچدار لچھے کی تار ہو۔

برقی رو گزارتے تار کی رداس صفر کرنے سے بایوٹ سیوارٹ کے قانون کے تحت لامحدود کثافت مقناطیسی بہاو حاصل ہو گی جس سے لامحدود توانائی اور لامحدود امالہ حاصل ہوتا ہے۔حقیقت میں قابل استعمال جوابات حاصل کرنے کی خاطر تار کے رداس چھوٹا ضرور لیکن صفر کبھی تصور نہیں کیا جاتا۔

کسی بھی برقی رو گزارتے تار کے اندر بھی زاویائی مقناطیسی بہاو پایا جاتا ہے۔تار کے محور کے قریب گھومتی اندرونی بہاو کم برقی رو کو گھیرتی ہے جبکہ محور سے دور زاویائی اندرونی بہاو زیادہ برقی رو گھیرتی ہے۔جیسا آپ اگلے ابواب میں پڑھیں گے، زیادہ تعدد پر تار کے بیرونی سطح کے قریب زیادہ برقی رو گزرتی ہے لہٰذا زیادہ تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کا کردار قابل نظرانداز ہوتا ہے البتہ کم تعدد پر اس کا حساب رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

مثال 8.7: محوری تار میں اندرونی تار کا رداس ρ_1 جبکہ بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔ان تاروں کے درمیان خطہ $0 < \phi < 90°$ میں $\mu_R = 2$ مقناطیسی مستقل کا ذو برق بھرا گیا ہے جبکہ بقایا خطہ خلاء پر مشتمل ہے۔تاروں کے درمیان خطے میں مقناطیسی بہاو حاصل کرتے ہوئے فی میٹر تار کی امالہ حاصل کریں۔

[41] آپ لچھے کے محور پر سلاخ تصور کرتے ہوئے اس کے گرد گول گھومتی اور اوپر جاتی سطح تصور کر سکتے ہیں۔

حل: ایمپیئر کا قانون استعمال کرتے ہوئے تاروں کے درمیان میدان حاصل کرتے ہیں۔ اندرونی تار میں برقی رو I تصور کرتے ہوئے تاروں کے درمیان میدان $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت میں پیدا ہو گا۔ ذو برق اور خلاء کے سطح پر میدان عمودی ہے۔ مساوات 8.40

$$B_{n1} = B_{n2}$$

کے تحت دو ذو برق کے ملاپ پر مقناطیسی میدان کا عمودی جزو بے جوڑ ہوتا ہے۔ یوں ہم محوری تار میں ذو برق کی سرحد پر B_ϕ بے جوڑ ہو گا۔ یوں رداس ρ پر خلاء اور ذو برق میں یکساں B_ϕ پایا جائے گا۔ اس طرح خلاء میں $H_\phi = \frac{B_\phi}{\mu_0}$ ہو گا جبکہ ذو برق میں $H_\phi = \frac{B_\phi}{\mu_R \mu_0}$ ہو گا۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ایمپیئر کے قانون کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \frac{B_\phi}{\mu_R \mu_0} \frac{\pi}{2} \rho + \frac{B_\phi}{\mu_0} \frac{3\pi}{2} \rho = I$$

جس سے

$$\boldsymbol{B} = \frac{2\mu_0 I}{\pi \rho \left(\frac{1}{\mu_R} + 3 \right)} \boldsymbol{a}_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں فی میٹر لمبائی لیتے ہوئے دونوں تاروں کے درمیان مقناطیسی بہاو

$$\Phi = \int_0^1 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{2\mu_0 I}{\pi \rho \left(\frac{1}{\mu_R} + 3 \right)} \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}z = \frac{2\mu_0 I}{\pi \left(\frac{1}{\mu_R} + 3 \right)} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہو گا جس سے امالہ

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{2\mu_0}{\pi \left(\frac{1}{\mu_R} + 3 \right)} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 8.8: لا محدود لمبائی کی تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

حل: رداس ρ_1 کی تار کو z محدد پر تصور کرتے ہیں۔ تار میں کثافت برقی رو یکساں تصور کرتے ہوئے $J = \frac{I}{\pi\rho_1^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ رداس ρ پر گول دائرہ $\frac{I\rho^2}{\rho_1^2}$ برقی رو گھیرتا ہے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس دائرے پر زاویائی شدت $H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔ رداس ρ پر $\mathrm{d}\rho$ چوڑائی اور z_0 لمبائی کی مستطیل سطح سے

$$\mathrm{d}\Phi = B_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho = \mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho$$

بہاو گزرے گی۔ اگر تار کو متعدد باریک متوازی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جائے تو مندرجہ بالا تفرقی بہاو صفر ρ کے اندر تاروں کو گھیرتی ہے جو ایک چکر کا صرف $\frac{\rho^2}{\rho_1^2}$ حصہ ہیں لہٰذا یہ تفرقی بہاو صرف

$$\text{تفرقی ارتباط بہاو} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\,\mathrm{d}\Phi = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho_1^4}\rho^3 \,\mathrm{d}\rho$$

دیتی ہے۔ اگر تفرقی بہاو تمام فرضی باریک تاروں کو گھیرتی تب یہ ایک چکر شمار ہوتا۔ یوں تکمل سے اندرونی ارتباط بہاو

$$\text{ارتباط بہاو} = \int_0^{\rho_1} \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho_1^4}\rho^3 \,\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I z_0}{8\pi}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے اندرونی امالہ

$$L_{\text{اندرونی}} = \frac{\mu z_0}{8\pi}$$

یا فی میٹر امالہ

$$L_{\text{اندرونی فی میٹر}} = \frac{\mu}{8\pi} \tag{8.69}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 8.2: صفحہ 286 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

جوابات: تار کی لمبائی z_0 لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
I_{\text{گھیرا}} &= \left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right) I \\
H_\phi &= \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right) \\
\mathrm{d}\Phi &= \mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ تفرقی بہاو ایک چکر کے $\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}$ حصے کے گرد گھومتی ہے لہٰذا تفرقی ارتباط بہاو

$$\text{تفرقی ارتباط بہاو} = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right)^2 \mathrm{d}\rho$$

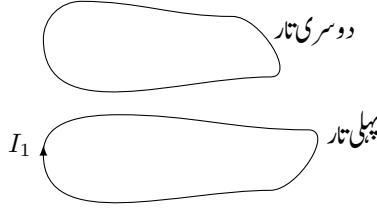
اور یوں $z_0 = 1$ پر کرتے ہوئے فی میٹر امالہ

$$L_{\text{بیرونی تار}} = \frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left(\rho_3^4 \ln\frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{8.70}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 8.69 ہی ہم محوری تار کے اندرونی تار کی امالہ دیتا ہے۔یوں کم تعدد پر مساوات 8.67، مساوات 8.69 اور مساوات 8.70 کا مجموعہ

$$L = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left(\rho_3^4 \ln\frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{8.71}$$

فی میٹر ہم محوری تار کا کل امالہ ہو گا۔جیسے اگلے بابوں میں بتلایا جائے گا، بلند تعدد پر تار میں کثافت برقی رو یکساں نہیں رہتی جس کی وجہ سے تار کی اندرونی امالہ قابل نظرانداز ہو جاتی ہے۔یوں بلند تعدد پر مساوات 8.67 ہی فی میٹر تار کی امالہ دے گا۔

شکل 8.11: مشترکہ امالہ۔

آپ امالہ کے مخفی توانائی

$$W = \frac{LI^2}{2} \tag{8.72}$$

سے بخوبی واقف ہیں جہاں مخفی توانائی مساوات 8.63، مساوات 8.64 یا مساوات 8.65 سے حاصل کی جا سکتی ہے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے امالہ یوں بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} L = \frac{2W}{I^2} &= \frac{1}{I^2} \int_h \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} \,\mathrm{d}h \\ &= \frac{1}{I^2} \int_h \mu H^2 \,\mathrm{d}h \\ &= \frac{1}{I^2} \int_h \frac{B^2}{\mu} \,\mathrm{d}h \end{aligned} \tag{8.73}$$

آپ سے مندرجہ بالا مساوات استعمال کرتے ہوئے، سوال 8.26 میں لامحدود لمبائی کی سیدھی تار کی امالہ اور سوال 8.27 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

8.11 مشترکہ امالہ

شکل 8.11 میں دو تار دکھائے گئے ہیں۔آئیں پہلی تار میں برقی رو I سے پیدا مقناطیسی بہاو کا وہ حصہ حاصل کریں جو دوسرے تار سے گزرتا ہے۔ان معلومات سے دونوں تاروں کے مابین **مشترکہ امالہ**[42] حاصل کیا جائے گا۔ خود امالہ حاصل کرنے کے طرز پر دوسرے تار سے گزرتی بہاو کو

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$$

[42] mutual inductance

لکھا جا سکتا ہے جہاں اندرونی تکمل پہلی تار پر ہے اور یہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان دیتا ہے جبکہ دوسری تکمل دوسرے تار پر ہے جس میں سے گزرتی بہاو کا حصول درکار ہے۔ مشترکہ امالہ M_{21} کی تعریف

$$M_{21}=\frac{\Phi_2}{I_1} \tag{8.74}$$

ہے جس سے

$$M_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\left(\oint\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \tag{8.75}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اگر دوسری تار میں برقی رو لی جاتی اور پہلی سے گزرتی بہاو حاصل کی جاتی تب

$$M_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\left(\oint\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2}{R}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \tag{8.76}$$

حاصل ہوتا۔ مندرجہ بالا دوگنا تکمل میں اندرونی تکمل دوسری راہ پر ہے جبکہ بیرونی تکمل پہلی راہ پر ہے۔ تکمل لینے کی ترتیب بدلتے ہوئے اگر پہلا تکمل پہلی راہ پر لیا جائے اور بعد میں دوسری راہ پر تکمل لیا جائے تو تکمل کی قیمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی لیکن ایسا کرنے سے ہمیں ہو بہو مساوات 8.75 ملتا ہے لہٰذا

$$M_{21}=M_{12} \tag{8.77}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کسی بھی دو لچھوں کے درمیان مشترکہ امالہ دونوں جانب سے برابر حاصل ہوتی ہے۔

سوالات

سوال 8.1: میدان $\boldsymbol{E} = 1.5\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ میں الیکٹران حرکت کرتا ہے۔لمحہ $t = 0$ پر الیکٹران نقطہ $(0,0,0)$ پر پایا جاتا ہے جبکہ اس کی سمتی رفتار $\boldsymbol{v} = 3 \times 10^5 \boldsymbol{a}_{\text{X}} \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔الیکٹران کا بار $-1.6 \times 10^{-19}\,\text{C}$ اور اس کی کمیت $3.1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$ ہے۔نیوٹن کے قوانین حرکت سے تفرقی مساوات لکھ کر اسے حل کرتے ہوئے لمحہ $t = 150\,\text{ns}$ پر الیکٹران کی سمتی رفتار، مقام اور حرکی توانائی دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{v} = 300\,000\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 116\,129\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $(0.045, 0, -3.48)$ ، $1.63 \times 10^{-20}\,\text{J}$

سوال 8.2: مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B} = 0.3\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 0.2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 0.4\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\text{T}$ میں لمحہ $t = 0$ پر الیکٹران کی سمتی رفتار $\boldsymbol{v} = 10^6 \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔الیکٹران پر قوت دریافت کریں۔ایسا برقی میدان حاصل کریں جس کی موجودگی میں مقناطیسی اور برقی میدان مل کر اس الیکٹران پر صفر قوت پیدا کرتے ہیں۔

جواب: $\boldsymbol{F} = -32\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 48\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\text{fN}$ ، $\boldsymbol{E} = -200\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 300\boldsymbol{a}_{\text{y}} \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 8.3: میدان $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\text{T}$ اور $\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ میں بار $1.2\,\mu\text{C}$ حرکت کر رہا ہے۔لمحہ $t = 0$ پر اس کی رفتار $\boldsymbol{v} = 10\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 30\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 20\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \, \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ہے۔یہ بار $5\,\mu\text{g}$ کے کمیت پر پایا جاتا ہے۔لمحہ $t = 0$ پر بار کی اسراع حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{a} = -16.8\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 2.4\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \, \frac{\text{Mm}}{\text{s}^2}$

سوال 8.4: محدد z پر پڑی لامحدود لمبائی کی تار میں $5\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\text{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔اس کے قریب سطح $x = 0$ پر موصل تار $N_1(0,1,0)$ ، $N_2(0,4,0)$ ، $N_3(0,4,2)$ اور $N_4(0,1,2)$ نقطوں کو جوڑ کر مستطیل بناتی ہے جس میں N_1 سے N_2 جانب $2\,\text{A}$ برقی رو چکر لگا رہی ہے۔چکور کے چاروں اطراف پر قوت دریافت کرتے ہوئے پورے چکور پر قوت حاصل کریں۔

جوابات: تار $N_1(0,1,0)$ تا $N_2(0,4,0)$ پر قوت $2.77\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\mu\text{N}$ ہے۔یہاں سے گھڑی کے الٹ سمت چلتے ہوئے بقایا قوت $-1\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\mu\text{N}$ ، $-2.77\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\mu\text{N}$ اور $4\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\mu\text{N}$ ہیں۔یوں مستطیل پر کل قوت $3\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\mu\text{N}$ ہے۔

سوال 8.5: محدد z پر پڑی لامحدود لمبائی کی تار میں $10\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\text{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔اس کے قریب نقطہ $N_1(2,1,3)$ سے $N_2(5,4,7)$ تک سیدھی موصل تار میں N_1 سے N_2 جانب $4\,\text{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔چھوٹی تار پر قوت حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{F} = -6.74\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 4.49\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 8.42\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\mu\text{N}$

سوال 8.6: سطح $x = 0$ پر مقناطیسی میدان کا z جزو $B_z = \frac{200}{z^2+1}\,\mu\text{T}$ پایا جاتا ہے۔اس مقناطیسی جزو سے خطہ $1 < y < 3$ ، $-\infty < z < \infty$ میں کثافت $\boldsymbol{K} = 0.2\boldsymbol{a}_{\text{y}}\frac{\text{A}}{\text{m}}$ پر قوت حاصل کریں۔

جواب: $251\boldsymbol{a}_{\text{X}}\,\mu\text{N}$

سوال 8.7: z محدد پر پڑی لامحدود لمبائی کی تار میں $2.2\,\text{A}$ برقی رو پائی جاتی ہے۔سطح $y = 0$ پر خطہ $1\,\text{mm} < x < 5\,\text{mm}$ پر $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ سمت میں کل $8\,\text{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔اس خطے کی فی میٹر لمبائی پر مقناطیسی قوت حاصل کریں۔محدد z پر پڑی تار پر بھی فی میٹر قوت حاصل کریں۔

جواب: $-1.4\boldsymbol{a}_{\text{X}}\,\text{mN}$ ، $1.4\boldsymbol{a}_{\text{X}}\,\text{mN}$

سوال 8.8: محدد z پر پڑی لامحدود لمبائی کی تار میں I_1 برقی رو $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ جانب گزر رہی ہے۔اس کے قریب سطح $z = 0$ پر تار $y = a$ ، $-b < x < b$ میں I_2 برقی رو $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ سمت میں گزر رہی ہے۔نقطہ $(0,0,0)$ کو محور لیتے ہوئے چھوٹی تار پر قوت مروڑ حاصل کریں۔صفحہ 367 پر شکل 8.6 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔

جواب: $-\frac{I_1 I_2 \mu_0}{\pi}\left(b - a\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\text{N}\,\text{m}$

سوال 8.9: موصل تار نقطہ $N_1(2,0,0)$ ، $N_2(5,0,0)$ ، $N_3(5,0,4)$ اور $N_4(2,0,4)$ کو جوڑ کر مستطیل بناتی ہے۔مثبت y محدد کی جانب سے دیکھتے ہوئے، اس مستطیل میں $6\,\text{A}$ برقی رو سمت گھڑی گھوم رہی ہے۔الف) یکساں میدان $\boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{a}_{\text{X}}\,\text{T}$ کی صورت میں z محدد کو محور لیتے ہوئے مستطیل کے چاروں اطراف پر علیحدہ علیحدہ قوت مروڑ حاصل کرتے ہوئے کل قوت مروڑ حاصل کریں۔ب) سطح $y = 0$ پر لکیر $x = 3$ کو محور لیتے ہوئے اسی یکساں میدان میں دوبارہ قوت مروڑ حاصل کریں۔

جوابات:(الف) اور (ب): مستطیل کے چار حصوں پر قوت مروڑ 0 ، $600\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\text{N}\,\text{m}$ ، 0 اور $-240\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\text{N}\,\text{m}$ ہے۔یوں کل قوت مروڑ $360\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\text{N}\,\text{m}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 8.10: سوال 8.9 میں میدان یکساں ہے لہٰذا اس میں محور کا قوت مروڑ پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ایسی صورت میں قوت مروڑ صفحہ 366 پر دئے مساوات 8.23 کی مدد سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ایسا ہی کریں۔

جواب: $360\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\text{N}\,\text{m}$

سوال 8.11: سوال 8.9 میں یکساں میدان کی جگہ اگر z محدد پر لامحدود لمبائی کی تار میں $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ جانب $25\,\text{A}$ برقی رو میدان پیدا کرے تب محدد کے مبدا $(0,0,0)$ کو محور لیتے ہوئے قوت مروڑ حاصل کریں۔یاد رہے کہ یہ میدان غیر یکساں ہے لہٰذا مساوات 8.23 قابل استعمال نہیں ہے۔

جواب: مستطیل کے چار حصوں پر قوت مروڑ $-90\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\mu\text{N}\,\text{m}$ ، $-48\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\mu\text{N}\,\text{m}$ ، $90\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\mu\text{N}\,\text{m}$ اور $120\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\mu\text{N}\,\text{m}$ ہے جس سے کل قوت مروڑ $72\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\mu\text{N}\,\text{m}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 8.12: دو سنٹی میٹر رداس اور پانچ سو چکر کے پیچ دار لچھے میں $3\,\text{A}$ کی برقی رو گزر رہی ہے۔یہ لچھا $1.5\,\text{T}$ کے میدان میں پایا جاتا ہے۔میدان اور لچھے کے محور آپس میں عمودی ہیں۔ لچھے پر قوت مروڑ حاصل کریں۔

جواب: $2.83\,\text{N}\,\text{m}$

سوال 8.13: ایک مادہ میدان $\boldsymbol{B} = 0.15z\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\text{T}$ میں پایا جاتا ہے۔اس مادے کی $\chi = 2.5$ ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ μ_R ، $\boldsymbol{H}$ ، $\boldsymbol{M}$ ، $\boldsymbol{J}$ ، $\boldsymbol{J}_m$ اور $\boldsymbol{J}_T$ حاصل کریں۔

جوابات: $\mu_R = 3.5$ ، $\boldsymbol{H} = 34.1z\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{kA}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{M} = 85.3z\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{kA}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{J} = -34.1\boldsymbol{a}_{\text{x}}\,\frac{\text{kA}}{\text{m}^2}$ ، $\boldsymbol{J}_m = -85.3\boldsymbol{a}_{\text{x}}\,\frac{\text{kA}}{\text{m}^2}$ اور $\boldsymbol{J}_T = -119\boldsymbol{a}_{\text{x}}\,\frac{\text{kA}}{\text{m}^2}$

سوال 8.14: مندرجہ ذیل مادوں میں $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔ الف) جزوی مقناطیسی مستقل $\mu_R = 2.2$ ، ایٹم کی تعددی کثافت 1.5×10^{29} ایٹم فی مکعب میٹر جبکہ ہر ایٹم کا مقناطیسی جفت قطب $1.9 \times 10^{-30}\boldsymbol{a}_{\text{x}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ ہے۔ ب)مادہ میں $\boldsymbol{M} = 160\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ اور اس کا مقناطیسی مستقل $\mu = 2.25\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ہے۔ پ) مادے کا $\chi_m = 0.65$ ہے جبکہ $\boldsymbol{B} = 1.7\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\text{T}$ ہے۔ ت) مساوات $\oint \boldsymbol{M} \cdot \text{d}\boldsymbol{L} = I_m$ کا استعمال کرتے ہوئے ایسے خطے میں $\boldsymbol{M}$ حاصل کریں جس میں نلکی سطح $\rho = 0.5\,\text{m}$ پر $5\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ اور نلکی سطح $\rho = 2.5\,\text{m}$ پر $-1\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ کثافت برقی رو پائی جاتی ہو۔

جوابات: $0.24\boldsymbol{a}_{\text{x}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $202\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $820\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{kA}}{\text{m}}$ ، $\rho < 0.5\,\text{m}$ اور $\rho > 1\,\text{m}$ خطوں میں $\boldsymbol{M} = 0$ ہے جبکہ $0.5 < \rho < 2.5$ میں $\boldsymbol{M} = \frac{2.5}{\rho}\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ہو گا۔

سوال 8.15: مندرجہ ذیل صورتوں میں مقناطیسیت M کی قیمت حاصل کریں۔ الف) میدان $B = 0.015\,\mathrm{T}$ اور $\chi_m = 0.002$ ہیں۔ ب) مقناطیسی شدت $H = 1600\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ جبکہ مقناطیسی جزوی مستقل $\mu_R = 1.004$ ہے۔ پ) ایٹم کی تعدادی کثافت 6.5×10^{28} ایٹم فی مکعب میٹر ہے جبکہ ایک ایٹم کی مقناطیسی جفت قطب 3×10^{-30} ہے۔ تمام جفت قطب ایک ہی سمت میں ہیں۔

جوابات: $M = 23.8\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $6.4\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $0.195\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$

سوال 8.16: خطہ-1 کو مساوات $2x^2 + 3y - 4xz < 3$ ظاہر کرتی ہے جبکہ اس کی دوسری جانب خطہ-2 پایا جاتا ہے۔ان کے جزوی مقناطیسی مستقل $\mu_{R1} = 1$ اور $\mu_{R2} = 2.2$ ہیں۔نقطہ $N(2,1,1)$ پر پہلے خطے سے دوسرے خطے کی جانب اکائی سمتیہ حاصل کریں۔اس نقطے پر پہلے خطے میں میدان $\boldsymbol{H} = 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 10\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔دونوں خطوں میں اس نقطے پر میدان کے عمودی اور متوازی اجزاء حاصل کریں۔سرحد کے عمود کے ساتھ دونوں خطوں میں میدان کا زاویہ حاصل کریں۔

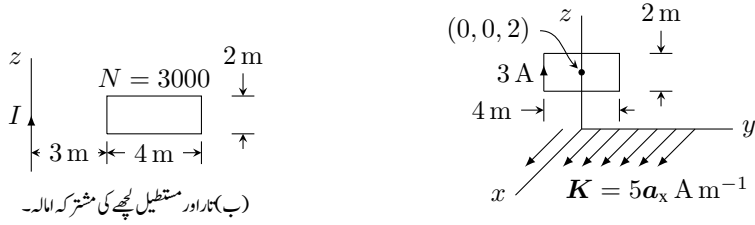
جوابات: $\boldsymbol{a}_N = 0.42\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 0.32\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 0.85\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{H}_{n1} = 5.6\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 4.2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 11.2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{H}_{m1} = 9.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 9.2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1.2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{H}_{m2} = 9.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 9.2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1.2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{H}_{n2} = 2.6\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 1.9\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5.1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{H}_2 = 11.9\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 7.3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 3.9\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\theta_1 = 44.9^\circ$ ، $\theta_2 = 65.5^\circ$

سوال 8.17: $0 > z$ کو خطہ-الف، $2 > z > 0$ کو خطہ-ب، $3 > z > 2$ کو خطہ-پ جبکہ $z > 3$ کو خطہ-ت تصور کریں۔خطہ-الف اور خطہ-ت خلاء ہیں۔خطہ-ب کا $\mu_R = 2.5$ جبکہ خطہ-پ کا $\mu_R = 1.5$ ہے۔خطہ-الف میں میدان $\boldsymbol{H}_1 = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ پایا جاتا ہے۔خطہ-الف، ب، پ اور ت میں میدان اور z محدد کے مابین زاویے حاصل کریں۔

جوابات: 35.8° ، 61° ، 47.2° ، 35.8°

سوال 8.18: ایک لمبے پیچ دار لچھے کا رداس $5\,\mathrm{cm}$ اور فی میٹر چکر 4000 ہیں۔لچھے میں $100\,\mathrm{mA}$ برقی رو گزر رہی ہے۔خطہ $\rho < a$ کا $\mu_R = 2.5$ ہے جبکہ بقایا خطے کا $\mu_R = 4.5$ ہے۔الف) لچھے میں کل مقناطیسی بہاو $10\,\mathrm{\mu Wb}$ ہونے کی صورت میں a کی قیمت حاصل کریں۔ ب) دونوں خطوں میں برابر مقناطیسی بہاو کی صورت میں a کی قیمت اور کل بہاو حاصل کریں۔

جوابات: $4.96\,\mathrm{cm}$ ، $4\,\mathrm{cm}$ ، $12.7\,\mathrm{\mu Wb}$

(ب) تار اور مستطیل لچھے کی مشترکہ امالہ۔

(ا) سطحی کثافت برقی رو کے میدان میں بند دائرے پر قوت مروڑ۔

شکل 8.12: سوال 8.19 اور سوال 8.23 کے اشکال۔

سوال 8.19: شکل 8.12-الف میں $z=0$ سطح پر سطحی کثافت برقی رو $5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے۔ سطح $x=0$ پر مستطیل دائرے میں $3\,\mathrm{A}$ کی برقی رو گزر رہی ہے۔ محور کو $(0,0,2)$ اور $(0,0,\,)$ لیتے ہوئے تار پر قوت مروڑ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{T}=75.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{\mu N\,m}$ ، $\boldsymbol{T}=75.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{\mu N\,m}$

سوال 8.20: رداس $5\,\mathrm{cm}$ کے لمبے پیچدار لچھے میں فی میٹر 8000 چکر پائے جاتے ہیں۔ لچھے میں $1.2\,\mathrm{mA}$ برقی رو گزر رہی ہے۔ فی میٹر لچھے میں توانائی W حاصل کریں۔ مساوات $W=\frac{LI^2}{2}$ استعمال کرتے ہوئے فی میٹر لچھے کی امالہ حاصل کریں۔

جوابات: $0.45\,\frac{\mathrm{\mu J}}{\mathrm{m}}$ ، $0.631\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$

سوال 8.21: دو لامحدود لمبائی کے چادر متوازی پڑے ہیں۔ ان چادروں پر کثافت برقی رو $150\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ اور $-150\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ چادروں کے درمیان لمبا پیچدار لچھا پایا جاتا ہے۔ اس لچھے پر 5000 چکر فی میٹر پائے جاتے ہیں جبکہ اس میں $6\,\mathrm{mA}$ برقی رو گزر رہی ہے۔ لچھے کا رداس $8\,\mathrm{cm}$ ہے اور اس کا محور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں ہے۔ مندرجہ ذیل صورتوں میں لچھے کی فی میٹر لمبائی میں کل توانائی حاصل کریں۔ الف) صرف چادروں میں کثافت برقی رو پائی جاتی ہے۔ ب) صرف لچھے میں برقی رو پائی جاتی ہے۔ پ) چادروں میں کثافت برقی رو اور لچھے میں برقی رو پائی جاتی ہے۔

جوابات: $284\,\mathrm{\mu J}$ ، $11.4\,\mathrm{\mu J}$ ، $296\,\mathrm{\mu J}$

سوال 8.22: سطح $x=0$ اور $x=d$ پر بالترتیب $K\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ اور $-K\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ کثافت برقی رو پائی جاتی ہے۔ سطحوں کے درمیان مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔ چادروں کے درمیان خطہ $0<y<w$ ،

$0 < z < z_0$ میں توانائی W حاصل کریں۔ مساوات $W = \frac{LI^2}{2}$ استعمال کرتے ہوئے $0 < y < w$ چوڑائی کی فی میٹر امالہ حاصل کریں جہاں I کسی ایک چادر کے $0 < y < w$ چوڑائی میں کل برقی رو ہے۔ سطح $y = 0$ پر چادروں کے درمیان خطہ $0 < z < z0$ سے گزرتی کل مقناطیسی بہاو ϕ حاصل کریں۔ مساوات $\phi = LI$ استعمال کرتے ہوئے فی میٹر امالہ حاصل کریں۔

جوابات: $Ka_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $W = \frac{\mu_0}{2} dK^2 w z_0\,\mathrm{J}$ ، $L = \frac{\mu_0 d}{w}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ ، $\phi = \mu_0 K d z_0$ ، $L = \frac{\mu_0 d}{w}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$

سوال 8.23: شکل 8.12-ب میں z محدد پر پڑی لامحدود لمبائی کی تار میں برقی رو I گزر رہی ہے۔ تار کے میدان میں 3000 چکر کا مستطیل لچھا پایا جاتا ہے۔ ان کا مشترکہ امالہ حاصل کریں۔ اگر مستطیل کو تین میٹر کے بجائے $3\,\mathrm{mm}$ فاصلے پر رکھا جائے تب مشترکہ امالہ کیا حاصل ہو گا۔

جواب: $1.02\,\mathrm{mH}$ ، $8.6\,\mathrm{mH}$

سوال 8.24: محدد z پر لامحدود لمبائی کی تار پائی جاتی ہے۔ سطح $x = 0$ پر ایک چکر کا مربع لچھا پایا جاتا ہے جس کا ایک طرف z محدد کے متوازی اور اس سے $1\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہے۔ مربع کے اطراف $2\,\mathrm{m}$ لمبے ہیں۔ تار اور لچھے کے مابین مشترکہ امالہ M حاصل کریں۔ اگر لچھے کو $x = 0$ سطح میں رکھتے ہوئے، $45°$ گھمایا جائے تب مشترکہ امالہ کیا ہو گا۔

جوابات: $0.439\,\mathrm{\mu H}$ ، $0.443\,\mathrm{\mu H}$

سوال 8.25: صفحہ 286 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس ہم محوری تار کے اندرونی تار میں برقی رو صفر کے برابر ہے جبکہ بیرونی تار میں برقی رو I کے برابر ہے۔ بیرونی تار کی فی میٹر اندرونی امالہ مثال 8.2 کی طرز پر حاصل کریں۔

جواب: $\frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left[\rho_2^4 \ln\frac{\rho_3}{\rho_2} + \frac{\rho_3^4-\rho_2^4}{4} - \rho_2^2\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)\right]$

سوال 8.26: لامحدود لمبائی کی سیدھی تار کی امالہ مساوات 8.73 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 8.27: صفحہ 388 پر مثال 8.2 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کی گئی۔ اسی کو دوبارہ مساوات 8.73 کی مدد سے حاصل کریں۔

جواب: بیرونی تار میں $H = \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right)$ استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

باب 9

وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل مساوات

گزشتہ ابواب میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے میدانوں پر غور کیا گیا۔بقایا کتاب میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں پر غور کیا جائے گا۔

اس باب میں دو نئے اصولوں پر غور کیا جائے گا۔پہلا اصول مائکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔دوسرا قانون جیمس کلارک میکس ویل کے کاوشوں سے حاصل ہوا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اس باب میں برقناطیسیت کے چار ایسی مساوات پیش کی جائیں گے جو **میکس ویل مساوات** کہلاتی ہیں۔

9.1 فیراڈے کا قانون

جناب مائکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا کہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان پیدا کرتا ہے۔**قانون فیراڈے**[1] کو مندرجہ ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$\text{محرک برقی دباو} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{9.1}$$

اس قانون کے تحت کسی بھی سطح سے گزرتے مقناطیسی بہاو کی قیمت میں تبدیلی، اس سطح کے محیط پر برقی دباو پیدا کرتا ہے۔ایسا برقی دباو روایتی طور پر **محرک برقی دباو**[2] کہلاتا ہے۔کسی بھی سطح کے محیط پر محرک برقی دباو[3] کی قیمت، اس

[1] Faraday's law
[2] electromotive force, emf
[3] محرک برقی دباو کی اصطلاح روایتی طور پر ہر قسم کے منبع برقی دباو کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔

سطح سے گزرتے مقناطیسی بہاو کی قیمت میں تبدیلی کی شرح کے برابر ہوتی ہے۔ محرک برقی دباو کی اکائی وولٹ V ہے۔ سطح کے محیط کو بند دائرہ تصور کرتے ہوئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی بند دائرے پر محرک برقی دباو کی قیمت اس دائرے کے اندر سے گزرتے مقناطیسی بہاو کی قیمت میں تبدیلی کی شرح کے برابر ہو گی۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ بند دائرہ فرضی لکیر بھی ہو سکتا ہے۔

ابتدائی مقناطیسی بہاو میں تبدیلی، محرک برقی دباو پیدا کرتی ہے۔ محرک برقی دباو مکمل برقی دور میں برقی رو پیدا کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ محرک برقی دباو سے پیدا برقی رو، بند دائرے میں ثانوی مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی۔ ثانوی مقناطیسی بہاو، ابتدائی مقناطیسی بہاو میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ مساوات 9.1 میں منفی کی علامت اسی اصول کو بیان کرتی ہے، یعنی کہ، بند دائرے میں محرک برقی دباو سے پیدا برقی رو، پہلے سے موجود مقناطیسی بہاو میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ یہ اصول لینز[54] کا اصول پکارا جاتا ہے۔

کسی بھی بند دائرے سے گزرتی مقناطیسی بہاو میں تبدیلی مندرجہ ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہے۔

- مقناطیسی بہاو کی کثافت میں تبدیلی،
- ساکن مقناطیسی میدان اور بند دائرے کا آپس میں اضافی حرکت، یا
- مندرجہ بالا دونوں وجوہات۔

اگر بند دائرہ N چکر کے لچھے پر مشتمل ہو جہاں ہر چکر میں سے Φ مقناطیسی بہاو گزرتی ہو تب فیراڈے کے قانون کو

$$\text{محرک برقی دباو} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{9.2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

برقی دباو کے طرز پر محرک برقی دباو کی تعریف

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.3}$$

---

[4] یہ قانون 1834 میں جناب لینز نے پیش کیا۔
Lenz's law[5]

لکھی جاتی ہے جہاں تکمل پورے بند دائرے پر لینا لازم ہے۔ برقی دباو کی تعریف کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے ہم مندرجہ بالا مساوات میں منفی کی علامت $(-)$ لگانا بھول گئے ہیں۔ایسا بالکل نہیں ہے اور اس کی وضاحت جلد شکل 9.2 کی مدد سے کر دی جائے گی۔ محرک برقی دباو بند دائرے پر بیان کی جاتی ہے۔ صفحہ 148 پر مساوات 4.28 کے تحت کسی بھی بند دائرے پر ساکن برقی میدان $\boldsymbol{E}$ کا لکیری تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے۔ مساوات 9.3 کہتی ہے کہ غیر ساکن مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہوتا اور کسی بھی بند دائرے پر $\boldsymbol{E}$ کا لکیری تکمل اس دائرے پر پیدا محرک برقی دباو دیتا ہے۔

مساوات 9.1 اور مساوات 9.3 سے

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.4}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں Φ کی جگہ کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ کا سطحی تکمل استعمال کیا گیا۔

مندرجہ بالا مساوات میں ایک جانب سطح S کے محیط پر لکیری تکمل اور دوسری جانب اسی سطح پر سطحی تکمل لیا گیا ہے۔ کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں جیسے کتاب کے اس صفحے کی بالائی سطح اور اس کی نچلی سطح۔ یوں ہر سطحی تکمل کے دو ممکنہ جواب ہیں۔اسی طرح کسی بھی سطح کے محیط پر لکیری تکمل یا تو سطح کے گرد، گھڑی کی سوئیوں کی گھومنے، کی رخ میں اور یا اس کی الٹ رخ گھوم کر لی جا سکتی ہے۔ یہاں ذرا رک کر، کسی بھی سطح پر سطحی تکمل اور اس کے محیط پر لکیری تکمل کی درست سمت کا تعین **دائیں ہاتھ کے قانون**[6] سے کرتے ہیں۔

کرہ کی مانند مکمل بند سطح[7] کی بیرونی سطح کو مثبت سطح تصور کیا جاتا ہے۔ مکمل بند سطح کا کوئی محیط نہیں ہوتا۔اس کے برعکس **کھلی سطح**[8] پر تکمل لیتے ہوئے مسئلے کے مطابقت سے مثبت سطح چنی جاتی ہے۔ایسی سطح کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑیں کہ ہاتھ کی انگلیاں محیط کے گرد لپٹی ہوں اور انگوٹھا سطح کی مثبت سمت میں ہو۔انگلیوں کے لپٹنے کی سمت ہی سطح کے گرد مثبت سمت ہے۔ یوں محیط پر لکیری تکمل، محیط کے گرد انگلیوں کے لپٹنے کی سمت میں حاصل کی جائے گی۔

مندرجہ بالا مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی سمتی سطح سے گزرتا مقناطیسی بہاو اگر بڑھ رہا ہو تب محرک برقی دباو سطح کے محیط پر منفی جانب برقی رو پیدا کرے گا۔ مساوات 9.4 استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کا قانون یاد رکھیں جو آپ کو محرک دباو کی صحیح سمت دے گا۔

---

[6] right hand rule
[7] closed surface
[8] open surface

آئیں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی وجہ سے پیدا ساکن بند دائرے میں محرک برقی دباو پر پہلے غور کریں اور بعد میں ساکن مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے دائرے کی وجہ سے پیدا محرک برقی دباو پر غور کریں۔

ساکن دائرے کی صورت میں مساوات 9.4 میں دائیں ہاتھ S ساکن ہے جبکہ $\boldsymbol{B}$ وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہی ہے یوں اس مساوات میں تفرق کے عمل کو تکمل کے اندر لے جایا جا سکتا ہے یعنی

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.5}$$

آگے بڑھنے سے پہلے اس مساوات کی نقطہ شکل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.6}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 9.5 میں بائیں جانب محیط پر لکیری تکمل لی گئی ہے جبکہ دائیں جانب سطحی تکمل لی گئی ہے۔ فرض کریں کہ کسی سطح کا محیط مستطیل شکل کا ہو۔ اس مستطیل پر ربڑ کی جھلی چسپاں کرتے ہیں۔ یہ جھلی ایک ممکنہ سطح ہے جس پر سطحی تکمل لی جا سکتی ہے۔ اب جھلی کو کسی درمیانے نقطے سے اگر کھینچا جائے تو سطح کی صورت تبدیل ہو جائے گی جبکہ اس کا محیط تبدیل نہیں ہو گا۔ آپ مختلف نقطوں سے جھلی کو کھینچ کر یا دبا کر مختلف سطحیں پیدا کر سکتے ہیں۔ ایسی تمام سطحوں کا محیط وہی مستطیل ہو گا۔ مساوات 9.5 میں دائیں جانب ایسی تمام سطحوں پر سطحی تکمل، بائیں جانب محیط پر لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔ اب چونکہ محیط تبدیل نہیں ہوا لہٰذا ایسی تمام سطحوں پر سطحی تکمل برابر ہوں گے۔

مساوات 9.5 سے مساوات 9.6 حاصل کرتے ہوئے یاد رہے کہ ان مساوات میں سطح کا محیط تبدیل نہیں کیا جا رہا۔ یوں مساوات 9.6 میں دونوں جانب کے سطحوں کا محیط ایک ہونا چاہیے جبکہ سطحیں از خود مختلف ہو سکتی ہیں۔ چونکہ یہ مساوات کسی بھی سطح کے لئے درست ہے لہٰذا یہ تفرقی سطح $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے لئے بھی درست ہے۔ تفرقی سطح کے لئے اسے یوں

$$(\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 9.7 میکس ویل کی چار مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہے۔یہ میکس ویل کی پہلی مساوات کی نقطہ شکل ہے۔اس مساوات کی نقطہ شکل ہی عموماً استعمال ہوتی ہے۔میکس ویل کی پہلی مساوات کی تکمل شکل مساوات 9.5 بیان کرتی ہے۔وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی صورت میں مساوات 9.7 اور مساوات 9.5 ساکن میدان کی مساوات کی صورت اختیار کرتی ہے یعنی

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0 \qquad (\text{برقی سکون}) \tag{9.8}$$

اور

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad (\text{برقی سکون})$$

آئیں مساوات 9.5 اور مساوات 9.7 کو استعمال کر کے دیکھیں۔تصور کریں کہ $\rho < \rho_2$ نلکی خطے میں وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتی

$$\boldsymbol{B} = B_0 e^{kt}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \qquad (\rho < \rho_2) \tag{9.9}$$

کثافت مقناطیسی بہاو پائی جاتی ہے جہاں B_0 ایک مستقل ہے۔ ہم $z = 0$ سطح پر ρ_1 رداس کا گول دائرہ لیتے ہیں۔مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس پورے دائرے پر E_ϕ کی قیمت تبدیل نہیں ہو سکتی لہٰذا مساوات 9.5 سے

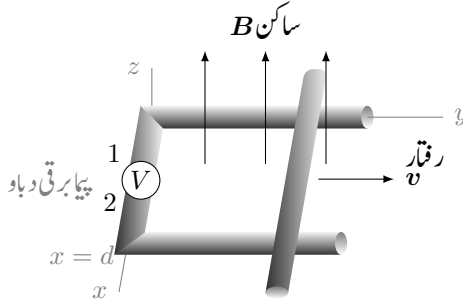
$$\text{محرک برقی دباو} = 2\pi\rho_1 E_\phi = -kB_0 e^{kt}\pi\rho_1^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی رداس پر برقی میدان کی شدت

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{2}kB_0 e^{kt}\rho\boldsymbol{a}_\phi \tag{9.10}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

آئیں اب یہی جواب مساوات 9.7 سے حاصل کریں۔چونکہ اس مساوات کے دائیں جانب صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جزو پایا جاتا ہے لہٰذا بائیں ہاتھ بھی صرف یہی جزو ہو گا لہٰذا اس مساوات سے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} = -kB_0 e^{kt}$$

شکل 9.1: وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے یکساں مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے موصل سلاخ پر محرک برقی دباو پیدا ہوتی ہے۔

لکھا جا سکتا ہے۔ دونوں اطراف کو ρ سے ضرب دیتے ہوئے 0 تا ρ تکمل لے کر

$$\rho E_\phi = -kB_0 e^{kt}\frac{\rho^2}{2}$$

یعنی

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{2}kB_0 e^{kt}\rho \boldsymbol{a}_\phi \tag{9.11}$$

ہی دوبارہ حاصل ہوتا ہے جہاں رداسی تکمل میں t مستقل کا کردار ادا کرتا ہے۔

مثبت B_0 کی صورت میں اس دائرے پر $\boldsymbol{a}_\phi$ کی الٹ سمت میں برقی رو گزرے گی جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی الٹ سمت میں کثافت مقناطیسی بہاو پیدا کرتے ہوئے پہلے سے موجود مقناطیسی میدان میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔

اس مثال کے آخر میں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 9.9 میں دیا گیا میدان غیر حقیقی ہے چونکہ یہ میکس ویل کی دیگر مساوات پر پورا نہیں اترتا۔ آپ سے سوال 9.18 میں گزارش کی گئی ہے کہ اس حقیقت کو ثابت کریں۔

آئیں اب ایسی مثال دیکھیں جس میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے مقناطیسی میدان میں بند دائرہ حرکت کر رہا ہو۔ شکل 9.1 میں ایسی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں v سمتی رفتار کو ظاہر کرتی ہے جبکہ **پیما برقی دباو**[9] کو V سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس شکل میں دو افقی اور دو متوازی موصل سلاخ بند دائرہ یا بند دور بناتے ہیں۔ متوازی افقی سلاخوں کو بائیں طرف عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے جس میں قابل نظر انداز جسامت اور لامحدود مزاحمت والا

[9] voltmeter

پیا برقی دباو نسب ہے، جبکہ دائیں جانب انہیں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے۔وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا اور ہر جگہ یکساں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ بند دائرے کی گھیری سطح کے عمودی ہے۔

مثبت $\boldsymbol{B}$ کی صورت میں $\boldsymbol{B}$ کی سمت ہی بند دائرے سے گھیری گئی سطح کی سمت ہو گی اور بند دائرے کی سمت گھڑی کے الٹ ہو گی۔یوں دائرے کی مثبت سمت میں دائیں ہاتھ کی انگلیاں رکھتے ہوئے گھیری سطح کی سمت انگوٹھے سے حاصل کی جاتی ہے۔

کسی بھی لمحہ t پر حرکت کرتے سلاخ کے مقام کو y سے ظاہر کرتے ہوئے ہم $y = vt$ لکھ سکتے ہیں جہاں v سلاخ کی رفتار کی قیمت ہے۔یوں لمحہ t پر بند دور کا ارتباط بہاو

$$\Phi = Bdy = Bdvt$$

ہو گا جو مساوات 9.1 کے تحت بند دور میں

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Bdv$$

محرک برقی دباو e پیدا کرے گا۔

اب محرک برقی دباو $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو کہتے ہیں لہٰذا مندرجہ بالا جواب دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں اس بند لکیری تکمل سے بھی حاصل ہونا چاہیے۔ہم دیکھ چکے ہیں کہ برقی سکون کی صورت میں موصل کی سطح پر سطح کے متوازی E صفر رہتی ہے۔ہم آگے دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان میں بھی موصل کی سطح پر متوازی E صفر ہی رہتی ہے۔یوں شکل 9.1 پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تمام سلاخوں پر تکمل کی قیمت صفر کے برابر ہو گی۔پیا برقی دباو کی مزاحمت صفر نہیں ہے لہٰذا تکمل کی قیمت پیا برقی دباو پر مندرجہ بالا قیمت کے برابر ہونا ہو گا۔گھڑی کی الٹ سمت چلتے ہوئے پیا برقی دباو کی لمبائی کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -Bdv$ ہونا ہو گا۔چونکہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}L\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{E}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کے الٹ ہو گی۔یوں پیا برقی دباو پر $\boldsymbol{E}$ کی سمت پیا کے دوسرے سرے سے پہلے سرے کی جانب ہے اور پیا پر برقی دباو کا مثبت سرا پیا کا دوسرا سرا ہے۔

پیا کی جگہ مزاحمت جوڑنے سے دور میں گھڑی کے الٹ برقی رو گزرے گی جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے الٹ سمت میں مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی۔یہ لورنز کے قانون کے عین مطابق ہے۔

آئیں اب اسی شکل میں دئے مسئلے کو حرکی برقی دباو تصور کرتے ہوئے حل کریں۔مقناطیسی میدان میں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے بار Q پر قوت

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

یا حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$

$$\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{9.12}$$

عمل کرتی ہے۔حرکی شدت $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ سمت میں ہے۔حرکت کرتے سلاخ میں ساکن مثبت ایٹم اور آزاد منفی الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ان تمام باروں پر ایسی قوت پائی جائے گی البتہ ساکن ایٹم مقید ہونے کی بنا حرکت نہیں کریں گے۔اگر محرک سلاخ کو متوازی سلاخوں سے اٹھایا جائے تو اس میں آزاد الیکٹران پر $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ کے الٹ جانب قوت انہیں سلاخ کے پرلے سرے پر انبار کرنا شروع کر دے گی۔الیکٹرانوں کا انبار سلاخ میں $-\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ جانب برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{ساکن}}$ پیدا کرے گا۔الیکٹران کا انبار بڑھتا رہے گا حتیٰ کہ $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ اور $\boldsymbol{E}_{\text{ساکن}}$ برابر ہو جائیں۔ایسا ہوتے ہی سلاخ میں کل برقی میدان کی شدت صفر ہو جائے گی اور اس میں بار کی حرکت رک جائے گی۔

یوں حرکی برقی دباو

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.13}$$

سے حاصل ہو گی۔مساوات کے دائیں ہاتھ بند دائرے کے ساکن حصوں پر تکمل کی قیمت صفر ہو گی لہٰذا محرک برقی دباو صرف حرکت کرتے حصوں کی وجہ سے پیدا ہو گی۔یوں حرکت کرتے سلاخ پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تکمل سے

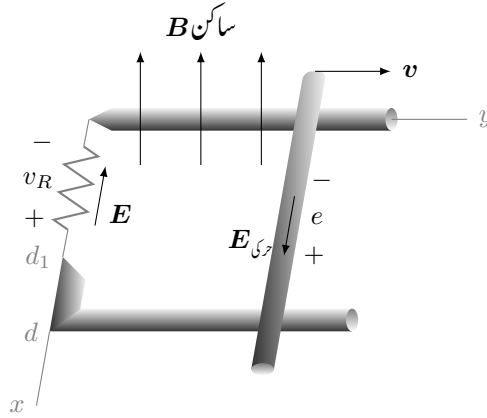
$$\oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_d^0 vB \,\mathrm{d}x = -Bvd$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ B از خود وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو رہا لہٰذا یہی کل محرک برقی دباو ہو گا۔

یوں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے بند دائرے میں محرک برقی دباو حاصل کرتے وقت حرکت کرتے حصوں پر حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ کے استعمال سے محرک برقی دباو یوں

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.14}$$

حاصل کی جا سکتی ہے۔البتہ وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان میں محرک برقی دباو کے حصول میں مساوات 9.5 کا حصہ شامل کرنا ضروری ہے یوں محرک برقی دباو

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.15}$$

شکل 9.2: محرک برقی دباو اور برقی دباو کا موازنہ۔

سے حاصل ہو گی۔ یہ مساوات دراصل مساوات 9.1

$$\text{محرک برقی دباو} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

ہی ہے۔

آئیں شکل 9.1 میں پیما برقی دباو کی جگہ مزاحمت نسب کرتے ہوئے اس کی مدد سے مساوات 9.3 جو محرک برقی دباو کی تعریف بیان کرتا ہے پر دوبارہ غور کریں۔ نئی شکل کو شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 9.12 محرک سلاخ پر پیدا $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ دیتی ہے جو سلاخ میں مثبت بار کو سلاخ کے اُرلے سرے کی طرف دھکیلے گا۔ اس کے برعکس مزاحمت پر برقی دباو v_R پایا جاتا ہے جس کی وجہ سے اس میں برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ پائی جائے گی جو مزاحمت میں مثبت بار کو مزاحمت کے پرلے سرے کی جانب دھکیلے گی۔

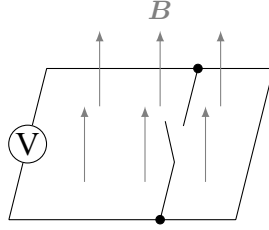
آپ شکل کو دیکھ کر تسلی کر لیں کہ مزاحمت پر میدان کی شدت $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سے برقی دباو v_R یوں

$$v_R = -\int_0^{d_1} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{d_1} E\,\mathrm{d}x = Ed_1 \tag{9.16}$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ متحرک سلاخ پر حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} = E_{\text{حرکی}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سے حرکی دباو e یوں

$$e = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{d} \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{d} E_{\text{حرکی}}\,\mathrm{d}x = E_{\text{حرکی}}d \tag{9.17}$$

B

V

شکل 9.3: محرک برقی دباو یا تو وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان اور یا حرکت کرتے بند دائرے سے ہی پیدا ہو سکتی ہے۔

حاصل ہوتی ہے۔ شکل میں دو افقی موصل سلاخوں کے مابین برقی دباو کو سلاخوں کے بائیں سروں پر v_R جبکہ ان کے دائیں سروں پر e کہا گیا ہے لہٰذا v_R اور e دونوں مثبت اور برابر قیمت رکھتے ہیں۔ یہاں ضرورت اس بات کی ہے کہ آپ دیکھ سکیں کہ v_R کی مثبت قیمت حاصل کرنے کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی جائے جبکہ e کی مثبت قیمت کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں جمع کی علامت استعمال کی جائے۔ حرکی دباو کے بند تکمل میں دائرے کے بقایا اطراف پر تکمل کی قیمت صفر ہونے کے ناطے صرف متحرک سلاخ پر تکمل لیا گیا ہے۔

اگرچہ مساوات 9.1 انتہائی سادہ شکل رکھتی ہے لیکن اس کا استعمال کبھی کبھار مشکل ہو جاتا ہے۔ ایسا اس وقت ہوتا ہے جب دور کے کسی حصے کو تبدیل کرتے ہوئے دوسرا حصہ نسب کیا جائے۔ یہ بات شکل 9.3 پر غور کرنے سے بہتر سمجھ آئے گی۔ اس شکل میں نا تو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان ہے اور نا ہی بند دائرے کا کوئی حصہ متحرک ہے۔ البتہ شکل میں دکھائے سوئچ کو چالو یا غیر چالو کرتے ہوئے بند دائرے میں مقناطیسی بہاو کم اور زیادہ کیا جا سکتا ہے۔ یہاں بغیر سوچے مساوات 9.1 استعمال کرتے ہوئے غلط نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ برقی دباو یا تو وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان اور یا پھر بند دائرے کے کسی حصے کے حرکت سے ہی پیدا ہو گا۔

مشق 9.1: خطہ $\rho < 4\,\text{cm}$ میں میدان $\boldsymbol{B} = \frac{2\cos 1000t\boldsymbol{a}_\text{z}}{5+\rho^2}\,\text{T}$ پایا جاتا ہے۔ الف) سطح $z = 1.5\,\text{cm}$ ، $\rho < 2\,\text{cm}$ سے گزرتی مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔ ب) نقطہ $N(0.02, 10°, 3)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ پ) سطح $z = 0$ پر رداس $\rho = 2\,\text{cm}$ اور مزاحمت $4\,\frac{\Omega}{\text{cm}}$ کی موصل تار کا دائرہ پایا جاتا ہے۔ اس تار میں برقی رو حاصل کریں۔

جوابات: $502.6\cos 1000t\ \mu\text{Wb}$ ، $4\sin 1000t\boldsymbol{a}_\phi\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $10\sin 1000t\ \text{mA}$

مشق 9.2: شکل 9.3 میں $\boldsymbol{B} = 0.5\boldsymbol{a}_\text{z}$ ٹسلا، رفتار $100y\boldsymbol{a}_\text{y}$ میٹر فی سیکنڈ جبکہ $d = 0.5$ میٹر ہے۔اگر $t = 0$ پر $y = 0.2$ میٹر ہو تب $t = 15$ ملی سیکنڈ پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- سلاخ کی رفتار،
- محرک برقی دباو V_{21}،
- پیما برقی دباو کی اندرونی مزاحمت دس میگا اوہم کی صورت میں دور میں برقی رو۔

جوابات: $4.017\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$، $100\ \text{V}$، $10\ \mu\text{A}$

9.2 انتقالی برقی رو

فیراڈے کے تجرباتی نتیجے سے میکس ویل کی پہلی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.18}$$

حاصل ہوئی جو کہتی ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے برقی دباو۔ گردش کے عمل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں ایسے پیدا کردہ برقی دباو کا بند لکیری تکمل صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ آئیں اب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر غور کریں۔

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{9.19}$$

ساکن مقناطیسی میدان پر لاگو ہوتی ہے۔اس مساوات کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = 0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کا پھیلاو ہر صورت صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کا بایاں ہاتھ ہر صورت صفر دے گا اور یوں اگر یہ مساوات درست ہو تب اس کا دایاں ہاتھ بھی ہر صورت صفر ہونا چاہیے۔مگر ہم استمراری مساوات سے جانتے ہیں کہ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{9.20}$$

ہوتا ہے۔اس سے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 9.19 صرف اس صورت درست ہو گی جب $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو۔یہ ایک غیر ضروری اور غیر حقیقی شرط ہے لہٰذا وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر استعمال کے قابل بنانے کی خاطر مساوات 9.19 کو تبدیل کرنا لازم ہے۔تصور کریں کہ مساوات 9.19 میں نا معلوم جزو $\boldsymbol{G}$ کی شمولیت سے یہ مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر بھی لاگو کرنے کے قابل ہو جاتا ہے۔ایسی صورت میں مساوات 9.19 یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{G}$$

لکھی جائے گی۔آئیں دوبارہ اس کا پھیلاو حاصل کریں جس سے

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \nabla \cdot \boldsymbol{G}$$

یا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں استمراری مساوات کا سہارا لیا گیا۔اس مساوات میں ρ کی جگہ $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \frac{\partial \left(\nabla \cdot \boldsymbol{D}\right)}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی درست شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9.21}$$

ہے۔ مندرجہ بالا مساوات برقناطیسیت کے اب تک تمام دریافت کردہ اصولوں پر پورا اترتی آئی ہے۔جب تک یہ غلط ثابت نہ ہو جائے، ہم اسے درست ہی تصور کریں گے۔

مساوات 9.21 میکس ویل کی مساوات میں سے ایک مساوات ہے۔اس مساوات میں $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ کی بُعد ایمپیئر فی مربع میٹر حاصل ہوتی ہے جو کثافت برقی رو کا بُعد ہے۔میکس ویل نے اس مساوات میں دائیں ہاتھ نئے جزو کو کثافت انتقالی رو[10] کا نام دیا اور $\boldsymbol{J}_d$ سے ظاہر کیا یعنی

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_d \\ \boldsymbol{J}_d &= \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\end{aligned} \tag{9.22}$$

ہم تین اقسام کی کثافت رو دیکھ چکے جن میں کثافت انتقالی رو کے علاوہ غیر بار شدہ خطے میں عموماً الیکٹران کی حرکت سے پیدا کثافت ایصالی رو

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.23}$$

اور بار کے حجم کی حرکت سے پیدا کثافت اتصالی رو

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{9.24}$$

شامل ہیں۔مساوات 9.21 میں $\boldsymbol{J}$ سے مراد ایصالی اور اتصالی رو کی کثافتوں کا مجموعہ ہے جبکہ مقید بار $\boldsymbol{H}$ کا حصہ ہیں۔غیر موصل خطے میں جہاں کثافت بار پائی ہی نہیں جاتی $\boldsymbol{J} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا غیر موصل میں

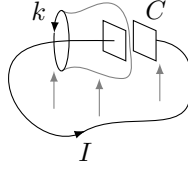
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{9.25}$$

ہو گی۔مساوات 9.25 اور مساوات 9.18 میں مشابہت دیکھیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ اور برقی شدت $\boldsymbol{E}$ کافی مشابہت رکھتے ہیں۔اسی طرح کثافت رو $\boldsymbol{D}$ اور کثافت بہاو $\boldsymbol{B}$ بھی کافی مشابہت رکھتے ہیں۔اس مشابہت کو یہیں تک رکھیں چونکہ جیسے ہی میدان میں بار پر قوت کی بات کی جائے، دونوں اقسام کے میدان بالکل مختلف طریقوں سے عمل کرتے ہیں۔

---

[10] displacement current density

شکل 9.4: موصل تار میں ایصالی رو برق گیر کے چادروں کے درمیان انتقالی رو کے برابر ہے۔

کسی بھی سطح سے کل انتقالی رو سطحی تکمل

$$I_d = \int_S \boldsymbol{J}_d \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.26}$$

سے حاصل ہو گی۔مساوات 9.21 کے سطحی تکمل

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.27}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل حاصل ہوتی ہے۔

انتقالی رو کو شکل 9.4 کی مدد سے سمجھتے ہیں جہاں موصل تار سے برق گیر C کے دو سرے جوڑتے ہوئے بند دور بنایا گیا ہے جس میں وقت کے ساتھ بدلتا سائن نما مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ محرک برقی دباو

$$e = V_0 \cos \omega t$$

پیدا کرتی ہے۔یہ سادہ برقی دور ہے جس میں مزاحمت اور امالہ کو نظر انداز کرتے ہوئے برقی رو

$$\begin{aligned} i &= -\omega C V_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں ϵ، S اور d برق گیر (کپیسٹر) سے متعلق ہیں۔آئیں انتقالی رو کو نظرانداز کرتے ہوئے تار کے گرد بند دائرے k پر ایمپیئر کا دوری قانون لاگو کریں۔

$$\oint_k \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I_k$$

اب بند دائرہ k اور اس دائرے پر $\boldsymbol{H}$ حقیقی مقدار ہیں اور تکمل سے حاصل رو I_k اس دائرے سے گھیرے کسی بھی سطح سے گزرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔اگر ہم k کو سیدھی سطح کی سرحد تصور کریں تب موصل تار اس سطح کو چھیدتی ہوئی گزرے گی۔یوں اس سطح سے I رو ہی گزرے گی جو ایصالی رو ہے۔اس کے برعکس اگر ہم k کو تھیلے کا منہ تصور کریں جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے تب ایصالی رو ایسی سطح سے نہیں گزرتی چونکہ تھیلا برق گیر (کپیسٹر) کے دو چادروں کے درمیان سے گزرتا ہے اور تار اسے چھوتی تک نہیں۔ایسی صورت میں تھیلے سے گزرتی ایصالی رو صفر کے برابر ہے۔ایسی صورت میں ہمیں انتقالی رو کا سہارا لینا ہو گا۔برق گیر (کپیسٹر) کے چادروں کے درمیان

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

ہے لہٰذا

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = -\omega \epsilon \frac{V_0}{d} \sin \omega t$$

اور یوں

$$I_d = S J_d = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

ہو گی۔

یہ وہی جواب ہے جو ایصالی رو سے حاصل ہوا تھا۔اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایمپیئر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے سطح سے گزرتی ایصالی رو اور انتقالی رو دونوں کا خیال رکھنا ہو گا۔کہیں پر سطح سے صرف ایصالی رو گزرے گی تو کہیں اس سے صرف انتقالی رو گزرے گی اور کبھی کبھار دونوں کا مجموعہ۔

انتقالی رو وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا ہوتے ہیں لہٰذا یہ ایسے تمام غیر موصل یا نیم موصل خطوں میں پائی جاتی ہے جہاں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ایصالی رو پائی جائے۔اگرچہ موصل خطے میں بھی انتقالی رو پائی جاتی ہے لیکن، جیسے آپ مندرجہ ذیل مشق میں دیکھیں گے، اس کی قیمت ایصالی رو کی نسبت سے اتنی کم ہوتی ہے کہ یہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ انتقالی رو تجرباتی طور دریافت نہیں کی گئی بلکہ اس تک منطق کے ذریعہ سے پہنچا گیا۔

مثال 9.1: ایک خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\mu_R = 2.5$ اور $\epsilon_R = 1.2$ ہیں۔اس میں کثافت انتقالی برقی رو درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{J}_d = 10\cos(2\times10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\text{y}} \, \frac{\mu\text{A}}{\text{m}^2}$$

الف) $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ ب) فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل اور تکمل کا استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔ پ) مساوات 9.22 استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{J}_d$ حاصل کریں۔ ت) حاصل $\boldsymbol{J}_d$ اور سوال میں دیے گئے $\boldsymbol{J}_d$ کا آپس میں موازنہ کرتے ہوئے k کی مثبت قیمت حاصل کریں۔

حل:الف) چونکہ $\boldsymbol{J}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ کے برابر ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{D} = \int \boldsymbol{J}_d \,\mathrm{d}t = 5\times10^{-14}\sin(2\times10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + M \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ساکن میدان صفر ہونے کی صورت میں تکمل کا مستقل $M = 0$ ہو گا۔یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\epsilon_R\epsilon_0} = 4.7\times10^{-3}\sin(2\times10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\text{y}} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

ہو گا۔

ب) فیراڈے کے قانون سے

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -4.70587111\times10^{-3}k\cos(2\times10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\text{z}} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

لکھتے ہوئے تکمل لے کر

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \int 4.70587111\times10^{-3}k\cos(2\times10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2.3529\times10^{-11}k\sin(2\times10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\text{z}}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_R\mu_0} = 7.4896\times10^{-6}k\sin(2\times10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\text{z}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

پ) چونکہ $\sigma = 0$ ہے لہٰذا کثافت ایصالی برقی رو صفر ہو گی۔یوں مساوات 9.22 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 7.4896 \times 10^{-6} k^2 \cos(2 \times 10^8 t - kx) \boldsymbol{a}_{\text{y}} \, \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = \boldsymbol{J}_d$$

ت) حاصل کردہ اور سوال میں دیا گیا $\boldsymbol{J}_d$ برابر پر کرتے ہوئے

$$k = \sqrt{\frac{10 \times 10^{-6}}{7.4896 \times 10^{-6}}} = 1.155 \, \text{m}^{-1}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.2: رداس a اور b کے موصل ہم محوری کرہ، جہاں $b > a$ ہے، کو برقی دباو $v = V_0 \cos \omega t$ مہیا کی جاتی ہے۔دونوں کرہ کے درمیانی خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 1$ اور $\mu_R = 1$ ہیں۔بیرونی کرہ کو برقی زمین تصور کریں۔ الف) کرہ برق گیر (کپیسٹر) کو مہیا برقی رو حاصل کریں۔ ب) دونوں کرہ کے مابین انتقالی برقی رو حاصل کریں۔ پ) کیا بیرون برق گیر (کپیسٹر) ایصالی برقی رو اور اندرون برق گیر (کپیسٹر) انتقالی برقی رو برابر ہیں؟

حل: الف) صفحہ 217 پر مساوات 5.60 کرہ کپیسٹر کی کپیسٹنس دیتی ہے جس سے مہیا کردہ ایصالی برقی رو یوں

$$I = C \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\pi\epsilon\omega V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \sin \omega t$$

حاصل کی جا سکتی ہے۔

ب) صفحہ 251 پر مساوات 6.24 استعمال کرتے ہوئے دونوں کرہ کے درمیان خطے میں برقی دباو کو

$$V = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} V_0 \cos \omega t$$

لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = \frac{V_0 \cos \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \boldsymbol{a}_\text{r}$$

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} = \frac{\epsilon V_0 \cos \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \boldsymbol{a}_\text{r}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے کثافت انتقالی برقی رو

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = -\frac{\omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \boldsymbol{a}_\text{r}$$

لکھی جا سکتی ہے۔یوں انتقالی برقی رو

$$I_d = 4\pi r^2 J_d = -\frac{4\pi \omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

ہو گی۔

پ) بیرون برق گیر (کپیسٹر) ایصالی برقی رو اور اندرون برق گیر (کپیسٹر) انتقالی برقی رو برابر ہیں۔

مشق 9.3: ٹھوس تانبے کی تار میں سائن نما، پچاس ہرٹز کی ایصالی رو $I_0 \cos \omega t$ گزر رہی ہے۔اس میں انتقالی رو حاصل کریں۔پچاس ہرٹز رو کی صورت میں ایصالی اور انتقالی رو کے موثر قیمت کی شرح حاصل کریں۔

حل: $I_d = -\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} I_0 \sin \omega t$ جبکہ ان کے موثر قیمت کی شرح $\frac{I}{I_d} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = 2.08 \times 10^{16}$ ہے۔

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل

ہم وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں میں میکس ویل کی دو مساوات کے نقطہ اشکال

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.28}$$

اور

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9.29}$$

حاصل کر چکے ہیں۔میکس ویل کی بقایا دو مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی جوں کے توں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{9.30}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{9.31}$$

رہتے ہیں۔

مساوات 9.30 کہتی ہے کہ کثافت برقی رو کا منبع کثافت بار ہے۔وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان میں برقی میدان پیدا ہوتا ہے جو بند دائرے پر چلتا ہے۔ایسے برقی میدان کا نا تو کسی بار سے اخراج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی بار پر ختم ہوتا ہے۔اس کے برعکس ہر مثبت بار سے اس کے برابر برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے اور ہر منفی بار پر اس کے برابر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔

مساوات 9.31 کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے سے کل مقناطیسی بہاو کا اخراج صفر ہے یعنی مقناطیسی بہاو نا تو کسی نقطے سے خارج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی نقطے پر اختتام پذیر ہوتا ہے۔ سادہ زبان میں اس کا مطلب ہے کہ مقناطیس کا یک قطب ممکن نہیں جس سے مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا اس پر مقناطیسی بہاو اختتام ہو۔

مندرجہ بالا چار مساوات پر برقناطیسیت کی بنیاد کھڑی ہے جنہیں استعمال کرنے کی خاطر چار معاون مساوات

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{9.32}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{9.33}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.34}$$

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{9.35}$$

بھی درکار ہوتی ہیں۔

ایسے ذو برق اور مقناطیسی اشیاء جن میں متغیرات سادہ تعلق نہ رکھتے ہوں، ان میں مساوات 9.32 اور مساوات 9.33 کی جگہ

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{9.36}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \right) \tag{9.37}$$

استعمال ہوتے ہیں۔ خطی اشیاء میں

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \boldsymbol{E} \tag{9.38}$$

اور

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{9.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آخر میں لورنز قوت کی مساوات

$$\boldsymbol{F} = \rho_h \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right) \tag{9.40}$$

بھی شامل کرتے ہیں۔

غیر سمتی مقناطیسی دباو V اور سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ انتہائی اہم ہیں البتہ ان کی شمولیت لازم نہیں۔

مثال 9.3: ایک خطے میں $\rho_h = 0$ ہے۔ اگر اس خطے میں $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ ہو تب خطے کی برقی مستقل ϵ پر کیا شرط لاگو ہوتی ہے۔

حل: مساوات 9.30 کے تحت $\rho_h = 0$ کی صورت میں $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ ہو گا۔ یوں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) == \boldsymbol{E} \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ اس صورت ہو گا اگر $\nabla \epsilon = 0$ ہو۔

مشق 9.4: ایک خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 2.5$ اور $\mu_R = 10$ ہیں۔کیا اس خطے میں میدان $\boldsymbol{D} = (z + 6 \times 10^7 t)\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ اور $\boldsymbol{B} = (-754z - 4.52 \times 10^{10} t)\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کی جوڑی میکس ویل کی مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

جواب:چونکہ برقی میدان سے حاصل $\nabla \times \boldsymbol{E}$ مقناطیسی میدان سے حاصل $-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ کے برابر ہے اور اسی طرح مقناطیسی میدان سے حاصل $\nabla \times \boldsymbol{H}$ مقناطیسی میدان سے حاصل $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ کے برابر ہے لہٰذا یہ جوڑی میکس ویل کی مساوات پر پورا اترتی ہے۔

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل

مساوات 9.28 کے سطحی تکمل پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے فیراڈے کے قانون کو

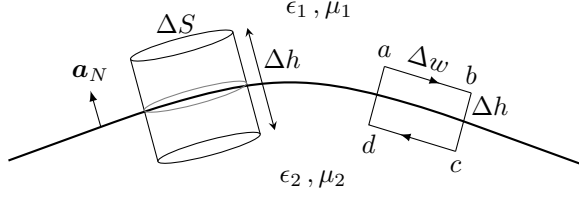
$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 9.29 سے ایمپیئر کے دوری قانون کی تکمل صورت

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.42}$$

حاصل ہوتی ہے۔

برقی اور مقناطیسی میدان کے تکمل اشکال، گاوس کے قوانین مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 کے حجمی تکمل اور مسئلہ پھیلاو کی مدد سے یوں لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h \rho_h \, \mathrm{d}h \tag{9.43}$$

شکل 9.5: وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط۔

اور

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{9.44}$$

مندرجہ بالا چار مساوات سے $\boldsymbol{E}$، $\boldsymbol{H}$، $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سرحدی شرائط حاصل ہوتے ہیں جن سے میکس ویل کے جزوی تفرقی مساوات کے مستقل حاصل کئے جاتے ہیں۔وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کے سرحدی شرائط عموماً ساکن میدان کے سرحدی شرائط ہی ہوتے ہیں لہٰذا ساکن میدان کے طریقہ کار سے وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط بھی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

آئیں شکل 9.5 کی مدد سے سرحد کے متوازی برقی اور مقناطیسی شرائط حاصل کریں۔ شکل میں مستطیل دائرے پر مساوات 9.41 کے اطلاق سے

$$\left(E_{m1} - E_{m2}\right) \Delta w = -\frac{\partial B_n}{\partial t} \Delta w \Delta h$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\frac{\partial B_n}{\partial t}$ سے مراد دائرے کے گھیرے سطح سے گزرتے مجموعی میدان کی تبدیلی ہے جس کا کچھ حصہ خطہ 1 اور کچھ حصہ خطہ 2 سے گزرتا ہے۔اس مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت $\Delta h \to 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کی جا سکتی ہے۔ایسی صورت میں دائیں ہاتھ کو صفر ہی تصور کرتے ہوئے

$$E_{m1} = E_{m2} \tag{9.45}$$

یعنی

$$\boldsymbol{a}_N \times \left(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2\right) = 0 \tag{9.46}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ تصور کرتے ہوئے کسی بھی چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر برقی رو کو $I = \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں شکل 9.5 میں مستطیل دائرے پر مساوات 9.42 کے اطلاق سے

$$(H_{m1} - H_{m2})\,\Delta w = K_{\perp}\Delta w + \frac{\partial D}{\partial t}\Delta w \Delta h$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $K_{\perp}$ سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔دائیں ہاتھ دوسرے جزو کی قیمت $\Delta h \to 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کی جا سکتی ہے لہٰذا اس جزو کو نظرانداز کرتے ہوئے

$$H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp} \tag{9.47}$$

حاصل ہوتا ہے جسے یوں

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{K}_{\perp} \tag{9.48}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

کسی بھی حقیقی دو مختلف اشیاء کی سرحد، مثلاً سمندر کے پانی اور ہوا کی سرحد یا ہوا اور دیوار کی سرحد، پر کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ صفر ہوتی ہے۔لہٰذا حقیقی مسائل میں $K = 0$ کی بنا پر

$$H_{m1} = H_{m2} \tag{9.49}$$

ہو گا۔صفحہ 374 پر شکل 8.9 میں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ دکھائی گئی ہے جبکہ یہاں شکل 9.5 میں اسے صفر تصور کرتے ہوئے نہیں دکھایا گیا۔

مساوات 9.43 اور مساوات 9.44 سے سرحدی عمودی شرائط

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{9.50}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \tag{9.51}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

موصل کو ایسا کامل موصل تصور کرتے ہوئے جس کی موصلیت لامحدود مگر $\boldsymbol{J}$ محدود ہو سے موصل کے اندر اوہم کے قانون سے

$$\boldsymbol{E} = 0 \tag{9.52}$$

اور یوں فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل سے، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کی صورت میں

$$\boldsymbol{H} = 0 \tag{9.53}$$

حاصل ہوتی ہیں۔اس طرح ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل سے محدود $\boldsymbol{J}$ کی قیمت

$$\boldsymbol{J} = 0 \tag{9.54}$$

حاصل ہوتی ہے لہٰذا برقی رو صرف موصل کی سطح پر بطور سطحی کثافت رو $\boldsymbol{K}$ ممکن ہے۔یوں اگر خطہ 2 کامل موصل ہو تب مساوات 9.45، 9.49، 9.50 اور 9.51 کی جگہ

$$E_{m1} = 0 \tag{9.55}$$

$$H_{m1} = K \tag{9.56}$$

$$D_{n1} = \rho_S \tag{9.57}$$

$$B_{n1} = 0 \tag{9.58}$$

لکھا جائے گا۔یاد رہے کہ سطحی کثافت بار کی موجودگی ذو برق، کامل موصل اور غیر کامل موصل تمام پر ممکن ہے جبکہ سطحی کثافت رو $\boldsymbol{K}$ صرف کامل موصل کی صورت میں ممکن ہے۔

مندرجہ بالا سرحدی شرائط میکس ویل کی مساوات کے حل کے لئے لازم ہیں۔حقیقت میں پیش آنے والے تمام مسائل میں مختلف اشیاء کی سرحدیں پائی جاتی ہیں اور ایسی ہر سرحد کے دونوں اطراف پر مختلف متغیرات کے تعلق سرحدی شرائط سے ہی حاصل کرنا ممکن ہے۔کامل موصل کی صورت میں موصل کے اندر، وقت کے ساتھ بدلتے، تمام متغیرات صفر ہوتے ہیں البتہ ایسی صورت میں مساوات 9.55 تا مساوات 9.58 میں دئے شرائط کا اطلاق نہایت مشکل ہوتا ہے۔

لامحدود خطے کو بے سرحد خطہ تصور کیا جا سکتا ہے۔سرحد کی غیر موجودگی میں متحرک لہروں کے چند بنیادی خاصیت لہر کی حرکت پر غور سے واضح ہوتے ہیں۔اگلا باب انہیں متحرک لہروں پر ہے۔چونکہ لامحدود خطے میں سرحد نہیں پائی جاتی لہٰذا سرحدی شرائط کی ضرورت نہیں پڑتی۔اسی وجہ سے لامحدود خطے میں میکس ویل مساوات کا حل نہایت آسان ہوتا ہے۔

مثال 9.4: موصل سطح پر نقطہ $N(2,3-1)$ پایا جاتا ہے جہاں میدان $\boldsymbol{E} = (15\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 20\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\text{z}}) \cos 10^6 t \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔موصل سطح کے گرد خطے کے مستقل $\mu_R = 2.2$ ، $\epsilon_R = 1.6$ اور $\sigma = 0$

ہیں۔ الف) نقطہ N پر موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ حاصل کریں۔ ب) اس نقطے پر کثافت بار حاصل کریں۔

حل:الف) چونکہ نقطہ N پر برقی میدان دیا گیا ہے اور موصل سطح پر برقی میدان سطح کے عمودی ہوتا ہے لہٰذا عمودی سمتیہ $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہی ہو گا۔یوں لمحہ $t=0$ پر میدان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{a}_N$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a}_N=\frac{\boldsymbol{E}_{t=0}}{|\boldsymbol{E}_{t=0}|}=\frac{15\boldsymbol{a}_{\text{X}}-20\boldsymbol{a}_{\text{Y}}+6\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{\sqrt{15^2+20^2+6^2}}=0.58\boldsymbol{a}_{\text{X}}-0.78\boldsymbol{a}_{\text{Y}}+0.23\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$$

ب) موصل سطح پر عمودی میدان اور کثافت بار کے تعلق سے

$$\begin{aligned}\rho_S=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{a}_N&=1.6\epsilon_0(15\boldsymbol{a}_{\text{X}}-20\boldsymbol{a}_{\text{Y}}+6\boldsymbol{a}_{\text{Z}})\cos 10^6t\cdot(0.58\boldsymbol{a}_{\text{X}}-0.78\boldsymbol{a}_{\text{Y}}+0.23\boldsymbol{a}_{\text{Z}})\\&=1.138\cos(10^6t)\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.5: خطہ-1 کے مستقل $\sigma_1=0$ ، $\epsilon_{R1}=5.2$ اور $\mu_{R1}=6$ ہیں جبکہ خطہ-2 کے مستقل $\sigma_2=0$ ، $\epsilon_{R2}=1.5$ اور $\mu_{R2}=2.2$ ہیں۔ان کی سرحد پر کوئی کثافت بار نہیں پایا جاتا۔ سمتیہ $10\boldsymbol{a}_{\text{X}}-5\boldsymbol{a}_{\text{Y}}+15\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ خطہ-2 سے خطہ-1 کی جانب ہے۔خطہ الف میں سرحد کے قریب نقطہ N پر میدان $\boldsymbol{E}_1=(100\boldsymbol{a}_{\text{X}}-50\boldsymbol{a}_{\text{Y}}+80\boldsymbol{a}_{\text{Z}})\cos 3600t\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) اسی نقطے کے قریب E_{t1} ، E_{n2} اور E_2 حاصل کریں۔

جوابات: $41.8\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $454\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $456\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

مثال 9.6: $z < 0$ خطہ-1 ہے جہاں $\epsilon_1 = 1.5 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ ، $\mu_1 = 2.2 \times 10^{-6}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ اور $\sigma_1 = 6 \times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔خطہ-2 جو $z > 0$ پر پایا جاتا ہے میں $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$ ، $\mu_2 = \frac{\mu_1}{2}$ اور $\sigma_2 = 4\sigma_1$ ہیں۔نقطہ $N(0,0,0^-)$ سرحد پر خطہ-1 میں پایا جاتا ہے جہاں میدان $\boldsymbol{E}_1 = (30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 10\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\cos 10^9 t\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔الف)اس نقطے پر $\boldsymbol{E}_{n1}$ ، $\boldsymbol{E}_{m1}$ ، $\boldsymbol{D}_{n1}$ اور $\boldsymbol{D}_{m1}$ حاصل کریں۔ ب)اس نقطے پر $\boldsymbol{J}_{n1}$ اور $\boldsymbol{J}_{m1}$ حاصل کریں۔ پ)اسی نقطے پر $\boldsymbol{E}_{m2}$ ، $\boldsymbol{D}_{m2}$ اور $\boldsymbol{J}_{m2}$ حاصل کریں۔ ت)استمراری مساوات کی مدد سے $J_{n1} - J_{n2} = -\frac{\partial D_{n1}}{\partial t} + \frac{\partial D_{n2}}{\partial t}$ لکھتے ہوئے D_{n2} ، J_{n2} اور E_{n2} حاصل کریں۔

حل:الف) خطہ-1 سے خطہ-2 جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے۔ یوں

$$E_{n1} = \boldsymbol{a}_N \cdot \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot [30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 10\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}]\cos(10^9 t) = 10\cos(10^9 t)$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{n1} &= E_{n1}\boldsymbol{a}_N = 10\cos(10^9 t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{E}_{m1} &= \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_{n1} = [30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}]\cos(10^9 t) \\
\boldsymbol{D}_{n1} &= \epsilon_1 \boldsymbol{E}_{n1} = 1.5 \times 10^{-10}\cos(10^9 t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{D}_{m1} &= \epsilon_1 \boldsymbol{E}_{m1} = 10^{-10}[4.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}]\cos(10^9 t)
\end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

ب)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_{n1} &= \sigma_1 \boldsymbol{E}_{n1} = (6 \times 10^{-3})10\cos(10^9 t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \frac{3}{50}\cos(10^9 t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{J}_{m1} &= \sigma_1 \boldsymbol{E}_{m1} = (6 \times 10^{-3})[30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}]\cos(10^9 t) = \left[\frac{9}{50}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{3}{25}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]\cos(10^9 t)
\end{aligned}$$

پ) سرحد پر متوازی برقی میدان بے جوڑ ہوتا ہے لہٰذا اس سرحدی شرط کی بنا پر

$$\boldsymbol{E}_{m2} = \boldsymbol{E}_{m1} = [30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}]\cos(10^9 t)$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{m2} &= \epsilon_2 \boldsymbol{E}_{m2}\\ &= (3\times 10^{-11})[30\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 20\boldsymbol{a}_{\text{y}}]\cos(10^9 t)\\ &= 10^{-10}[9\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 6\boldsymbol{a}_{\text{y}}]\cos(10^9 t)\\ \boldsymbol{J}_{m2} &= \sigma_2 \boldsymbol{E}_{m2}\\ &= (24\times 10^{-3})[30\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 20\boldsymbol{a}_{\text{y}}]\cos(10^9 t)\\ &= \left[\frac{18}{25}\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \frac{12}{25}\boldsymbol{a}_{\text{y}}\right]\cos(10^9 t)\end{aligned}$$

حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

ت) مساوات 9.50 سرحد پر سطحی کثافت بار ρ_S اور عمودی میدان کا تعلق بیان کرتی ہے۔ شکل 9.5 کی طرح سرحد پر کم سے کم قد $(\Delta h \to 0)$ کی چھوٹی ڈبیا میں کل $\rho_S \Delta S$ بار پایا جائے گا۔ اس ڈبیا سے برقی رو کے اخراج سے ڈبیا میں موجود بار میں کمی پیدا ہو گی جسے استمراری مساوات پیش کرتی ہے

$$(\boldsymbol{J}_{n1} - \boldsymbol{J}_{n2})\cdot \Delta\boldsymbol{S} = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t}\Delta S$$

جہاں $\rho_S = J_{n1} - J_{n2}$ کے برابر ہے۔ اس مساوات کو

$$J_{n1} - J_{n2} = -\frac{\partial}{\partial t}(D_{n1} - D_{n2})$$

یا

$$\sigma_1 E_{n1} - \sigma_2 E_{n2} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_1 E_{n1} - \epsilon_2 E_{n2})$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس تفرقی مساوات میں $E_{n1} = 10\cos 10^9 t$ پر کرتے ہوئے E_{n2} کے لئے حل کرتے ہیں۔ ایسا نا معلوم مستقل کے طریقے سے کرتے ہیں۔ یہ طریقہ استعمال کرتے ہوئے ہم تصور کرتے ہیں کہ

$$E_{n2} = A\cos 10^9 t + B\sin 10^9 t$$

کے برابر ہے جہاں A اور B درکار مستقل ہیں۔ ہم E_{n1} اور E_{n2} کو استمراری مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}&(6\times 10^{-3})10\cos 10^9 t - 24\times 10^{-3}[A\cos 10^9 t + B\sin 10^9 t]\\ &= 1.5\times 10^{-11}\times 10\times 10^9 \sin 10^9 t + 3\times 10^{-11}[-10^9 A\sin 10^9 t + 10^9 B\cos 10^9 t]\end{aligned}$$

اس مساوات میں دونوں جانب cos اجزاء کے سر برابر ہوں گے۔یوں

$$(6 \times 10^{-3})10 - 24 \times 10^{-3} A = 3 \times 10^{-11} [10^9 B]$$

ہو گا۔اسی طرح مساوات کے دونوں جانب sin اجزاء کے سر برابر ہوں گے لہٰذا

$$-24 \times 10^{-3} [B] = 1.5 \times 10^{-11} \times 10 \times 10^9 + 3 \times 10^{-11} [-10^9 A]$$

ہو گا۔مندرجہ بالا دو مساوات کو آپس میں حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} A &= \frac{165}{41} \\ B &= -\frac{50}{41} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$E_{n2} = \frac{165}{41} \cos 10^9 t - \frac{50}{41} \sin 10^9 t = 4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{n2} &= 4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\ \boldsymbol{D}_{n2} &= \epsilon_2 \boldsymbol{E}_{n2} \\ &= (3 \times 10^{-11}) 4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\ &= 1.26 \times 10^{-10} \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\ \boldsymbol{J}_{n2} &= \sigma_2 \boldsymbol{E}_{n2} \\ &= (24 \times 10^{-3}) 4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\ &= 0.1 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \end{aligned}$$

ہوں گے۔

9.5 تاخیری دباو

وقت کے ساتھ بدلتے دباو، جنہیں **تاخیری دباو**[11] کہا جاتا ہے، **اشعاعی اخراج**[12] کے مسائل حل کرنے میں نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔آپ کو یاد ہو گا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو V کو خطے میں تقسیم ساکن بار کی صورت

$$V=\int_h \frac{\rho_h \,\mathrm{d}h}{4\pi\epsilon R} \qquad (\text{برقی سکون}) \tag{9.59}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کو وقت کے ساتھ نہ بدلتے یعنی یک سمت برقی رو کے تقسیم کی صورت

$$\boldsymbol{A}=\int_h \frac{\mu \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h}{4\pi R} \qquad (\text{یک سمت رو}) \tag{9.60}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔انہیں مساوات کے نقطہ اشکال بالترتیب

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho_h}{\epsilon} \qquad (\text{برقی سکون}) \tag{9.61}$$

اور

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}=-\mu \boldsymbol{J} \qquad (\text{یک سمت رو}) \tag{9.62}$$

ہیں۔

غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو کے حصول کے بعد میدان کے بنیادی متغیرات ڈھلوان

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V \qquad (\text{برقی سکون}) \tag{9.63}$$

اور گردش

$$\boldsymbol{B}=\nabla \times \boldsymbol{A} \qquad (\text{یک سمت رو}) \tag{9.64}$$

کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔

آئیں اب ساکن بار اور یک سمت رو سے متعلق، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایسے دباو حاصل کریں جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

---

[11] retarded potentials
[12] radiation

میکس ویل کی مساوات کے تحت $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ہو گا۔ صفحہ 319 پر مساوات 7.66 کے تحت گردش کا پھیلاو لازماً صفر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 9.64 میکس ویل کی مساوات $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ پر پورا اترتی ہے۔ یوں ہم مساوات 9.64 کو بدلتے میدان کے لئے بھی درست تصور کرتے ہیں۔

صفحہ 332 پر مشق 7.7 میں آپ نے ثابت کیا کہ ڈھلوان کی گردش لازماً صفر ہوتی ہے یوں مساوات 9.63 کی گردش لینے سے دایاں ہاتھ صفر حاصل ہوتا ہے جبکہ بایاں ہاتھ $\nabla \times \boldsymbol{E}$ حاصل ہوتا ہے جو مساوات 9.28 کے تحت صفر نہیں ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مساوات 9.63 وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے درست نہیں ہے۔ آئیں اس توقع سے مساوات 9.63 کے دائیں جانب متغیرہ $\boldsymbol{N}$ جمع کریں

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V + \boldsymbol{N}$$

کہ وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے ایسی مساوات درست ثابت ہو گی۔ فی الحال $\boldsymbol{N}$ ایک نا معلوم متغیرہ ہے۔ گردش لینے سے

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= -\nabla \times (\nabla V) + \nabla \times \boldsymbol{N} \\ &= 0 + \nabla \times \boldsymbol{N}\end{aligned}$$

یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 9.64 کے استعمال سے یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A})$$

یا

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کا سادہ ترین حل

$$\boldsymbol{N} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

ہے لہٰذا اب ہم

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{9.65}$$

لکھ سکتے ہیں۔

ہمیں اب بھی دیکھنا ہو گا کہ آیا مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 میکس ویل کی بقایا دو مساوات یعنی مساوات 9.29

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

اور مساوات 9.30

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h$$

پر پورا اترتے ہیں کہ نہیں۔ یہاں پہلی مساوات میں $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{J} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ &= \boldsymbol{J} + \epsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \right)\end{aligned}$$

یا

$$\nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{J} - \mu \epsilon \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \right) \tag{9.66}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.65 کا سہارا لیا گیا۔ اسی طرح مساوات 9.30 سے

$$\epsilon \left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) = \rho_h$$

یا

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{9.67}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 میں کوئی تضاد نہیں پایا جاتا۔ساکن یا یک سمتی حالات میں $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ کی وجہ سے مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 سے بالترتیب مساوات 9.62 اور مساوات 9.61 حاصل ہوتے ہیں۔یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وقت کے ساتھ بدلتے دباو کی تعریف یوں کی جا سکتی ہے کہ ان سے $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{E}$ بذریعہ مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 حاصل کئے جا سکتے ہوں۔البتہ $\boldsymbol{A}$ اور V کو مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 از خود مکمل طور پر بیان نہیں کرتے۔یہ دو مساوات لازمی لیکن نا مکمل شرائط ہیں جن پر $\boldsymbol{A}$ اور V کا پورا اترنا ضروری ہے۔آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

تصور کریں کہ ہمارے پاس سادہ سمتی مقناطیسی دباو ہے جس کے A_y اور A_z اجزاء صفر کے برابر ہیں۔ یوں مساوات 9.64 کی مدد سے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ x محدد کے ساتھ A_x کی تبدیلی کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن نہیں ہے۔یہ مساوات $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ کا ذکر تک نہیں کرتا۔ہاں اگر ہمیں $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کے بارے میں بھی معلومات فراہم ہوتی تب x محدد کے ساتھ A_x کی تبدیلی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوتا چونکہ دئے گئے سمتی دباو سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آخر میں یہ بھی بتانا ضروری ہے کہ $\boldsymbol{A}$ کے بارے میں ہماری تمام معلومات جزوی تفرقی مساوات کی صورت میں ہیں جن سے $\boldsymbol{A}$ کے حصول کے وقت تکمل کا مستقل شامل کرنا ضروری ہے۔کسی بھی حقیقی مسئلہ جس میں مکمل خلاء کے لئے حل درکار ہو میں ایسا مستقل صفر کے برابر ہو گا چونکہ کوئی بھی میدان لا محدود فاصلے پر صفر ہی ہو گا۔

اس مثال سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر ہمیں لامحدود خلاء میں کسی بھی نقطے پر سمتی میدان کی قیمت معلوم ہو تب اس سمتی میدان کو تمام خلاء میں میدان کی گردش اور پھیلاو سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ہمیں مکمل آزادی ہے کہ جیسے چاہیں $\boldsymbol{A}$ کا پھیلاو بیان کریں۔ ہم مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 کو مد نظر رکھتے ہوئے یوں $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کے لئے سادہ ترین تفاعل

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \tag{9.68}$$

لکھتے ہیں جس سے مساوات 9.66

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \tag{9.69}$$

صورت اختیار کر لے گی جبکہ مساوات 9.67

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{9.70}$$

صورت اختیار کر لے گی۔

مندرجہ بالا دو مساوات متحرک امواج سے متعلق ہیں جن پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔ان مساوات کی مشابہت بھی حیرت انگیز ہے۔باب کے اس حصے میں، وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے، حاصل کئے گئے نتائج یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{9.71}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \tag{9.72}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{9.73}$$

اگلے باب میں متحرک امواج پر غور کیا جائے گا۔آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتے برقناطیسی میدان متحرک امواج پیدا کرتے ہیں جن کی رفتار v

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{9.74}$$

کے برابر ہوتی ہے۔خلاء میں یہ رفتار تقریباً $3 \times 10^8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کے برابر ہوتی ہے جو خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔اس سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ نقطہ N_1 پر کثافت بار سے دور کسی نقطے N_2 پر دباو کی قیمت اسی لمحے کثافت بار کی قیمت پر منحصر نہیں ہوتی بلکہ کچھ دیر قبل کی کثافت بار پر منحصر ہوتی ہے۔کثافت بار میں تبدیلی کی خبر N_1 سے N_2 تک رفتار v سے پہنچتی ہے لہٰذا ان نقطوں کے درمیان فاصلہ R ہونے کی صورت میں یہ خبر $\frac{R}{v}$ سیکنڈ تاخیر سے پہنچے گی۔اس طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.59 کی نئی شکل

$$V = \int_h \frac{[\rho_h]}{4\pi\epsilon R} \, \mathrm{d}h \tag{9.75}$$

ہو گی جہاں $[\rho_h]$ سے مراد یہ ہے کہ مساوات میں وقت t کی جگہ تاخیری وقت t' استعمال کیا جائے یعنی

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

یوں اگر خلاء میں کثافت بار

$$\rho_h = e^{-r} \cos \omega t$$

ہو تب

$$[\rho_h] = e^{-r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

ہو گا جہاں R تفرقی بار سے اس نقطے تک فاصلہ ہے جہاں اس تفرقی بار سے پیدا دباو کا حصول درکار ہو۔

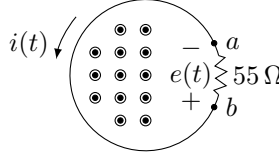
اسی طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.60 کی نئی شکل یعنی تاخیری سمتی مقناطیسی دباو کی مساوات

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu[\boldsymbol{J}]}{4\pi R} \, \mathrm{d}h \tag{9.76}$$

ہو گی۔

تاخیری وقت کے استعمال کی بنا پر ایسے دباو کو تاخیری دباو[13] کہا جاتا ہے۔

تاخیری برقی اور تاخیری مقناطیسی دباو کے استعمال سے برقناطیسی مسئلے نسبتاً زیادہ آسانی سے حل ہوتے ہیں۔ یوں اگر ہمیں ρ اور $\boldsymbol{J}$ معلوم ہوں تب ہم مساوات 9.75 اور مساوات 9.76 سے V اور $\boldsymbol{A}$ حاصل کر سکتے ہیں جن سے مقناطیسی میدان بذریعہ مساوات 9.71 اور برقی میدان بذریعہ مساوات 9.73 حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ اگر ہمیں ρ اور $\boldsymbol{J}$ کی قیمتیں معلوم نہ ہوں اور نا ہی ان کی قیمتوں کا اندازہ لگانا ممکن ہو تب تاخیری دباو، میکس ویل مساوات کے حل سے زیادہ، مددگار ثابت نہیں ہوتے۔

[13] retarded potential

شکل 9.6: دائرے میں یکساں مقناطیسی بہاو، محرک برقی دباو پیدا کرتا ہے۔

سوالات

سوال 9.1: رداس $\rho = 12\,\text{cm}$ کے گول دائرے میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا، یکساں مقناطیسی میدان $B(t) = 0.15 \sin 1000t\,\text{Wb}$ ہے جو دائرے میں محرک برقی دباو $e(t)$ پیدا کرتا ہے۔گول دائرے کی مزاحمت $55\,\Omega$ ہے۔محرک برقی دباو، گول دائرے میں برقی رو $i(t)$ پیدا کرتی ہے۔برقی رو $i(t)$ سے پیدا مقناطیسی بہاو کو نظر انداز کرتے ہوئے $e(t)$ اور $i(t)$ حاصل کریں۔صورت حال شکل 9.6 میں دکھائی گئی ہے جہاں صفحہ سے اوپر کی جانب باہر نکلتی مقناطیسی میدان کو چھوٹے دائروں میں بند نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

جوابات: $-6.78 \cos 1000t\,\text{V}$ ، $-123 \cos 1000t\,\text{mA}$

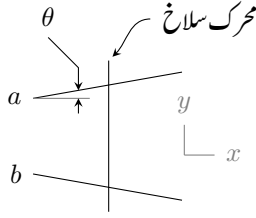
سوال 9.2: سطح $z = 0$ پر موصل تار کے مستطیل کے اطراف $x = \mp 2\,\text{m}$ ، $y = \mp 1.5\,\text{m}$ پر ہیں۔وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B} = (0.25\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 0.55\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.1\boldsymbol{a}_{\text{Z}}) \sin 1200t\,\text{T}$ ہے۔مستطیل کی کل مزاحمت $R = 4200\,\Omega$ ہے۔مثبت z محدد کی جانب سے دیکھتے ہوئے، گھڑی کی سمت میں برقی رو حاصل کریں۔برقی رو سے پیدا ثانوی مقناطیسی میدان کو نظر انداز کرتے ہوئے حل کریں۔

جواب: $343 \cos 1200t\,\text{mA}$

سوال 9.3: مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B} = 5 \cos(1.2 \times 10^8 \pi t - \pi y)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\mu\text{T}$ ہے۔مندرجہ ذیل فرضی یا غیر موصل دائروں پر $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت میں بڑھتا محرک برقی دباو حاصل کریں۔الف) $(0,0,0)$ تا $(1,0,0)$ تا $(1,1,0)$ تا $(0,1,0)$ تا $(0,0,0)$ ؛ ب) $(0,0,0)$ تا $(2,0,0)$ تا $(2,2,0)$ تا $(0,2,0)$ تا $(0,0,0)$

جوابات: $600[\cos(1.2 \times 10^8 \pi t - \pi) - \cos(1.2 \times 10^8 \pi t)]\,\text{V}$ ، $0\,\text{V}$

سوال 9.4: رداس $\rho = 1\,\text{mm}$ اور $\rho = 3\,\text{mm}$ کے ہم محوری تار میں

$$\boldsymbol{H} = \frac{0.122}{\rho} \cos 5 \times 10^8 \pi t \cos 0.5\pi z \boldsymbol{a}_\phi\, \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

محرک سلاخ
θ
a y x
b

شکل 9.7: محرک سلاخ پر مقناطیسی میدان محرک دباو پیدا کرتا ہے۔

پایا جاتا ہے۔ مستطیل $(0.001, 0°, 0)$ تا $(0.003, 0°, 0)$ تا $(0.003, 0°, 1.5)$ تا $(0.001, 0°, 1.5)$ تا $(0.001, 0°, 0)$ میں محرک برقی دباو حاصل کریں۔

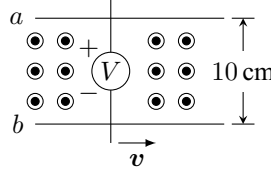
جواب: $119\sin(5\times10^{8}\pi t)\,\mathrm{V}$

سوال 9.5: لمحہ $t=0$ پر موصل تار کے مستطیل کے اطراف $x=\mp0.4\,\mathrm{m}$ اور $y=\mp0.6\,\mathrm{m}$ پر ہیں۔ یہ مستطیل $6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کی سمتی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ غیر یکساں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}=3x^{2}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{T}$ ہے۔ مستطیل کی مزاحمت $R=100\,\Omega$ ہے۔ مستطیل میں طاقت کا اخراج حاصل کریں۔ ساکن سلاخوں میں کتنی محرک برقی دباو پیدا ہوتی ہے۔

جواب: $P=2.12\,\mathrm{mW}$ ، $0\,\mathrm{V}$

سوال 9.6: شکل 9.7 میں دو ساکن موصل سلاخ x محدد کے ساتھ $\theta=\mp10°$ کا زاویہ بناتے ہیں۔ صفحہ کے بالائی سطح سے نکلتی مقناطیسی میدان $B=0.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\mathrm{T}$ ہے۔ محرک سلاخ کی رفتار $v=8\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے۔ ساکن سلاخوں کے بائیں سروں کے درمیان فاصلہ $2\,\mathrm{cm}$ ہے۔ ان کے مابین آلہ پیما برقی دباو v_{ab} ناپتا ہے۔ الف) محرک سلاخ کے مقام کو $t=0$ پر $x=0$ لیتے ہوئے آلہ پیمائش پر حاصل برقی دباو کو مساوات 9.1 سے حاصل کریں۔ ب) اسی محرک دباو کو مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ کی مدد سے حاصل کریں۔ پ) محرک سلاخ کا مقام $x=50t^{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہونے کی صورت میں جواب حاصل کریں۔

جوابات: الف اور ب: $v_{ab}=-11.285t-0.08\,\mathrm{V}$ ، پ) $v_{ab}=-881.6t^{3}-t\,\mathrm{V}$

سوال 9.7: رداس $\rho=0.5\,\mathrm{cm}$ اور $\rho=4\,\mathrm{cm}$ کی ہم محوری تار میں میدان $H_{\phi}=\frac{5}{\rho}\cos(2\pi\times10^{7}t-5z)$ اور $E_{\rho}=\frac{8\pi^{2}}{\rho}\cos(2\pi\times10^{7}t-5z)$ پائے جاتے ہیں۔ الف) مساوات 9.28 کے دونوں اطراف حل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ ہم محوری تار میں موجود میدان اس پر پورا اترتے ہیں۔ ب) سمتی

شکل 9.8: کھلے دور اور بند دور میں محرک برقی دباو۔

سطح $\phi=0$ ، $0.5\,\mathrm{cm}<\rho<4\,\mathrm{cm}$ ، $0<z<1\,\mathrm{cm}$ اور اس کے محیط پر مساوات 9.4 کے دونوں اطراف حل کرتے ہوئے محرک برقی دباو حاصل کریں۔ سمتی سطح کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ لیں۔ یوں محیط پر چلتے ہوئے $z=1\,\mathrm{cm}$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ سمت میں چلنا ہو گا۔

جوابات: $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{40\pi^2}{\rho}\sin(2\pi\times10^7t-5z)\boldsymbol{a}_\phi$ ، $\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=52.26[\cos(2\pi\times10^7t-0.05)-\cos(2\pi\times10^7t)]\,\mathrm{V}$

سوال 9.8: شکل 9.8 میں $\boldsymbol{B}=0.55\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{T}$ اور $\boldsymbol{v}=6\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہیں۔ محرک سلاخ میں انتہائی زیادہ مزاحمت رکھتا پیما برقی دباو V نسب ہے۔ الف) ساکن سلاخوں کے بائیں اور دائیں سرے آزاد رکھتے ہوئے پیما پر کیا برقی دباو حاصل ہو گی۔ ب) ساکن سلاخوں کے بائیں سرے a اور b آپس میں موصل تار سے جوڑنے کے بعد پیما پر کیا حاصل ہو گا۔ پ) ساکن سلاخوں کے دائیں سرے آپس میں موصل تار سے جوڑنے کے بعد پیما پر کیا حاصل ہو گا۔ ت) ساکن سلاخ کے بائیں سرے آپس میں اور ان کے دائیں سرے آپس میں جوڑ کر پیما کیا پڑھے گا۔

جوابات: $0\,\mathrm{V}$ ، $3.3\,\mathrm{V}$ ، $3.3\,\mathrm{V}$ ، $3.3\,\mathrm{V}$

سوال 9.9: برقی میدان $E=E_0\cos1500t\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں مندرجہ ذیل اشیاء میں ایصالی برقی رو اور انتقالی برقی رو کی شرح حاصل کریں۔ الف) تانبا جس کے مستقل $\epsilon_R=1$ اور $\sigma=5.8\times10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ ب) مقطر پانی جس کے مستقل $\epsilon_R=80$ اور $\sigma=10^{-4}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ پ) کوارٹز جس کے مستقل $\epsilon_R=3.8$ اور $\sigma=10^{-17}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔

جوابات: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ، 4.4×10^{15} ، 94 ، 2×10^{-10}

سوال 9.10: برقی میدان $E=E_0e^{\frac{t}{\tau}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں مندرجہ ذیل اشیاء میں ایصالی برقی رو اور انتقالی برقی رو کی شرح حاصل کریں جہاں $\tau=10^{-7}$ کے برابر ہے۔ الف) تانبا جس کے مستقل $\epsilon_R=1$ اور

$\sigma = 5.8 \times 10^7 \, \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ ب) مقطر پانی جس کے مستقل $\epsilon_R = 80$ اور $\sigma = 10^{-4} \, \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ پ) کوارٹز جس کے مستقل $\epsilon_R = 3.8$ اور $\sigma = 10^{-17} \, \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔

جوابات: $\frac{\sigma\tau}{\epsilon}$ ، 6.5×10^{11} ، 0.014 ، 2.97×10^{-11}

سوال 9.11: محدد z پر موجود ہم محوری تار کی لمبائی $12 \, \text{cm}$ جبکہ اس کے رداس $2 \, \text{mm}$ اور $6 \, \text{mm}$ ہیں۔ دونوں تاروں کے درمیان مادے کے مستقل $\mu = 5 \times 10^{-6} \, \frac{\text{H}}{\text{m}}$ ، $\epsilon = 2 \times 10^{-11} \, \frac{\text{F}}{\text{m}}$ اور $\sigma = 4 \times 10^{-5} \, \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔تار میں $\boldsymbol{E} = \frac{10^4}{\rho} \cos(10^6 t) \boldsymbol{a}_\rho \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{J}$ ، I_c ، $\boldsymbol{J}_d$ ، I_d اور $\frac{|I_d|}{|I_c|}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{0.5}{\rho} \cos(10^6 t) \boldsymbol{a}_\rho \, \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ ، $0.12\pi \cos 10^6 t \, \text{A}$ ، $-\frac{0.1}{\rho} \sin 10^6 t \, \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ ، $-0.024\pi \sin 10^6 t \, \text{A}$ ، 0.2

سوال 9.12: رداس ρ_1 اور ρ_2 کے ہم محوری تار کی لمبائی l ہے۔تار کو بیرونی دور $V_0 \cos \omega t$ برقی دباو فراہم کرتی ہے۔تار میں برقی میدان $\boldsymbol{E}$ کی مساوات لکھتے ہوئے $\boldsymbol{J}_d$ اور I_d حاصل کریں۔ثابت کریں کہ انتقالی برقی رو بیرونی دور میں پائی جانے والی ایصالی برقی رو کے برابر ہے۔

جوابات: $\boldsymbol{E} = \frac{V_0 \cos \omega t}{\rho \ln \frac{b}{a}} \boldsymbol{a}_\rho \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{J}_d = \frac{-\omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\rho \ln \frac{b}{a}} \boldsymbol{a}_\rho$ ، $I_d = -\frac{2\pi l \omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\ln \frac{b}{a}}$ ، $I_c = C \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi l \omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\ln \frac{b}{a}}$

سوال 9.13: مساوات 9.22 کی پہلی مساوات کے دونوں اطراف پھیلاو کا عمل استعمال کرتے ہوئے استمراری مساوات حاصل کریں۔

جواب: $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = 0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$

سوال 9.14: ایک خطہ جہاں $\boldsymbol{E} = 32 \sin ax \cos 5y \cos(2 \times 10^{10} t) \boldsymbol{a}_\text{Z}$ ہے کے مستقل $\mu_R = 2.5$ ، $\epsilon_R = 1.2$ اور $\sigma = 0$ ہیں۔میکس ویل کی مساوات استعمال کرتے ہوئے a کی مثبت قیمت دریافت کریں۔تمام تکمل کے مستقل کو صفر لیں۔

جواب: $a = 115.44 \, \text{m}^{-1}$

سوال 9.15: ایک ترسیلی تار میں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H} = 15\cos(4\times10^9 t - \beta z)\boldsymbol{a}_{\text{X}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ ترسیلی تار کے درکار مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 5$ اور $\sigma = 0$ ہیں۔ میکس ویل کی مساوات استعمال کرتے ہوئے β کی مثبت قیمت دریافت کریں۔

جواب: $\beta = 29.83\,\text{m}^{-1}$

سوال 9.16: محدد کے مبدا سے گزرتی موصل سطح پر $\boldsymbol{E} = (33\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 12\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 25\boldsymbol{a}_{\text{Z}})\cos(10^7 t)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ سطح کے قریب خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 12$ اور $\mu_R = 1.6$ ہیں۔ نقطہ $(0,0,0)$ پر موصل سطح پہ کثافت بار حاصل کریں۔ اس نقطے پر سطح کے متوازی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $4.58\cos(10^7 t)\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، 0

سوال 9.17: خطہ $z < 0$ میں $\epsilon_{R1} = 1$ ، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں جبکہ خطہ $z > 0$ میں $\epsilon_{R2} = 9$ ، $\mu_{R2} = 4$ اور $\sigma_2 = 0$ ہیں۔ پہلے خطے میں میدان $\boldsymbol{E}_1 = [10\cos(10^9 t - 3.336z) - 2\cos(10^9 t + 3.336z)]\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور دوسرے خطے میں $\boldsymbol{E}_2 = (A\cos(10^9 t - 20.014z))\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ ہیں۔ الف) مستقل A کی قیمت دریافت کریں۔ ب) مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_1$ اور $\boldsymbol{H}_2$ حاصل کریں۔ پ) ثابت کریں کہ مقناطیسی میدان سرحدی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔

جوابات: $A = 8$ ، $\boldsymbol{H}_1 = [-0.0265\cos(10^9 t - 3.336z) - 0.0053\cos(10^9 t + 3.336z)]\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ، $\boldsymbol{H}_2 = -0.0318\cos(10^9 t - 20.014z)\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ، $H_{m1} = H_{m2}$

سوال 9.18: خلاء میں مساوات 9.9 نلکی محدد میں میدان دیتی ہے۔ خلاء میں $\boldsymbol{J} = 0$ لیتے ہوئے میکس ویل کی مساوات $\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ حاصل $\boldsymbol{E}$ سے میکس ویل کی مساوات $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ کی مدد سے واپس $\boldsymbol{B}$ حاصل کریں۔ یوں ثابت کریں کہ دی گئی میدان میکس ویل کی مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

جواب: چونکہ ہمیں واپس ابتدائی میدان حاصل نہیں ہوتا لہٰذا یہ میدان میکس ویل کی مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

سوال 9.19: دو عدد ہم محوری موصل نلکی $\rho = 1\,\text{cm}$ اور $\rho = 10\,\text{cm}$ کے ساتھ سطح $z = 0$ اور $z = 50\,\text{cm}$ مل کر ڈبیا بناتے ہیں۔ اس ڈبیا میں موجود ذو برق کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 1.5$ اور $\mu_R = 2.5$ ہیں جبکہ اس میں درج ذیل میدان پایا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{H} = \frac{10}{\rho}\cos 2\pi z\sin(6\pi 10^7 t)\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$$

الف) نقطہ $N(0.01, 30°, 0.02)$ پر سطحی کثافت برقی رو حاصل کریں۔ ب) برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ پ) نقطہ $N(0.015, 0°, 0.2)$ پر سطحی کثافت بار حاصل کریں۔ ت) نقطہ $N(0.015, 0°, 0.2)$ پر انتقالی برقی رو حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{K} = 992 \sin(6\pi 10^7 t)\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{E} = -\frac{25098}{\rho}\sin 2\pi z \cos(6\pi 10^7 t)\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\rho_S = -21.1\cos(6\pi 10^7 t)\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ ، $\boldsymbol{J} = 3984\sin(6\pi 10^7 t)\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m^2}}$

سوال 9.20: خلاء میں $V = x(z - ct)\,\mathrm{V}$ اور $\boldsymbol{A} = x(\frac{z}{c} - t)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\,\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}}$ پائے جاتے ہیں جہاں $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ کے برابر ہے۔الف) ثابت کریں کہ $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$ کے برابر ہے۔ ب) میدان $\boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{H}$ ، $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔ پ) ثابت کریں کہ $\boldsymbol{J} = 0$ اور $\rho_h = 0$ کی صورت میں حاصل میدان میکس ویل کی چار مساواتوں پر پورا اترتے ہیں۔

جوابات:الف) چونکہ $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = x\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ اور $\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{x}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ ہیں لہٰذا $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$ ہو گا۔
ب) $\boldsymbol{B} = (t - \frac{z}{c})\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\,\mathrm{T}$ ، $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}(t - \frac{z}{c})\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{E} = (ct - z)\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{D} = \epsilon_0(ct - z)\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$
پ) حاصل میدان مساوات 9.28 تا مساوات 9.31 پر پورا اترتے ہیں۔

سوال 9.21: خلاء میں دو عدد موصل چادر $y = 0$ اور $y = y_0$ پر پائے جاتے ہیں۔ان کے درمیان درج ذیل میدان پایا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{E} = 10^4\cos(10^7 t - 6z)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

الف) $\boldsymbol{B}$ حاصل کریں۔ ب) $\boldsymbol{A}(x, 0, z, t) = 0$ کی صورت میں $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ حاصل کریں۔ پ) $V(x, 0, z, t) = 0$ کی صورت میں $V(x, y, z, t)$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{B} = -\frac{3}{500}\cos(10^7 t - 6z)\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\,\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{A}(x, y, z, t) = -\frac{3y}{500}\cos(10^7 t - 6z)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\,\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}}$ ، $V(x, y, z, t) = -3.21\times 10^8 y\cos(10^7 t - 6z)\,\mathrm{V}$

باب10

مستوی امواج

لامحدود خطہ جس کی کوئی سرحد نہ ہو میں میکس ویل مساوات کا حل سادہ ترین مسئلہ ہے البتہ اس سے حاصل نتائج انتہائی دلچسپ اور معلوماتی ثابت ہوتے ہیں۔آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے جبکہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔چونکہ برقی میدان بار کی بدولت جبکہ مقناطیسی میدان برقی رو کی بدولت ہے لہٰذا بار یا رو میں کسی بھی تبدیلی سے باہمی تعاون کے بدلتے برقی میدان اور بدلتے مقناطیسی میدان یعنی **برقناطیسی**[1] موج پیدا ہوتی ہے۔ایسی امواج کی **تعدد**[2] کا دارومدار بار یا رو (یا دونوں) میں تبدیلی کی شرح پر منحصر ہے۔یوں ω **زاویائی تعدد**[3] پر سائن نما شکل میں ارتعاش کرتا بار ω زاویائی تعدد کی سائن نما موج ہی پیدا کرتی ہے۔برقناطیسی امواج روشنی کی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔انسانی آنکھ مخصوص تعدد کی برقناطیسی امواج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔برقناطیسی امواج کے تعدد کی وہ پٹی جو ہمیں نظر آتی ہیں **روشنی**[4] کہلاتی ہے۔سائن نما موج کو اس کی تعدد f یا **دوری عرصے**[5] λ سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ ہم 380 nm تا 750 nm کے دوری عرصے کے برقناطیسی امواج دیکھ سکتے ہیں۔

---

[1] electromagnetic
[2] frequency
[3] angular frequency
[4] light
[5] time period

دو اشیاء کی سرحد پر برقناطیسی موج پر غور کرنے سے شعاعی انعکاس[6]، شعاعی انعطاف[7] اور انکسار امواج[8] کے حقائق دریافت ہوتے ہیں۔ مختصراً شعاع کی تمام خصوصیات میکس ویل کی مساوات سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

10.1 خلاء میں برقناطیسی مستوی امواج

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم کے اندر کسی بھی طرح پہنچایا گیا اضافی بار باہمی قوت دفع سے آخر کار جسم کی سطح پر پہنچ جاتا ہے۔ اگر ان لمحات کو نظر انداز کیا جائے جتنی دیر آزاد بار سطح تک پہنچتا ہے تو جسم کے حجم میں $\rho_h = 0$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس کتاب میں $\rho_h = 0$ ہی تصور کرتے ہوئے برقناطیسی امواج پر غور کیا جائے گا لہٰذا ایسا ہی تصور کرتے ہوئے صفحہ 415 پر دیئے گئے میکس ویل مساوات یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{10.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{10.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{10.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{10.4}$$

جہاں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ کے علاوہ قانون اوہم کی نقطہ شکل $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ کے استعمال سے تمام مساوات صرف دو متغیرات $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کی صورت میں لکھے گئے ہیں۔

اس سے پہلے کہ ہم ان مساوات کو حل کریں، آئیں انہیں صرف دیکھ کر فیصلہ کریں کہ خلاء میں ان سے کیا نتائج اخذ کئے جا سکتے ہیں۔ خلاء میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ مساوات 10.1 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد برقی میدان کی گردش پیدا ہوتی ہے۔ گردش سے مراد ایسا میدان ہے جو بند دائرے پر اس نقطے کے گرد گھومتا ہو۔ اگر مقناطیسی میدان کی قیمت زیادہ ہو تب برقی گردش کی قیمت بھی زیادہ ہو گی اور اگر مقناطیسی میدان کی قیمت کم ہو تب گردش بھی کم ہو گی۔ یوں دو حقائق سامنے آتے ہیں۔ پہلی حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی نقطے پر بدلتا مقناطیسی میدان اس نقطے کے گرد، یعنی نقطے سے ذرا دور، برقی میدان پیدا کرتا ہے اور دوسری حقیقت یہ کہ پہلے میدان کی قیمت کم یا زیادہ کرنے سے پیدا میدان کی قیمت بھی تبدیل ہوتی ہے یعنی بدلتا مقناطیسی میدان، بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اسی طرح مساوات 10.2 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس

---

reflection[6]
refraction[7]
diffraction[8]

نقطے کے گرد مقناطیسی گردش پیدا ہوتی ہے۔یہاں بھی صاف واضح ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی، اس نقطے سے ذرا دور، بدلتا مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان کچھ فاصلے پر، آگے کی سمت میں، بدلتا برقی میدان پیدا کرتا ہے جو مزید آگے مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے اور یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، ایسے جڑواں، ہاتھ میں ہاتھ ڈالے، حرکت کرتے بدلتے برقی اور بدلتے مقناطیسی میدان کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ یعنی تقریباً $3 \times 10^8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے جو خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔

10.2 برقناطیسی مستوی امواج

میکس ویل مساوات کے حل دوری سمتیات[9] کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں لہٰذا پہلے دوری سمتیہ پر غور کرتے ہیں جو آپ نے برقی ادوار حل کرتے وقت ضرور استعمال کئے ہوں گے۔

سائن نما لہر کی عمومی شکل

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) \tag{10.5}$$

ہے جہاں

$$\omega = 2\pi f \tag{10.6}$$

زاویائی تعدد[10] اور ψ **زاویائی ہٹاو**[11] ہیں جبکہ E_{xyz} از خود x، y، z اور ω کا **تابع تفاعل**[12] ہو سکتا ہے۔تعدد f کی اکائی ہرٹز[13] ہے۔یہاں دھیان رہے کہ E_{xyz} وقت t کا تابع نہیں ہے۔

کسی بھی متغیرہ x کے لئے **یولر مماثل**[14] کو $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ لکھا جاتا ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ **خیالی عدد**[15] ہے۔آزاد متغیرہ $\omega t + \psi$ کے لئے یولر مماثل

$$e^{j(\omega t + \psi)} = \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)$$

---

phasor[9]
angular frequency[10]
phase angle[11]
dependent function[12]
Hertz[13]
Euler's identity[14]
imaginary number[15]

لکھا جا سکتا ہے جو **حقیقی**[16] اور **خیالی**[17] اجزاء پر مشتمل **مخلوط تفاعل**[18] ہے۔یوں $\cos(\omega t+\psi)$ کو $e^{j(\omega t+\psi)}$ کا حقیقی جزو تصور کیا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$E_y=E_{xyz}\cos(\omega t+\psi)=\left[E_{xyz}e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}}=\left[E_{xyz}e^{j\omega t}e^{j\psi}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں زیر نوشت میں حقیقی لکھنے سے مراد یہ ہے کہ پورے تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے۔مندرجہ بالا مساوات کو بطور دوری سمتیہ یوں

$$E_{ys}=E_{xyz}e^{j\psi}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھا جاتا ہے۔اس مساوات کے بائیں ہاتھ E_{ys} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں لکھی گئی ہے لہٰذا یاد رہے کہ اصل تفاعل میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور پورے تفاعل کا صرف حقیقی جزو ہی لیا جائے۔تفاعل E_{ys} کے زیر نوشت میں s دراصل اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ اس تفاعل کا آزاد متغیرہ، **مخلوط تعدد**[19] ہے۔ہمارے استعمال میں s خیالی عدد یعنی $s=j\omega$ ہو گا۔

اب $E_y=10.5\cos(10^6t-0.35z)$ کو دوری سمتیہ کی شکل میں لکھنے کی خاطر اسے یولر مماثل کے حقیقی جزو

$$E_y=\left[10.5e^{j(10^6t-0.35z)}\right]_{\text{حقیقی}}=\left[10.5e^{j10^6t}e^{-j0.35z}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھنے کے بعد e^{j10^6t} اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے یوں

$$E_{ys}=10.5e^{-j0.35z}$$

لکھا جائے گا جہاں بائیں ہاتھ E_{ys} میں زیر نوشت میں s کا اضافہ کیا گیا۔یاد رہے کہ E_y حقیقی تفاعل ہے جبکہ E_{ys} عموماً مخلوط تفاعل ہوتا ہے۔

دوری سمتیہ سے اصل تفاعل حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے حاصل جواب کا حقیقی جزو لیا جاتا ہے۔

---

[16] real
[17] imaginary
[18] complex function
[19] complex frequency

مساوات 10.5 کا وقت کے ساتھ جزوی تفرق

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}[E_{xyz}\cos(\omega t+\psi)] = -\omega E_{xyz}\sin(\omega t+\psi)\\ &= \left[j\omega E_{xyz}e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔یہ عمومی نتیجہ ہے جس کے تحت وقت کے ساتھ تفاعل کا تفرق، دوری سمتیہ کو $j\omega$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔یوں مثال کے طور پر اگر

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو تب اسی کی دوری سمتیہ شکل

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو گی۔اسی طرح سائن نما میدان کے لئے میکس ویل کی مساوات بھی با آسانی دوری سمتیہ کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu\boldsymbol{H}_s \tag{10.7}$$

لکھا جائے گا۔میکس ویل کی بقایا مساوات کو بھی دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_s = \left(\sigma+j\omega\epsilon\right)\boldsymbol{E}_s \tag{10.8}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_s = 0 \tag{10.9}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}_s = 0 \tag{10.10}$$

آئیں ان مساوات سے امواج کی مساوات حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 10.7 کی گردش

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}_s = \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_s\right) - \nabla^2\boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{H}_s$$

میں مساوات 10.8 اور مساوات 10.9 پر کرنے سے

$$\nabla^2\boldsymbol{E}_s = j\omega\mu\left(\sigma+j\omega\epsilon\right)\boldsymbol{E}_s = \gamma^2\boldsymbol{E}_s \tag{10.11}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\gamma = \mp\sqrt{j\omega\mu\left(\sigma + j\omega\epsilon\right)} \tag{10.12}$$

حرکی مستقل[20] کہلاتا ہے۔چونکہ $j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$ مخلوط عدد ہے لہٰذا اس کا جزر γ بھی مخلوط عدد ہو گا جسے

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{10.13}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں α اور β مثبت اور حقیقی اعداد ہیں۔مساوات 10.12 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \tag{10.14}$$

جہاں کسی وجہ سے صرف مثبت قیمت لی گئی ہے۔یہ وجہ آپ کو جلد بتلا دی جائے گی۔

مساوات 10.11 سمتی ہلم ہولٹز مساوات[21][22] کہلاتی ہے۔کارتیسی محدد میں بھی سمتی ہلم ہولٹز مساوات کی بڑی شکل کافی پیچیدہ نظر آتی ہے چونکہ اس سے چار چار اجزاء پر مشتمل تین عدد مساوات نکلتے ہیں۔کارتیسی محدد میں اس کی x مساوات

$$\nabla^2 E_{xs} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.15}$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.16}$$

ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمارے دلچسپی کے میدان نا تو x اور نا ہی y کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں۔ایسی صورت میں $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} = 0$ اور $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} = 0$ ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.17}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اس طرح کی دو رتبی تفرقی مساوات آپ نے پڑھی ہو گی لہٰذا میں توقع رکھتا ہوں کہ آپ اس کے حل

$$E_{xs} = Ae^{-\gamma z} \tag{10.18}$$

---

[20] propagation constant
[21] vector Helmholtz equation
[22] ہرمن لڈوگ فرڈینانڈ ون ہلم ہولٹز جرمنی کے عالم طبیعیات تھے۔

اور

$$E_{xs} = Be^{\gamma z} \tag{10.19}$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $\gamma = \alpha + j\beta$ پر کرتے ہوئے ان جوابات میں سے مساوات 10.18 پر غور کریں۔ مساوات 10.18 درحقیقت دوری سمتیہ ہے لہٰذا اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر

$$\begin{aligned} E_x &= \left[Ae^{j\omega t}e^{-(\alpha+j\beta)z}\right]_{\text{حقیقی}} \\ &= \left[Ae^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}\right]_{\text{حقیقی}} \end{aligned}$$

حقیقی جزو

$$E_x = Ae^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$$

لیتے ہیں۔ مساوات کے مستقل A کی جگہ $t = 0$ اور $z = 0$ پر میدان کی قیمت E_0 پر کرتے ہوئے اصل حل

$$E_x = E_0e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \tag{10.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ **مستوی موج**[23] کی وہ مساوات ہے جس کی تلاش میں ہم نکلے تھے۔ اگر ہم مساوات 10.19 کو لے کر آگے بڑھتے تو مساوات 10.20 کی جگہ موج کی مساوات

$$E_x = E_0e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z) \tag{10.21}$$

حاصل ہوتی۔

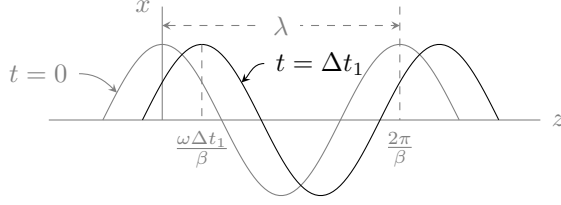
مساوات 10.18 میں $A = E_0$ پر کرتے ہوئے اس کی سمتیہ شکل

$$\boldsymbol{E}_s = E_0e^{-\gamma z}\boldsymbol{a}_{\text{X}} \tag{10.22}$$

لکھی جا سکتی ہے جو صرف $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ جزو پر مشتمل ہے۔ آئیں مساوات 10.20 میں دئے **متحرک موج**[24] پر اب غور کریں۔ مساوات 10.20 کہتی ہے کہ برقی میدان ہر نقطے پر x محدد کے متوازی ہے۔ اگر z کی قیمت تبدیل نہ کی جائے تب x اور y تبدیل کرنے سے میدان تبدیل نہیں ہوتا۔

مساوات 10.20 میں z بڑھانے سے α کی وجہ سے موج کی چوٹی گھٹتی ہے لہٰذا α **تضعیفی مستقل**[25] کہلاتا ہے۔ موج کی چوٹی طاقت کے ضیاع کی وجہ سے گھٹتی ہے۔ یوں بے **ضیاع**[26] خطے میں $\alpha = 0$ ہو گا جبکہ **ضیاع کار**[27] خطے میں

---

plane wave[23]
travelling wave[24]
attenuation constant[25]
loss less[26]
lossy[27]

شکل 10.1: وقت $t = 0$ اور $t = t_1$ پر خلاء میں موج کا مقام۔

$\alpha > 0$ ہو گا۔ تضعیفی مستقل کو نیپر[28] فی میٹر $\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ میں ناپا[29] جاتا ہے۔یوں مساوات 10.20 میں e کی طاقت یعنی αz بے بعد[30] مقدار نیپر Np میں ہو گی۔ موج کی مساوات میں $-\beta z$ زاویائی ہٹاو ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے لہٰذا β زاویائی مستقل[31] کہلاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی میٹر $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہے۔

بے ضیاع خطے میں $\alpha = 0$ جبکہ ضیاع کار خطے میں $\alpha > 0$ ہو گا۔اس کتاب میں انہیں غیر عامل[32] خطوں پر بحث کی جائے گی۔یہاں بتلاتا چلوں کہ $\alpha < 0$ بھی ممکن ہے۔ایسی صورت میں موج کا حیطہ مسلسل بڑھتا جائے گا۔منفی α کی صورت میں α کو افزائشی مستقل[33] کہا جاتا ہے۔لیزر[34] میں $\alpha < 0$ حاصل کرتے ہوئے شعاع کی طاقت بڑھائی جاتی ہے۔لیزر عامل[35] خطہ ہے۔

موج کی مساوات میں $\alpha = 0$ تصور کرتے ہوئے اسے وقت $t = 0$ پر شکل 10.1 میں ہلکی سیاہی سے دکھایا گیا ہے۔یہاں دھیان رہے کہ شکل میں z محدد کو افقی دکھایا گیا ہے۔جیسے آپ دیکھ سکتے ہیں $t = 0$ پر موج کی دو آپس میں قریبی چوٹیاں $z = 0$ اور $z = \frac{2\pi}{\beta}$ پر پائی جاتی ہیں۔دو آپس میں قریبی چوٹیوں کے درمیان فاصلے کو طول موج[36] کہا جاتا ہے اور λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں اس موج کی طول موج

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{10.23}$$

---

[28] neper
[29] تضعیفی مستقل کی اکائی جان نیپر کے نام سے منسوب ہے۔
[30] dimensionless
[31] phase constant
[32] passive
[33] gain coefficient
[34] laser
[35] active region
[36] wavelength

ہے جس سے

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{10.24}$$

لکھا جا سکتا ہے جو انتہائی اہم نتیجہ ہے۔

موج کی مساوات ہی کو وقت $t=\Delta t_1$ پر شکل 10.1 میں دوبارہ گاڑھی سیاہی میں بھی دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیے میں موج نے دائیں جانب یعنی z بڑھنے کی طرف حرکت کی ہے۔یوں صاف ظاہر ہے کہ یہ موج وقت کے ساتھ مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے۔ دورانیہ Δt_1 میں موج کی چوٹی نے $\frac{\omega\Delta t_1}{\beta}$ فاصلہ طے کیا ہے لہٰذا موج کی رفتار کو

$$v=\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\omega\Delta t_1}{\beta}\frac{1}{\Delta t_1}=\frac{\omega}{\beta} \tag{10.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 10.24 کو مساوات 10.25 میں پر کرنے سے

$$v=f\lambda \tag{10.26}$$

حاصل ہوتا ہے جو λ طول موج اور f تعدد رکھنے والے موج کی رفتار v دیتی ہے۔

مساوات 10.20 میں مساوات 10.25 استعمال کرتے ہوئے

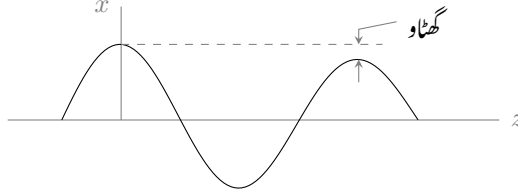
$$E_x=E_0e^{-\alpha z}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)\right] \tag{10.27}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 10.25 اور مساوات 10.24 کی مدد سے

$$E_x=E_0e^{-\alpha z}\cos\left(\omega t-\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \tag{10.28}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

موج کی رفتار کو مساوات 10.20 سے دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔اس مساوات کے تحت کسی بھی لمحہ t پر موج کی چوٹی اس مقام پر ہو گی جہاں

$$\omega t-\beta z=0$$

شکل 10.2: موج چلتے ہوئے آہستہ آہستہ کمزور ہوتی رہتی ہے۔

ہو۔ چونکہ رفتار $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کو کہتے ہیں لہٰذا اس مساوات کے تفرق

$$\omega \, \mathrm{d}t - \beta \, \mathrm{d}z = 0$$

سے رفتار

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta} \tag{10.29}$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل 10.2 میں α کو صفر تصور نہیں کیا گیا ہے۔ ایسی صورت میں موج کی چوٹی، z کے ساتھ بتدریج گھٹتی ہے لہٰذا $\alpha = 0.001 \, \frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں $1 \, \mathrm{km}$ کے فاصلے پر موج کی چوٹی، ابتدائی چوٹی کے $0.368 = \frac{e^{-1}}{e^{-0}}$ گنا رہ گئی ہو گی جہاں ابتدائی چوٹی $z = 0$ پر لی گئی ہے۔

برقی موج $\boldsymbol{E}_s$ سے مساوات 10.7

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

کی مدد سے مقناطیسی موج با آسانی حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 10.22 استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات سے

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

یا

$$\boldsymbol{H}_s = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 10.12 سے مثبت γ کی قیمت پر کرنے سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_s &= \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}} E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \\ &= \frac{E_0}{Z} e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \end{aligned} \tag{10.30}$$

ملتا ہے جہاں دوسرے قدم پر

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \tag{10.31}$$

لکھا گیا ہے۔اس مساوات کو

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}} \tag{10.32}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 10.22 کی غیر سمتی صورت یعنی $E_{xs} = E_0 e^{-\gamma z}$ کو مساوات 10.30 کے غیر سمتی صورت یعنی $H_{ys} = \frac{E_0}{Z} e^{-\gamma z}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{E_{xs}}{H_{ys}} = Z \tag{10.33}$$

ملتا ہے۔

یہاں ذرا رک کر ایک برقی دور پر غور کرتے ہیں۔منبع برقی دباو $V_0 \cos(\omega t - \psi)$ جسے دوری سمتیہ $V_0 e^{-j\psi}$ لکھا جا سکتا ہے کے ساتھ سلسلہ وار مزاحمت R، امالہ L اور برق گیر (کپیسٹر) C جڑے ہیں جن کی رکاوٹ Z

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = |Z|\, e^{j\theta_Z} = |Z| \underline{/\theta_Z}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں X مثبت ہو گا جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں یہ منفی ہو گا۔مزید $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں دور خالص مزاحمتی رکاوٹ پیش کرے گا اور $\theta_Z = 0$ ہو گا۔اس دور میں برقی رو دوری سمتیہ کی مدد سے

$$I_s = \frac{V_s}{Z_s} = \frac{V_0 e^{-j\psi}}{|Z|\, e^{j\theta_Z}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j(\psi + \theta_Z)}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$i = \frac{V_0}{|Z|} \cos \left(\omega t - \psi - \theta_Z\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ برقی دباو اور برقی رو ایک ہی تعدد رکھتے ہیں البتہ ان میں زاویائی ہٹاو θ_Z پایا جاتا ہے۔ مثبت X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی ہٹاو کے برابر برقی دباو کے پیچھے رہتی ہے جبکہ منفی X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی ہٹاو کے برابر برقی دباو کے آگے رہتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ برقی دباو اور برقی رو کی شرح

$$\frac{V_s}{I_s} = |Z| \, e^{j\theta_Z} = Z$$

کے برابر ہے جسے رکاوٹ کہتے ہیں۔

آئیں اب دوبارہ امواج کی بات کریں۔ برقی موج کو برقی دباو تصور کرتے ہوئے اور مقناطیسی موج کو برقی رو تصور کرتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ دونوں مسائل ہوبہو یکساں ہیں۔ اسی وجہ سے برقی موج E_{xs} اور مقناطیسی موج H_{ys} کی شرح Z، **قدرتی رکاوٹ**[37] کہلاتی ہے۔ بالکل برقی رکاوٹ کی طرح قدرتی رکاوٹ حقیقی یا خیالی یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی اکائی اوہم Ω ہے۔

مساوات 10.30 سے مقناطیسی موج

$$H_y = \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|Z|} \cos \left(\omega t - \beta z - \theta_Z\right) \tag{10.34}$$

لکھی جائے گی جہاں قدرتی رکاوٹ کو

$$Z = |Z| \, e^{j\theta_Z} \tag{10.35}$$

لکھا گیا۔

مساوات 10.20 کے تحت برقی میدان x محدد کے متوازی ہے جبکہ مساوات 10.34 کے تحت مقناطیسی میدان y محدد کے متوازی ہے لہٰذا یہ میدان آپس میں ہر وقت عمودی رہتے ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں امواج z سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ یوں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت بھی آپس میں عمودی ہیں۔ ایسی امواج جن میں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت عمودی ہوں **عرضی امواج**[38] کہلاتے ہیں۔ پانی کی سطح پر لہریں بھی عرضی امواج ہوتی

[37] intrinsic impedance
[38] transverse waves

ہیں۔اسی طرح رسی کو کھینچ کر رکھتے ہوئے اسے جھٹکے سے ہلانے سے رسی میں عرضی موج پیدا ہوتی ہے۔**عرضی برقناطیسی موج**[39] میں برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں حرکت کے سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ باب 13 میں ایسی امواج پر غور کیا جائے گا جن میں صرف ایک میدان سمت حرکت کے عمودی ہو گا۔انہیں **عرضی برقی موج**[40] یا **عرضی مقناطیسی موج**[41] کا نام دیا گیا ہے۔

آئیں اب چند مخصوص صورتوں میں ان مساوات کو استعمال کرنا سیکھیں۔

10.2.1 خلاء میں امواج

خلاء میں $\sigma = 0$، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 1$ ہیں لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_R\mu_0\left(\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0\right)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\begin{aligned}\alpha &= 0\\ \beta &= \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔چونکہ خلاء میں $\alpha = 0$ ہے لہٰذا خلاء بے ضیاع خطہ ہے۔یوں خلاء میں برقناطیسی امواج کی رفتار، جسے روایتی طور پر c سے ظاہر کیا جاتا ہے، مساوات 10.25 سے

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \tag{10.36}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت

$$\begin{aligned}c = \frac{1}{\sqrt{4\times\pi\times10^{-7}\times8.854\times10^{-12}}} &= 2.99\times10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\\ &\approx 3\times10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

ہے۔

مساوات 10.31 سے خلاء کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_R\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

---

[39] transverse electromagnetic, TEM
[40] transverse electric wave, TE wave
[41] transverse magnetic wave, TM wave

حاصل ہوتی ہے۔قدرتی رکاوٹ کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم $9 \times 10^9 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ سے $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ لکھتے ہوئے

$$Z_0 = 120\pi \approx 377\,\Omega \tag{10.37}$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں خلاء میں کسی بھی لمحے، کسی بھی نقطے پر برقی میدان کی قیمت اس نقطے پر مقناطیسی میدان کے 377 گنا ہو گی۔

حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے خلاء میں متحرک موج کے میدان

$$E_x = E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$$
$$H_y = \frac{E_0}{120\pi}\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$$

لکھے جائیں گے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں میدان ہم زاویہ ہیں۔یوں کسی بھی نقطے پر بڑھتے برقی میدان کی صورت میں اس نقطے پر مقناطیسی میدان بھی بڑھتا ہے۔ان مساوات کے تحت امواج بالکل سیدھی حرکت کرتی ہیں اور نا وقت اور نا ہی فاصلے کے ساتھ ان کی طاقت میں کسی قسم کی کمی رونما ہوتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ کائنات کی دور ترین کہکشاؤں سے ہم تک برقناطیسی امواج پہنچتی ہیں اور ہمیں رات میں چمکتے اور خوبصورت تارے نظر آتے ہیں۔

مشق 10.1: بے تار[42] ذرائع ابلاغ میں 36 000 km کی اونچائی پر پرواز کرتے مصنوعی سیارے اہم کردار ادا کرتے ہیں۔یہ سیارے زمین کے اوپر ایک ہی نقطے پر آویزاں نظر آتے ہیں۔ان سیاروں سے زمین کے قریبی نقطے تک برقی اشارہ کتنی دیر میں پہنچے گا۔

جواب: 0.12 s

---

[42] wireless

مثال 10.1: خلاء میں $240\,\text{MHz}$ تعدد کی موج بڑھتے $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ سمت میں حرکت کر رہی ہے۔الف) λ ، β اور ω دریافت کریں۔ ب) لمحہ $t=0$ پہ موج کی $128\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ چوٹی محدد کے مبدا پر پائی جاتی ہے۔موج کی حقیقی اور دوری مساوات لکھیں۔ پ) اگر موج کی چوٹی لمحہ $t=1.2\,\text{ns}$ پر نقطہ $z=25\,\text{cm}$ پہ ہو تب موج کی مساوات کیا ہو گی؟

حل:الف) موج کی رفتار $c=3\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ لیتے ہوئے

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\times10^8}{240\times10^6}=\frac{5}{4}\text{m}$$

اور یوں

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{8\pi}{5}\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اب زاویائی تعدد حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega=2\pi f=4.8\pi\times10^8\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ب) حقیقی مساوات

$$E=128\cos\left(4.8\pi\times10^8t-\frac{8\pi}{5}z\right)$$

ہے جبکہ دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E=128e^{-j\frac{8\pi}{5}z}$$

پ) اب موج تاخیر سے محدد کے مبدا پر پہنچتی ہے۔موج کا تاخیری زاویہ θ لکھتے ہوئے موج کی مساوات

$$E=128\cos\left(4.8\pi\times10^8t-\frac{8\pi}{5}z+\theta\right)$$

ہو گی۔موج کی چوٹی $(4.8\pi\times10^8t-\frac{8\pi}{5}z+\theta)=0$ پر ہو گی لہٰذا $t=1.2\,\text{ns}$ اور $z=0.25\,\text{m}$ پر کرتے ہوئے $\theta=-0.176\pi$ حاصل ہوتا ہے۔یہ قیمت مندرجہ بالا مساوات میں استعمال کی جائے گی۔موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E_s=128e^{-j\pi(\frac{8}{5}z+0.176)}$$

مثال 10.2: لمحہ $t=0$ پہ محدد کے مبدا پر موج کی چوٹی $340\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے جبکہ $z=1.5\,\mathrm{m}$ وہ قریب ترین نقطہ ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے۔موج گھٹتے z کی سمت میں حرکت کر رہی ہے۔اس لمحہ برقی میدان اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_E=\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ کی سمت میں ہے۔ برقی موج کی مساوات لکھیں۔

حل:موج کی چوٹی اور صفر کے درمیان فاصلے سے $\frac{\lambda}{4}=1.5$ لکھ کر $\lambda=6\,\mathrm{m}$ حاصل ہوتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\beta=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\pi}{3}$ اور $f=\frac{3\times10^8}{6}=50\,\mathrm{MHz}$ حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے اور لمحہ $t=0$ پر اس کی چوٹی محدد کے مبدا پر پائی جاتی ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos\left(2\pi\times50\times10^6t+\frac{\pi}{3}z\right)$$

لکھا جائے گا۔لمحہ $t=0$ پر محدد کے مبدا پر میدان $340\boldsymbol{a}_E$ پایا جاتا ہے لہٰذا موج کی مکمل خاصیت مندرجہ ذیل مساوات بیان کرے گی۔

$$\boldsymbol{E}=340\left[\tfrac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+\tfrac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right]\cos\left(2\pi\times50\times10^6t+\frac{\pi}{3}z\right)$$

اس کی دوری شکل مندرجہ ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{E}_s=340\left[\tfrac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+\tfrac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right]e^{j\frac{\pi}{3}z}$$

مثال 10.3: خلاء میں برقی موج $\boldsymbol{E}_s=340\left[\tfrac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+\tfrac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right]e^{j\frac{\pi}{3}z}$ پائی جاتی ہے۔مقناطیسی موج کی مساوات لکھیں۔

حل: خلاء میں

$$\frac{E_0}{H_0}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=120\pi$$

سے مقناطیسی چوٹی کی قیمت

$$H_0=\frac{340}{120\pi}=\frac{17}{6\pi}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ حقیقی عدد ہے لہٰذا برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہیں۔خلاء میں موج کے برقی اور مقناطیسی میدان آپس میں عمودی ہوتے ہیں۔یوں مقناطیسی موج کی سمت میں سمتیہ $x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور برقی موج کی سمت میں سمتیہ $\boldsymbol{a}_E$ کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا یعنی

$$\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)\cdot(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})=0$$

ہو گا جس سے

$$2x+3y=0 \tag{10.38}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس میں x کی کوئی بھی قیمت پر کرتے ہوئے y کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔یوں $x=1$ پر کرنے سے $y=-\frac{2}{3}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مقناطیسی میدان $1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمتیہ کی سمت میں ہو گی۔اس طرح مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$\boldsymbol{a}_H=\frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}}=\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

ہو گی۔یاد رہے کہ $\boldsymbol{a}_E\times\boldsymbol{a}_H$ سے موج کی حرکت کی سمت حاصل ہوتی ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\boldsymbol{a}_E\times\boldsymbol{a}_H=(\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})\times(\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})=-\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

کے برابر ہے جو موج کی درست سمت ہے۔اب ہم مساوات 10.38 میں x کی قیمت منفی بھی پر کر سکتے تھے۔آئیں ایسا بھی کر کے دیکھ لیں۔اگر ہم $x=-1$ پر کرتے تب $y=\frac{2}{3}$ حاصل ہوتا جس سے اکائی سمتیہ $-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل ہوتی۔اس اکائی سمتیہ اور $\boldsymbol{a}_E$ کے سمتی ضرب سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتا ہے جو بالکل الٹ سمت میں

حرکت کرتی موج کی سمت ہے۔ظاہر ہے کہ ہم ان دو جوابات میں سے پہلے جواب کو ہی یہاں درست تسلیم کریں گے۔یوں مقناطیسی موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{H}_s = H_0 \boldsymbol{a}_H e^{j\frac{\pi}{3}z} = \frac{17}{6\pi}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\text{x}} - \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\text{y}}\right) e^{j\frac{\pi}{3}z}$$

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج

خالص یا کامل ذو برق سے مراد ایسا ذو برق ہے جس میں متحرک برقناطیسی امواج کی توانائی ضائع نہیں ہوتی۔خالص ذو برق میں $\sigma = 0$ جبکہ اس کا جزوی مقناطیسی مستقل μ_R اور جزوی برقی مستقل ϵ_R ہے لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0 \tag{10.39}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{10.40}$$

حاصل ہوتے ہیں۔کامل ذو برق میں $\alpha = 0$ ہے لہٰذا کامل ذو برق بے ضیاع ہے۔یوں خلاء میں برقناطیسی امواج کی رفتار مساوات 10.25 سے

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_R\mu_0\epsilon_R\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \tag{10.41}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ کو خلاء میں روشنی کی رفتار c لکھا گیا ہے۔چونکہ ذو برق میں $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں روشنی کی رفتار خلاء میں روشنی کی رفتار سے کم ہو گی۔خلاء میں روشنی کی رفتار اس کی زیادہ سے زیادہ رفتار ہے۔

موج کی رفتار اور تعدد سے طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \tag{10.42}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خلاء کی طول موج کو λ_0 لکھا گیا ہے۔اس مساوات سے ذو برق میں روشنی کی رفتار کم ہونے کی وجہ سامنے آتی ہے۔چونکہ $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں طول موج کم ہو جاتا ہے جس سے روشنی کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔

مساوات 10.31 سے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = Z_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خلاء کی قدرتی رکاوٹ کو Z_0 لکھا گیا ہے۔

یوں ذو برق میں امواج کی مساوات

$$E_x = E_0\cos(\omega t - \beta z) \tag{10.43}$$

$$H_y = \frac{E_0}{Z}\cos(\omega t - \beta z) \tag{10.44}$$

ہیں۔

مثال 10.4: پانی کے لئے $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 78.4$ اور $\sigma = 0$ لیتے ہوئے 300 MHz تعدد کے برقناطیسی امواج کی رفتار، طول موج اور قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ برقی میدان $50\,\frac{\text{mV}}{\text{m}}$ ہونے کی صورت میں برقی اور مقناطیسی امواج کی مساوات لکھیں۔ہم $\sigma = 0$ لیتے ہوئے درحقیقت پانی میں توانائی کے ضیاع کو نظرانداز کر رہے ہیں۔

حل:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{78.4}} = 0.3388\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.3388\times10^8}{300\times10^6} = 11.29\,\text{cm}$$

ہیں جبکہ خلاء میں $\lambda = 1\,\text{m}$ ہے۔بقایا مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.7\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

اور

$$Z = Z_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78.4}} = 42.58\,\Omega$$

ہیں۔امواج کی مساوات

$$\begin{aligned}
E_x &= 0.05\cos(6\pi 10^8 t - 55.7z) \\
H_y &= \frac{0.05}{42.58}\cos(6\pi 10^8 t - 55.7z) = 0.00117\cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)
\end{aligned}$$

ہیں۔

مشق 10.2: کتاب کے آخر میں مختلف اشیاء کے طبعی مستقل دئے گئے ہیں۔انہیں استعمال کرتے ہوئے ابرق میں، طاقت کے ضیاع کو نظرانداز کرتے ہوئے، $5.6\,\mathrm{GHz}$ اور $10\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$ حیطے کی مقناطیسی میدان پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- موج کی رفتار،
- طول موج،
- زاویائی مستقل،
- قدرتی رکاوٹ،
- برقی میدان کا حیطہ۔

جوابات: $1.29\times10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$، $23\,\mathrm{cm}$، $272.6\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$، $162.1\,\Omega$ اور $1.62\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج

کامل ذو برق میں امواج پر غور کے بعد فطری طور ناقص ذو برق پر بات کرنا ضروری ہے لہٰذا صاف پانی کو مثال بناتے ہوئے 20 GHz تعدد پر ایسا ہی کرتے ہیں۔ صفحہ 461 پر شکل 10.4 میں صاف پانی کے طبعی مستقل دیئے گئے ہیں۔

اس تعدد پر صاف پانی کے طبعی مستقل $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ چونکہ پانی غیر مقناطیسی ہے لہٰذا اس کا $\mu_R = 1$ ہو گا۔ یوں

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.8$$

اور

$$\begin{aligned}\gamma &= j2 \times \pi \times 20 \times 10^9 \times \frac{\sqrt{1 \times 41}}{3 \times 10^8}\sqrt{1 - j0.8}\\ &= 3035\underline{/70.67^\circ}\\ &= 1005 + j2864 \quad \text{m}^{-1}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں پانی کا تضعیفی مستقل

$$\alpha = 1005\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$$

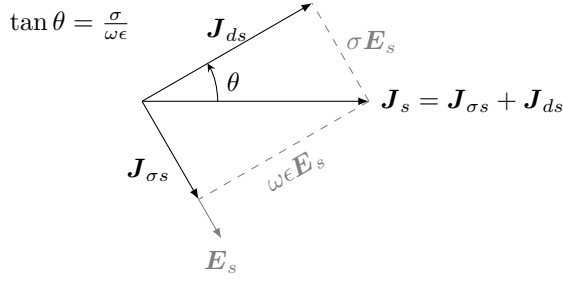
ہے جس کا مطلب ہے کہ پانی میں ہر $\frac{1}{1005}$ میٹر یعنی 1 mm فاصلہ طے کرنے پر برقی اور مقناطیسی امواج 0.368 گنا گھٹ جائیں گی۔ پانی میں $\alpha \neq 0$ ہے لہٰذا پانی ضیاع کار ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں ریڈار[43] پانی میں کیوں کام نہیں کرتا۔ اسی طرح بارش کی صورت میں بھی ریڈار کی کارکردگی بری طرح متاثر ہوتی ہے۔ پانی میں دیکھنے کی خاطر موج آواز استعمال کی جاتی ہیں۔

تضعیفی مستقل کو عموماً ڈیسی بیل[44] فی میٹر میں ناپا جاتا ہے جہاں $1\,\text{Np} = 8.69\,\text{dB}$ کے برابر ہے۔ یوں مندرجہ بالا جواب کو

$$\alpha = 1005 \times 8.69 = 8733\,\frac{\text{dB}}{\text{m}}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

---

[43] radar
[44] decibel, dB

شکل 10.3: طاقت کے ضیاع کا تکون۔

زاویائی مستقل

$$\beta = 2864 \, \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

ہے جو $\sigma = 0$ کی صورت میں $2682 \, \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا پانی کی موصلیت سے زاویائی مستقل زیادہ متاثر نہیں ہوا۔ اس تعدد پر خلاء میں طول موج $1.5 \, \text{cm}$ ہے جبکہ پانی میں $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ سے طول موج $2.19 \, \text{mm}$ ہے۔

قدرتی رکاوٹ

$$Z = \frac{377}{\sqrt{41}} \frac{1}{\sqrt{1 - j0.8}} = 52\underline{/19.33^\circ} = 49.1 + j17.2 \quad \Omega$$

ہے لہٰذا E_x ہر نقطے پر H_y سے 19.33° آگے ہے۔

میکس ویل کی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{J}_{\sigma s} + \boldsymbol{J}_{ds}$$

میں ایصالی اور انتقالی کثافت برقی رو کے سمتی مجموعے کو شکل 10.3 میں بطور مجموعی کثافت رو $\boldsymbol{J}_s$ دکھایا گیا ہے۔ایصالی رو اور انتقالی رو آپس میں 90° درجے کا زاویہ بناتے ہیں۔انتقالی رو 90° آگے رہتا ہے۔یہ بالکل متوازی جڑے مزاحمت اور برق گیر (کپیسٹر) کی رو کی طرح صورت حال ہے۔برق گیر (کپیسٹر) کی رو، مزاحمت کی رو سے 90° آگے رہتی ہے۔مزید یہ کہ مزاحمت کی رو سے برقی طاقت کا ضیاع پیدا ہوتا ہے جبکہ برق گیر (کپیسٹر) کی رو سے ایسا نہیں ہوتا۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 10.3 میں زاویہ θ (جس کا کروی محدد کے زاویہ θ کے ساتھ کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں ہے) کو دیکھیں جس کے لئے

$$\tan\theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \tag{10.45}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں اس تکون کو طاقت کے ضیاع کا تکون پکارا جاتا ہے اور $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی شرح کو **ضیاعی ٹینجنٹ**[45] یا **مماس ضیاع** کہا جاتا ہے۔

مساوات 10.14 اور مساوات 10.32 کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھا گیا۔کسی ذو برق کے کامل یا غیر کامل ہونے کا فیصلہ اس کے مماس ضیاع کی قیمت کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔اگر اس شرح کی قیمت اکائی کے قریب ہو تب ذو برق غیر کامل قرار دیا جاتا ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ کی صورت میں ذو برق کو کامل تصور کیا جاتا ہے۔

کم مماس ضیاع کی صورت میں حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی کارآمد مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو **مسئلہ ثنائی**[46]

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

جہاں $|x| < 1$ ہے، کی مدد سے تسلسل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔اگر ہم $x = -\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ اور $n = \frac{1}{2}$ لیں تو حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + \cdots\right]$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\alpha \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{10.46}$$

اور

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] \tag{10.47}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اگر $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ ہو تب

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{10.48}$$

---

[45] loss tangent
[46] binomial theorem

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ بالکل اسی طرح قدرتی رکاوٹ کو

$$Z \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left[1-\frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2+j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right] \tag{10.49}$$

یا

$$Z \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(1+j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) \tag{10.50}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ ان مساوات سے حاصل جوابات اصل مساوات کے جوابات کے کتنے قریب ہیں۔ ایسے صاف پانی کی مثال کو دوبارہ حل کر کے دیکھتے ہیں۔ صاف پانی کے طبعی مستقل 20 GHz یعنی $125\,\frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ تعدد پر $\mu_R=1$، $\epsilon_R=41$ اور $\sigma=36.7\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں لہٰذا مساوات 10.46 سے

$$\alpha = 1080\,\frac{\text{Np}}{\text{m}} \qquad (9385\,\frac{\text{dB}}{\text{m}})$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ حاصل کردہ قیمت $1005\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ کے کافی قریب ہے۔ مساوات 10.47 سے

$$\beta = 2897\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتی ہے جو گزشتہ جواب $2864\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ کے بہت قریب ہے۔ مساوات 10.48 سے حاصل جواب

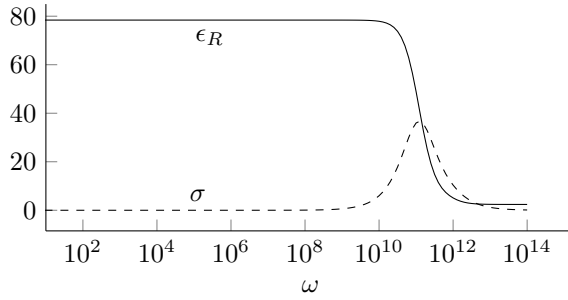
$$\beta = 2682\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

درست جواب سے نسبتاً زیادہ مختلف ہے۔ قدرتی رکاوٹ مساوات 10.49 سے

$$Z = 44.75 + j23.55$$

حاصل ہوتا ہے جو $49.1 + j17.2$ کے بہت قریب ہے البتہ مساوات 10.50 سے حاصل جواب

$$Z = 58.88 + j23.55$$

قدر مختلف ہے۔ صاف پانی کی اس مثال میں مماس ضیاع 0.8 ہے جو اکائی سے بہت کم نہیں ہے، اسی لئے جوابات پہلے سے قدر مختلف حاصل ہوئے۔ چونکہ موصلیت اور برقی مستقل کی بالکل درست قیمتیں عموماً ہمیں معلوم نہیں ہوتیں

شکل 10.4: صاف پانی کا جزوی برقی مستقل بالمقابل زاویائی تعدد اور موصلیت بالمقابل زاویائی تعدد۔

لہٰذا سادہ مساوات سے حاصل جوابات کے اس فرق کو زیادہ اہمیت نہیں دینی چاہئے۔ بہتر یہی ہوتا ہے کہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 0.1$ ہی کی صورت میں سادہ مساوات استعمال کی جائیں۔

عموماً ذو برق کی موصلیت تعدد بڑھانے سے غیر خطی طور پر بڑھتی ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی قیمت میں تبدیلی نسبتاً کم ہوتی ہے۔یہی وجہ مماس ضیاع کی اہمیت کا راز ہے۔یاد رہے کہ مختلف تعدد پر موصلیت، برقی مستقل اور مماس ضیاع نہایت تیزی سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ایسا عموماً نظر آنے والی روشنی سے قدر کم یا قدر زیادہ تعدد پر ہوتا ہے۔

شکل 10.4 میں صاف پانی کا جزوی برقی مستقل ϵ_R بالمقابل زاویائی تعدد ω ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ موصلیت بالمقابل تعدد نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔افقی محدد تعدد کا لوگارتھم $(\log \omega)$ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تقریباً $10\,\frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ تعدد تک $\epsilon_R = 78.4$ رہتا ہے جبکہ اس سے بلند تعدد پر اس کی قیمت گھٹ کر 2.4 ہو جاتی ہے۔موصلیت کی چوٹی تقریباً $36.7\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔دیگر ذو برق کے خط مختلف اشکال کے ہوں گے۔

مشق 10.3: ایک مادے کے طبعی مستقل $1\,\text{MHz}$ تعدد پر $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 2.8$ اور $\sigma = 10\,\frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ اس مادے کے مماس ضیاع، تضعیفی مستقل اور زاویائی مستقل حاصل کریں۔تضعیفی مستقل کی قیمت $\frac{\text{dB}}{\text{m}}$ میں کیا ہو گی۔

جوابات: 0.0642، $1.13 \times 10^{-3}\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ اور $3.51 \times 10^{-4}\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$، $9.8 \times 10^{-3}\,\frac{\text{dB}}{\text{m}}$

مشق 10.4: ایک غیر مقناطیسی مادے کا مماس ضیاع 0.07 جبکہ 4.7 = μ_R ہیں۔ان قیمتوں کو 1 MHz تا 80 MHz تعدد کے درمیان اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔اس کا تضعیفی مستقل اور مادے میں طول موج 20 MHz اور 60 MHz تعدد پر حاصل کریں۔

جوابات: $0.031\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ یا $0.269\,\frac{\text{dB}}{\text{m}}$ ، $6.9\,\text{m}$ ، $0.095\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ یا $0.826\,\frac{\text{dB}}{\text{m}}$ ، $2.3\,\text{m}$

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ

امواج کی طاقت جاننے کے لئے مسئلہ پوئنٹنگ[47] درکار ہو گا لہٰذا پہلے اسے[48] حاصل کرتے ہیں۔

میکس ویل کی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

کا $\boldsymbol{E}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

لیتے ہوئے سمتی مماثل (جسے آپ با آسانی کارتیسی محدد میں ثابت کر سکتے ہیں)

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E}$$

کے ذریعہ

$$\boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} - \nabla\left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\right) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

---

[47] Poynting theorem

[48] جان ہینری پوئنٹنگ نے 1884 میں پہلی مرتبہ اس مسئلے کو پیش کیا۔

$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ حاصل ہوتا ہے۔اس میں پر کرنے سے

$$-\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla \left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\right) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

یا

$$-\nabla \left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\right) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \epsilon \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب

$$\epsilon \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2}\right)$$

اور

$$\mu \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2}\right)$$

لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا

$$-\nabla \left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\right) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کے حجمی تکمل

$$-\int_h \nabla \cdot \left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\right) \mathrm{d}h = \int_h \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}h + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right) \mathrm{d}h$$

پر مسئلہ پھیلاو کے اطلاق سے

$$-\oint_S \left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}h + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right) \mathrm{d}h \tag{10.51}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو کی بات کرتے ہیں۔اگر پورے حجم میں کہیں پر بھی منبع طاقت موجود نہ ہو تب یہ تکمل حجم میں کل لمحاتی مزاحمتی طاقت کا ضیاع دیتا ہے۔اگر حجم میں منبع طاقت پایا جاتا ہو تب ان منبع کے حجم پر تکمل کی قیمت مثبت ہو گی اگر منبع کو طاقت فراہم کی جا رہی ہو اور یہ تکمل منفی ہو گا اگر منبع طاقت فراہم کر رہا ہو۔

مساوات کے دائیں ہاتھ دوسرا تکمل حجم میں توانائی کا کل ذخیرہ دیتا ہے جس کا وقت کے ساتھ تفرق حجم میں ذخیرہ توانائی میں لمحاتی تبدیلی یعنی طاقت دیتا ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ حجم میں داخل ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔یوں حجم سے کل خارجی طاقت

$$\oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{S}$$

ہو گا جہاں حجم گھیرتی سطح پر تکمل لیا گیا ہے۔سمتی ضرب $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ پوئنٹنگ سمتیہ [49] پکارا اور $\mathscr{P}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$\mathscr{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{10.52}$$

جس سے مراد لمحاتی طاقت کی کثافت لی جاتی ہے جو واٹ فی مربع میٹر $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ میں ناپی جاتی ہے۔یہاں بھی برقی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}$ یا مقناطیسی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}$ کے استعمال کی طرح یاد رہے کہ پوئنٹنگ سمتیہ کا بند سطح پر تکمل ہی حقیقی معنی رکھتا ہے اور ایسا تکمل سطح سے خارج ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔کسی بھی نقطے پر $\mathscr{P}$ کی سمت اس نقطے پر لمحاتی طاقت کے بہاو کی سمت دیتا ہے۔

چونکہ $\mathscr{P}$ برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں کے عمودی ہے لہٰذا طاقت کا بہاو بھی دونوں میدان کے عمودی سمت میں ہو گا۔ہم نے برقناطیسی امواج پر تبصرے کے دوران دیکھا کہ امواج کی حرکت کی سمت $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کے عمودی ہوتی ہے لہٰذا $\mathscr{P}$ کی سمت ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔مزید کامل ذو برق میں

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$
$$H_y = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega t - \beta z)$$

سے لمحاتی کثافت سطحی بہاو طاقت

$$E_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times H_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = \frac{E_0^2}{Z} \cos^2(\omega t - \beta z) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \mathscr{P} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

حاصل ہوتی ہے۔اوسط کثافت طاقت حاصل کرنے کی خاطر ہم ایک پھیرے یعنی $T = \frac{1}{f}$ دورانیے کا تکمل لیتے

---

[49] Poynting vector

ہوئے دوری عرصہ T پر تقسیم

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= f\int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{Z}\cos^2(\omega t-\beta z)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{f}{2}\frac{E_0^2}{Z}\int_0^{\frac{1}{f}}\left[1+\cos(2\omega t-2\beta z)\right]\mathrm{d}t\\ &= \frac{f}{2}\frac{E_0^2}{Z}\left[t+\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t-2\beta z)\right]_0^{\frac{1}{f}}\end{aligned}$$

کرتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{Z} \quad \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \tag{10.53}$$

حاصل کرتے ہیں جو z سمت میں کثافت طاقت کا بہاو دیتا ہے۔اگر میدان کی چوٹی E_0 کی جگہ اس کی موثر قیمت $E_{\text{موثر}}$ استعمال کی جائے تب مندرجہ بالا مساوات میں $\frac{1}{2}$ کا جزو ضربی نہیں لکھا جائے گا۔

موج کی سمت کے عمودی سطح S سے یوں

$$P_{z,\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{Z}S \quad \mathrm{W}$$

طاقت گزرے گی۔

غیر کامل ذو برق کی صورت میں

$$Z = |Z|\,e^{j\theta_Z}$$

لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}E_x &= E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)\\ H_y &= \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|Z|}\cos\left(\omega t-\beta z-\theta_Z\right)\end{aligned} \tag{10.54}$$

ہوں گے جن سے

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= f\int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{|Z|}e^{-2\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)\cos\left(\omega t-\beta z-\theta_Z\right)\mathrm{d}t\\ &= f\int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{2|Z|}e^{-2\alpha z}\left[\cos(2\omega t-2\beta z-\theta_Z)+\cos\theta_Z\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|Z|}e^{-2\alpha z}\cos\theta_Z \tag{10.55}$$

حاصل ہوتا ہے۔

کثافت طاقت کی اوسط قیمت مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ

$$\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} \tag{10.56}$$

سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے جہاں جوڑی دار مخلوط[50] مقناطیسی موج استعمال کی جاتی ہے۔آئیں مساوات 10.55 کو اس ترکیب سے دوبارہ حاصل کریں۔مساوات 10.54 کی دوری سمتی شکل

$$\begin{aligned}
E_{sx} &= E_0 e^{-\alpha z - j\beta z} \\
H_{sy} &= \frac{E_0}{|Z|}e^{-\alpha z - j\beta z - j\theta_Z} \\
H_{sy}^* &= \frac{E_0}{|Z|}e^{-\alpha z + j\beta z + j\theta_Z}
\end{aligned}$$

ہے جہاں جوڑی دار مخلوط مقناطیسی موج H_{sy}^* بھی لکھی گئی ہے۔یوں

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^* &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|Z|}e^{-2\alpha z + j\theta_Z} \\
&= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|Z|}e^{-2\alpha z}\left(\cos\theta_Z + j\sin\theta_Z\right)
\end{aligned}$$

کا حقیقی حصہ لیتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|Z|}e^{-2\alpha z}\cos\theta_Z$$

کثافت اوسط توانائی کی مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اس کتاب میں اوسط کثافت توانائی حاصل کرتے وقت مساوات 10.56 استعمال کی جائے گی۔

---

[50] complex conjugate

مشق 10.5: ایک میگا ہرٹز، تین سو میگا ہرٹز اور تین گیگا ہرٹز کے تعدد پر صاف پانی کی برف کے جزو برقی مستقل بالترتیب 4.15، 3.45 اور 3.2 ہیں جبکہ اس کے مماس ضیاع بالترتیب 0.12، 0.035 اور 0.0009 ہیں۔ یکساں سطحی موج جس کی چوٹی $z = 0$ پر $100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو برف سے گزر رہی ہے۔ایک مربع میٹر سطح سے اوسط طاقت کا بہاو $z = 0$ اور $z = 5\,\mathrm{m}$ پر حاصل کریں۔

جوابات: $27.1\,\mathrm{W}$، $26.4\,\mathrm{W}$، $24.7\,\mathrm{W}$، $12.48\,\mathrm{W}$، $23.7\,\mathrm{W}$، $14.31\,\mathrm{W}$

مثال 10.5: z محدد پر $\sigma = 3.2 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ موصلیت کے غیر مقناطیسی مادے سے بنی لامحدود لمبائی کی سلاخ پائی جاتی ہے جس کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 1$ ہے۔اس سلاخ میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سمت $250\,\mathrm{A}$ کی یکساں یک سمت برقی رو گزر رہی ہے اور سلاخ کا رداس $2\,\mathrm{cm}$ ہے۔الف) سلاخ کی فی میٹر مزاحمت حاصل کریں۔ ب) سلاخ میں فی میٹر طاقت کا ضیاع I^2R سے حاصل کریں۔ پ) سلاخ میں $\boldsymbol{J}$ ، $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔ ت) سلاخ کی سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔ ٹ) رداس $5\,\mathrm{cm}$ کے نلکی سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ کے سطحی تکمل کے استعمال سے سلاخ کے قریب برقی میدان حاصل کریں۔

حل: الف) فی میٹر سلاخ کی مزاحمت حاصل کرتے ہیں۔

$$R = \frac{1}{3.2 \times 10^7 \times \pi \times 0.02^2} = 24.87\,\frac{\mu\Omega}{\mathrm{m}}$$

ب) فی میٹر سلاخ میں طاقت کا مزاحمتی ضیاع یوں حاصل ہو گا۔

$$P = I^2R = 250^2 \times 24.87 \times 10^{-6} = 1.554\,247\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$$

پ) سلاخ کا رقبہ عمودی تراش $A = \pi \times 0.02^2$ مربع میٹر ہے۔یوں سلاخ میں کثافت برقی رو

$$\boldsymbol{J} = \frac{I}{A}\boldsymbol{a}_{\text{Z}} = \frac{250}{\pi \times 0.02^2}\boldsymbol{a}_{\text{Z}} = 198949\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

ہو گی جس سے سلاخ میں برقی شدت $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma} = \frac{198949\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{3.2 \times 10^7} = 6.217 \times 10^{-3}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتی ہے۔دو سنٹی میٹر سے کم رداس $\rho < 2\,\text{cm}$ کا دائرہ کل

$$\frac{250 \times \pi \times \rho^2}{\pi \times 0.02^2} = 625000\rho^2$$

ایمپیئر کی برقی رو گھیرے گی۔یوں ایمپیئر کا دوری قانون استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے اندر رداس ρ پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{H}_\phi = \frac{625000\rho^2}{2\pi\rho} = 99472\rho\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$$

حاصل ہو گا۔

ت) پوئنٹنگ سمتیہ

$$\boldsymbol{\mathscr{P}} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -618.42\rho\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

ہے۔ہم $2\,\text{cm}$ کے انتہائی قریب لیکن اس سے ذرا کم رداس اور $1\,\text{m}$ لمبائی کی تصوراتی سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں مزاحمتی ضیاع حاصل کرتے ہیں۔اس ڈبی نما تصوراتی سطح کی نچلی اور بالائی سیدھی سمتی سطح بالترتیب $-\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ سمت میں ہیں جبکہ پوئنٹنگ سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ سمت میں ہے لہٰذا ان سطحوں پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔یوں سطحی تکمل حقیقت میں صرف تصوراتی سطح کے گول حصے پر لینا ضروری ہے۔ سطح میں داخل ہوتی طاقت

$$\int_S -\boldsymbol{\mathscr{P}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 618.42\rho^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{dz} = 1.554\,247\,\frac{\text{W}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\rho = 2\,\text{cm}$ پر کیا گیا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے دو سنٹی میٹر سے ذرا کم رداس چنا تا کہ سلاخ کے اندر حاصل کردہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان قابل استعمال ہوں۔

ٹ) سلاخ کے رداس سے زیادہ رداس پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل وہی طاقت دے گا جو سلاخ کی سطح پر تکمل لیتے ہوئے حاصل ہوا تھا۔مزاحمتی طاقت کا ضیاع ہمارے چنے گئے سطح پر منحصر نہیں ہے۔ $5\,\mathrm{cm}$ رداس اور $1\,\mathrm{m}$ لمبائی کی تصوراتی سطح لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ $5\,\mathrm{cm}$ کا گول دائرہ پورے $250\,\mathrm{A}$ کی برقی رو کو گھیرے گا۔یوں اس دائرے پر

$$\boldsymbol{H} = \frac{250}{2\pi \times 0.05}\boldsymbol{a}_\phi = 795.7747\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔سلاخ کی گول سطح پر برقی میدان $\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ سمت میں ہے۔سرحدی شرائط کے مطابق کسی بھی دو مختلف اجسام کی سرحد پر متوازی برقی میدان برابر ہوتے ہیں۔یوں لامحدود لمبائی کی سلاخ کے بالکل قریب برقی میدان $\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ سمت میں ہی ہو گا۔ایسا کوئی جواز نظر نہیں آتا کہ سلاخ سے دور میدان کیوں $\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ سمت میں نہ ہو۔یوں ہم $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ لیتے ہیں۔اس طرح تصوراتی سطح کی نچلی اور بالائی سطحوں پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔سلاخ میں داخل ہوتی طاقت تصوراتی سطح کے گول حصے پر تکمل سے حاصل ہو گا یعنی

$$\int_S -\boldsymbol{\mathscr{P}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 795.7747 E_0 \rho \,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{dz} = 250 E_0\,\mathrm{W}$$

جہاں $\rho = 5\,\mathrm{cm}$ پر کیا گیا ہے۔حاصل جواب کو $1.554\,247\,\mathrm{W}$ کے برابر پُر کرتے ہوئے سلاخ کے باہر

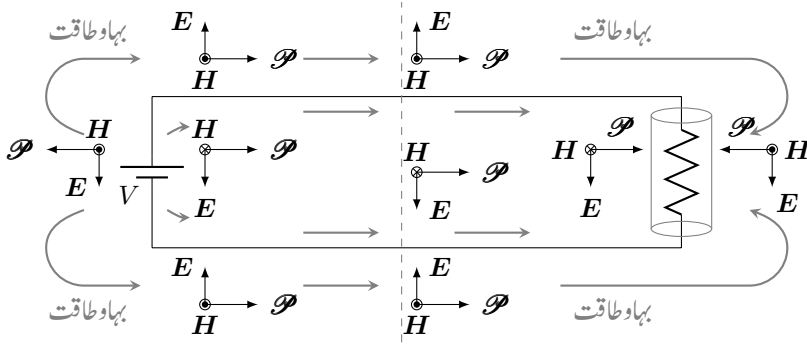
$$\boldsymbol{E} = 6.217 \times 10^{-3}\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مثال میں سلاخ کے باہر اور سلاخ کے اندر برابر برقی میدان پایا جاتا ہے۔

10.4 پوئنٹنگ سمتیہ اور برقی دور

شکل 10.5 میں منبع طاقت کے ساتھ مزاحمت R جوڑی گئی ہے۔اس برقی دور کو ہم عموماً حل کرتے ہوئے تصور کرتے ہیں کہ منبع طاقت برقی دباو V پیدا کرتی ہے جس سے دور میں برقی رو $I = \frac{V}{R}$ پیدا ہوتی ہے۔مزاحمت اور منبع طاقت جوڑنے والی تاروں میں یہ برقی رو گزرتی ہے۔یوں منبع سے مزاحمت تک $P = VI$ طاقت بذریعہ تار پہنچتی ہے۔آئیں پوئنٹنگ سمتیہ کیا کہتی ہے۔

شکل 10.5 میں مثبت اور منفی تاروں کے مابین

$$V = -\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{10.57}$$

شکل 10.5: برقی دور میں طاقت کا بہاو۔

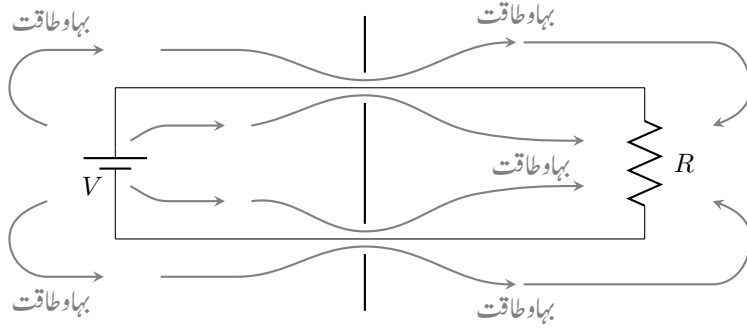
برقی دباو پایا جاتا ہے جہاں دو تاروں کے درمیان اس تکمل کو کسی بھی راستے پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{E}$ کی سمت مثبت تار سے منفی تار کی جانب ہے۔ اسی طرح تار یا منبع یا مزاحمت کے گرد میدان کا تکمل

$$I = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{10.58}$$

برقی رو دیتا ہے۔ شکل میں مختلف مقامات پر $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ دکھائے گئے ہیں۔ ان مقامات پر پوئنٹنگ سمتیہ $\mathscr{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ منبع طاقت پر پوئنٹنگ سمتیہ باہر کی جانب کو ہے جبکہ مزاحمت پر اس کی سمت اندر کی جانب کو ہے۔ منبع طاقت اور مزاحمت کے درمیان نقطہ دار سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ منبع سے مزاحمت کی جانب کو ہے۔ جگہ جگہ پوئنٹنگ سمتیات دریافت کرتے ہوئے طاقت کے بہاو کو دیکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں طاقت کے بہاو کو ہلکی سیاہی کی موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔

مزاحمت میں منتقل طاقت دریافت کرنے کی خاطر مزاحمت کو مکمل گھیرتی ہوئی کسی بھی بند سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ کے سطحی تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ شکل میں مزاحمت کے گرد فرضی نلکی ڈبیا دکھائی گئی ہے۔ فرض کریں کہ مزاحمت اسی نلکی ڈبیا کی شکل کا ہے۔ آئیں اس نلکی ڈبیا کی سطح پر تکمل

$$P = \oint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{اخراجی طاقت} \tag{10.59}$$

حاصل کریں جو اخراجی طاقت دے گی۔ فرض کریں کہ مزاحمت z محدد پر پڑا ہے اور اس کی لمبائی L جبکہ رداس a ہے۔ مزاحمت پر V برقی دباو پایا جاتا ہے لہٰذا اس میں میدان $\boldsymbol{E} = -\frac{V}{L}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہو گی۔ برقی سرحدی شرط کے تحت مزاحمت کے باہر سطح کے قریب برقی میدان یہی ہو گا۔ مزاحمت کی گول سطح پر مقناطیسی میدان کو ایمپیئر کے

شکل 10.6: برقی دور میں زمینی سطح سے طاقتی بہاو پر اثرات۔

دوری قانون سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو $\boldsymbol{H} = -\frac{I}{2\pi a}\boldsymbol{a}_\phi$ برابر حاصل ہوتا ہے۔ نلکی ڈبیا کے بالائی اور نچلی ڈھکنوں پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہے جبکہ گول سطح پر سطحی تکمل

$$\begin{aligned}\int\int (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_0^L\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot(a\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\rho)\\ &= \int_0^L\int_0^{2\pi} -\frac{VI}{2\pi a L} a\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\\ &= -VI \qquad \text{اخراجی طاقت}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ یوں مزاحمت میں داخل ہوتی طاقت $P = VI$ ہے جو ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔

شکل 10.6 میں منبع طاقت اور مزاحمت کے درمیان کسی مقام پر لامحدود زمینی سطح نسب کر دی گئی ہے۔ اس سطح پر دو باریک سوراخ ہیں جن میں سے برقی تار گزر رہی ہیں۔ زمینی سطح پر برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا زمینی سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ صفر کے برابر ہو گی۔ یوں اس سطح سے کوئی طاقت نہیں گزر سکتی۔ اس شکل میں بھی طاقت کے بہاو دکھایا گیا ہے۔ کسی بھی مقام پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل لیتے ہوئے ثابت ہوتا ہے کہ منتقل طاقت کی قیمت جوں کی توں رہتی ہے۔ زیادہ دلچسپ صورت حال زمینی سطح میں ان سوراخ پر پائی جاتی ہے۔ آپ دیکھیں گے کہ ان سوراخ میں برقی میدان کی قیمت اتنی بڑھ جاتی ہے کہ سوراخ میں سے گزرتی طاقت ہی مزاحمت کو منتقل ہوتی ہے۔

آپ نے دیکھا کہ طاقت دراصل برقی تاروں میں سے نہیں گزرتی بلکہ تاروں کے گرد خلاء میں سے گزرتی ہے۔ اس عجیب مگر درست نتیجے تک صرف برقناطیسیت کی مدد سے ہی ہم پہنچ پائیں ہیں۔

اگرچہ $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ عموماً طاقت ہی ظاہر کرتی ہے لیکن یہ ممکن ہے کہ ایسا نہ ہو۔مثلاً اگر زمینی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ اور ساکن بار کی برقی میدان $\boldsymbol{E}$ کو لیا جائے $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ سے ایسا ظاہر ہوتا ہے جیسے طاقت کا بہاو پایا جاتا ہے جبکہ ایسا ہرگز درست نہیں ہے۔پوئنٹنگ سمتیہ کے صحیح استعمال کے لئے ضروری ہے کہ جن مقناطیسی اور برقی میدان کی بات کی جائے، وہ دونوں آپس میں تعلق رکھتے ہوں۔ایسے تعلق رکھنے والے میدان کی صورت میں پوئنٹنگ سمتیہ ہر صورت طاقت کے بہاو کو ظاہر کرے گی۔

10.5 موصل میں امواج

موصل میں امواج پر غور کی خاطر ہم تصور کرتے ہیں کہ موصل سے جڑے ذو برق میں امواج پیدا کی جاتی ہیں۔ہم جاننا چاہتے ہیں کہ ایسی امواج ذو برق اور موصل کی سرحد پر موصل میں کیسے داخل ہوتی ہیں اور موصل میں ان کی کیا کارکردگی ہوتی ہے۔

ایصالی اور انتقالی رو کی شرح $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کو مماس ضیاع کہتے ہیں۔یوں ناقص موصل کی مماس ضیاع بلند تعدد پر کم ہو گی۔نائیکروم[51] ناقص موصل ہے جس کا مماس ضیاع 100 MHz تعدد پر تقریباً 2×10^8 ہے۔یوں کسی بھی موصل کے لئے $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ہوتا ہے۔اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے چند سادہ مساوات حاصل کرتے ہیں۔حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب

$$-j = 1\underline{/-90^\circ}$$

کے برابر ہے جس کا جزر

$$\sqrt{1\underline{/-90^\circ}} = 1\underline{/-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

[51] nichrome

ہے لہٰذا

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

یا

$$\gamma = (j+1)\sqrt{\pi f \mu\sigma} \tag{10.60}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu\sigma} \tag{10.61}$$

ملتا ہے۔

ان معلومات کے بعد کہا جا سکتا ہے کہ کسی بھی μاور σ مستقل رکھنے والے موصل کے α اور β ہر تعدد پر برابر ہی رہتے ہیں۔ یوں z سمت میں دوبارہ امواج فرض کرتے ہوئے موصل میں برقی میدان کی موج کو

$$E_x = E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu\sigma}) \tag{10.62}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $z < 0$ کامل ذو برق اور $z > 0$ موصل خطے ہوں تب ان کی سرحد $z = 0$ پر برقی سرحدی شرائط کے مطابق متوازی برقی میدان سرحد کے دونوں اطراف پر برابر ہوں گے۔مساوات 10.62 کے تحت سرحد پر موصل میں

$$E_x = E_0 \cos\omega t \qquad (z=0) \tag{10.63}$$

ہو گی اور یوں سرحد پر ذو برق میں بھی برقی میدان یہی ہو گا۔اب اسی حقیقت کو یوں بھی دیکھا جا سکتا ہے کہ سرحد پر ذو برق میں برقی میدان مساوات 10.63 دیتی ہے جو موصل میں سرحد پر اسی قیمت کا میدان پیدا کرتا ہے۔ایسا تصور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ہم ذو برق میں میدان کو منبع میدان تصور کرتے ہیں جو موصل میں مساوات 10.62 کی موج پیدا کرتا ہے۔موصل میں $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{10.64}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا موصل میں ہر نقطے پر کثافت رو اور برقی میدان راہ تناسب کا تعلق رکھتے ہیں اور یوں موصل میں

$$J_x = \sigma E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu\sigma}) \tag{10.65}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 10.7 میں J_x دکھایا گیا ہے جہاں عین سرحد یعنی $z = 0$ پر کثافت رو کی قیمت σE_0 کو J_0 لکھا گیا ہے۔

مساوات 10.62 اور مساوات 10.65 میں بہت سی معلومات پائی جاتی ہے۔ پہلے ان مساوات میں $e^{z\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ جزو پر غور کریں۔ سرحد پر اس کی قیمت $e^0 = 1$ کے برابر ہے جو سرحد سے

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

فاصلے پر $e^{-1} = 0.368$ رہ جاتی ہے۔ یہ فاصلہ **گہرائی جلد**[52] کہلاتا ہے اور اسے δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \tag{10.66}$$

برقی رو کا سطحی تہہ تک محدود رہنے کو **اثر جلد**[53] کہا جاتا ہے۔ یوں موصل میں

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \tag{10.67}$$

ہو گا۔ اسی طرح سرحد سے 2δ فاصلے پر میدان $e^{-2} = 0.135$ اور 4δ فاصلے پر میدان $e^{-4} = 0.018$ یعنی صرف 1.8 % رہ جائے گا۔

تانبے کی $\sigma = 5.8 \times 10^7 \, \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہے لہٰذا اس میں گہرائی جلد

$$\delta_{\text{تانبہ}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times f \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

میٹر کے برابر ہے۔ یوں 50 Hz کا میدان سرحد سے $\frac{0.0661}{\sqrt{50}} = 9.35\,\text{mm}$ فاصلے پر کم ہو کر صرف 0.368 گنا رہ جائے گا۔ برقی ادوار میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع رو کے مربع کے راست تناسب ہوتا ہے لہٰذا ہر ایک گہرائی جلد کے فاصلے پر کثافت طاقت $0.368^2 = 0.135$ گنا کم ہو گی۔ **خرد امواج**[54] کے تعدد یعنی 10 GHz پر گہرائی جلد $0.661\,\mu\text{m}$ یعنی نظر آنے والی روشنی کے طول کے آٹھویں حصے کے برابر ہے۔

ان تعدد پر کسی بھی موصل مثلاً تانبے میں سرحد سے چند ہی گہرائی جلد کے فاصلے پر تمام میدان تقریباً صفر کے برابر ہوتے ہیں۔ موصل کی سرحد پر پیدا کئے گئے برقی میدان یا کثافت رو، سرحد سے دوری کے ساتھ تیزی سے کم

[52] skin depth
[53] skin effect
[54] microwave

ہوتے ہیں۔ برقناطیسی طاقت موصل کے اندر نہیں بلکہ اس کے باہر صفر کرتی ہے۔موصل کا کام صرف اتنا ہے کہ یہ ان امواج کو راستہ دکھاتی ہے۔موصل کی سرحد پر پیدا کثافت رو، موصل میں موج کی حرکت کے عمودی سمت میں داخل ہوتی ہے جس سے موصل میں مزاحمتی ضیاع پیدا ہوتا ہے۔یوں موصل بطور راہ گیر کردار ادا کرتے ہوئے مزاحمتی ضیاع بطور اجرت حاصل کرتا ہے۔

اگر آپ کسی بجلی گھر میں 50 Hz کے برقی رو کو منتقل کرنے کی خاطر پانچ سنٹی میٹر رداس کے تانبے کی ٹھوس تار استعمال کر رہے ہوں تو یہ سراسر تانبہ ضائع کرنا ہو گا چونکہ کثافت رو تار کے بیرونی سطح پر ہی پائی جائے گی۔اندرونی تار، سطح سے دور، کثافت رو قابل نظرانداز ہو گی لہٰذا اس سے بہتر ہو گا کہ زیادہ رداس کی نلکی نما تار استعمال کی جائے جس کی موٹائی تقریباً 1.5δ یعنی 1.4 cm ہو۔اگرچہ یہ فیصلہ لامحدود جسامت کی سرحد کے نتائج پر بنیاد ہے، حقیقت میں محدود سرحد پر بھی میدان اسی نسبت سے گھٹتے ہیں۔

بلند تعدد پر گہرائی جلد کا فاصلہ اتنا کم ہوتا ہے کہ راہ گیر موصل کی سطحی تہہ ہی اہمیت رکھتی ہے۔یوں خرد امواج کی منتقلی کے لئے شیشے پر 0.661 µm موٹی چاندی کی تہہ کافی ہے۔

آئیں اب موصل میں طول موج اور رفتار موج کے مساوات حاصل کریں۔ہم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

سے شروع کرتے ہوئے مساوات 10.67 استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda = 2\pi\delta$$

لکھ سکتے ہیں۔اسی طرح مساوات 10.25

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

سے

$$v = \omega\delta \tag{10.68}$$

ملتا ہے۔

تانبے میں 50 Hz پر $\lambda = 5.8\,\mathrm{cm}$ اور $v = 2.94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ یا $10.6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ حاصل ہوتے ہیں۔میں تقریباً $6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ کی رفتار سے چلتا ہوں۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تانبے میں برقناطیسی امواج انتہائی آہستہ چلتی ہیں۔یاد رہے کہ اسی 50 Hz کے موج کی خلاء میں $\lambda = 6000\,\mathrm{km}$ اور رفتار $3 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہو گی۔

موصل میں H_y کی مساوات لکھنے کی خاطر موصل کی قدرتی رکاوٹ درکار ہو گی۔ مساوات 10.31

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی وجہ سے

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

یا

$$Z = \frac{\sqrt{2}\angle 45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta} \tag{10.69}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 10.63 کو گہرائی جلد کی صورت

$$E_x = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \tag{10.70}$$

میں لکھتے ہوئے مقناطیسی موج کو

$$H_y = \frac{\sigma\delta E_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{10.71}$$

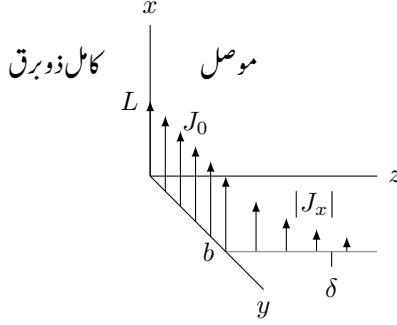
لکھا جا سکتا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی موج، برقی موج سے پھیرے کے آٹھویں حصے پیچھے ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے پوئنٹنگ مساوات

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma\delta E_0^2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{2z}{\delta}} \cos\frac{\pi}{4}$$

یا

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{\sigma\delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

دیتی ہے۔ آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک گہرائی جلد کی گہرائی پر کثافت طاقت، سرحد کی کثافت طاقت کے $e^{-2} = 0.135$ گنا رہ گئی ہے۔

شکل 10.7: موصل میں طاقت کے ضیاع اور گہرائی جلد۔

شکل 10.7 پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ مسئلہ پوئنٹنگ کہتا ہے کہ سرحد پر L اور b اطراف کے مستطیل میں جتنی برقناطیسی طاقت داخل ہوتی ہے، وہ تمام کی تمام موصل میں ضائع ہو جاتی ہے۔ یہ طاقت

$$\begin{aligned}
P_{L,\text{اوسط}} &= \int_0^b \int_0^L \mathscr{P}_{\text{اوسط}}\big|_{z=0} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^b \int_0^L \left.\frac{\sigma\delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}\right|_{z=0} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma\delta b L E_0^2}{4}
\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ سرحدی کثافت رو

$$J_0 = \sigma E_0$$

کی صورت میں اسے

$$P_{L,\text{اوسط}} = \frac{1}{4\sigma}\delta b L J_0^2 \tag{10.72}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ اگر b چوڑائی میں کل برقی رو کو δ گہرائی تک محدود کر دیا جائے تو مزاحمتی ضیاع کتنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے اس چوڑائی میں کل رو

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

حاصل کرتے ہیں جہاں تکمل آسان بنانے کی غرض سے

$$J_x = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

کو دوری سمتیہ کی شکل

$$\begin{aligned} J_{xs} &= J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \\ &= J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \end{aligned}$$

میں لکھ کر تکمل حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^b J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{J_0 b \delta}{1+j} \end{aligned}$$

اس سے

$$I = \frac{J_0 b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

لکھا جائے گا۔ اگر اس رو کو $0 < y < b$ اور $0 < z < \delta$ میں محدود کر دیا جائے تب نئی کثافت رو

$$J'_x = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہو گی۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع فی اکائی حجم $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$ کے برابر ہے لہٰذا اس حجم میں کل ضیاع

$$P_L = \frac{1}{\sigma}\left(J'_x\right)^2 bL\delta = \frac{J_0^2}{2\sigma} bL\delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہو گا۔ مربع کوسائن موج کی اوسط قیمت $\frac{1}{2}$ کے برابر ہوتی ہے لہٰذا اوسط طاقت کے ضیاع کو

$$P_L = \frac{J_0^2 bL\delta}{4\sigma} \tag{10.73}$$

لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 10.72 ہے۔

اس نتیجے کو دیکھ کر اب کسی بھی موصل، جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو، میں کل رو کو ایک جلد گہرائی میں یکساں تقسیم شدہ تصور کرتے ہوئے سلاخ کی مزاحمتی ضیاع حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں b چوڑائی، L لمبائی اور لامحدود گہرائی سلاخ

جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو اور b چوڑائی، L لمبائی اور δ گہرائی سلاخ جس میں یکساں تقسیم شدہ رو ہو کے مزاحمت بالکل برابر ہوں گے۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے رداس r کے ٹھوس نلکی سلاخ کی مزاحمت بلند تعدد پر حاصل کی جا سکتی ہے۔اگر گہرائی جلد سلاخ کے رداس سے بہت کم ہو تب اس طرح حاصل کردہ مزاحمت کی قیمت تقریباً بالکل درست ہو گی۔ایسی تعدد جس پر اثر جلد پایا جاتا ہو کی صورت میں سلاخ کی بیرونی جلد ہی رو گزارے گی لہٰذا مزاحمت کی قیمت حاصل کرتے وقت اس نلکی نما جھلی کو ہی موصل تصور کیا جائے گا لہٰذا مزاحمت R

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma 2\pi r\delta} \tag{10.74}$$

ایک ملی میٹر رداس اور دس میٹر لمبی تانبے کی تار کی یک سمت مزاحمت

$$R_{\text{یک سمت}} = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times \pi \times 0.001^2} = 54.88\,\text{m}\Omega$$

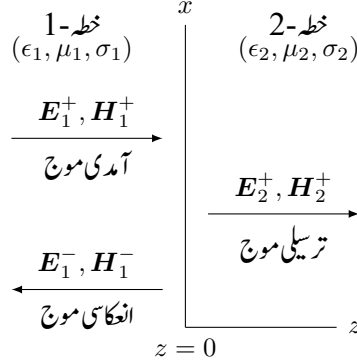
ہے۔ ایک سو میگا ہرٹز کی تعدد پر تانبے کی $\delta = 6.61\,\mu\text{m}$ ہو گی لہٰذا اس تعدد پر اسی تار کی مزاحمت

$$R = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times 2 \times \pi \times 0.001 \times 6.61 \times 10^{-6}} = 4.15\,\Omega$$

ہو گی۔

مشق 10.6: ٹھوس نلکی نما لوہے کی تار جس کا رداس $5\,\text{mm}$ اور جس کی لمبائی $2.5\,\text{m}$ ہے میں $2\cos 10000t$ ایمپیئر کی برقی رو گزر رہی ہے۔کتاب کے آخر میں ضمیمے سے $\sigma = 1.03 \times 10^7\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ اور $\mu_R = 4000$ دئے گئے ہیں۔یاد رہے کہ موصل کا $\epsilon_R = 1$ ہوتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- یک سمت مزاحمت،
- گہرائی جلد،
- بدلتا رو مزاحمت یا موثر مزاحمت،
- مزاحمتی طاقت کا ضیاع۔

جوابات: $3.09\,\text{m}\Omega$، $62\,\mu\text{m}$، $1.25\,\Omega$ اور $2.49\,\text{W}$

شکل 10.8: آمدی موج سرحد سے گزرتی ترسیلی اور اس سے لوٹتی انعکاسی امواج پیدا کرتی ہے۔

10.6 انعکاس مستوی موج

لامحدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج ہم دیکھ چکے۔ایسے حجم میں کبھی بھی موج دو مختلف اقسام کی اشیاء کے درمیان پائی جانے والی سرحد نہیں چھوتی۔آئیں محدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج پر غور کریں جہاں امواج کو ایک قسم کے مادے سے دوسرے قسم کے مادے میں داخل ہونا ہو گا۔آپ دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں موج کا کچھ حصہ پہلے خطے سے دوسرے خطے میں داخل ہو پاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ سرحد سے ٹکرا کر واپس پہلے خطے میں لوٹ جاتا ہے۔اس حصے میں ہم سرحد سے گزرتے اور اس سے ٹکرا کر واپس لوٹتے حصوں کی مساوات حاصل کریں گے۔یہ نتائج ترسیلی تاروں[55] اور رہبر موج[56] کے مسائل میں جوں کے توں قابل استعمال ہوں گے۔

ہم $z < 0$ کو خطہ-1 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ ہیں جبکہ $z > 0$ کو خطہ-2 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ ہیں۔یہ صورت حال شکل 10.8 میں دکھائی گئی ہے۔ہم بڑھتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $+$ جبکہ گھٹتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $-$ سے ظاہر کریں گے۔اب تصور کریں کہ پہلے خطے میں سرحد کی جانب برقی موج

$$E_{xs1}^+ = E_{x10}^+ e^{-\gamma_1 z} \tag{10.75}$$

آتی ہے۔آپ جانتے ہیں کہ اس برقی موج کے ساتھ لازماً مقناطیسی موج

$$H_{ys1}^+ = \frac{E_{x10}^+}{Z_1} e^{-\gamma_1 z} \tag{10.76}$$

[55] transmission lines
[56] waveguide

بھی ہو گی۔ سرحد کی طرف آتی موج کو **آمدی موج**[57] یا **موج واقع** کہا جاتا ہے۔چونکہ یہ موج سرحد کی عمودی حرکت کر رہی ہے لہٰذا اس کی حرکت کو **عمودی آمد**[58] کہتے ہیں۔

اس آمدی موج کا کچھ حصہ جسے **ترسیلی موج**[59] کہتے ہیں، سرحد سے گزرتے ہوئے سیدھا چلے جائے گا۔ترسیلی امواج

$$E_{xs2}^{+}=E_{x20}^{+}e^{-\gamma_2 z} \tag{10.77}$$

$$H_{ys2}^{+}=\frac{E_{x20}^{+}}{Z_2}e^{-\gamma_2 z} \tag{10.78}$$

ہیں۔سرحد کے دوسرے جانب حرکی مستقل γ_2 اور قدرتی رکاوٹ Z_2 ہیں جو پہلے خطے سے مختلف ہیں۔ترسیلی امواج سرحد سے دور چلتی جاتی ہیں۔

آمدی اور ترسیلی برقی امواج x محدد کے متوازی جبکہ مقناطیسی امواج y محدد کے متوازی ہیں لہٰذا یہ چاروں امواج سرحد کے بھی متوازی ہیں۔صفحہ 418 پر مساوات 9.45 اور اس کے قریب ہی مساوات 9.47 متوازی امواج کی سرحدی شرائط بیان کرتے ہیں۔اب کائنات میں کبھی بھی دو اشیاء کی سرحد پر سطحی کثافت رو نہیں پائی جاتی۔یوں $K_{\perp}=0$ لیتے ہوئے ان شرائط کو

$$\begin{aligned}E_{m1}&=E_{m2}\\H_{m1}&=H_{m2}\quad (K_{\perp}=0)\end{aligned}$$

لکھا جاتا ہے۔

اب اگر پہلی شرط پوری کی جائے تو سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی برقی میدان برابر ہوں گے لہٰذا $z=0$ پر مساوات 10.75 اور مساوات 10.77 برابر ہوں گی۔یوں $E_{x10}^{+}=E_{x20}^{+}$ حاصل ہوتا ہے لیکن دوسری شرط کے مطابق سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان بھی برابر ہونا ہو گا لہٰذا $z=0$ پر مساوات 10.76 اور مساوات 10.78 بھی برابر ہوں گی جس سے $\frac{E_{x10}^{+}}{Z_1}=\frac{E_{x20}^{+}}{Z_2}$ حاصل ہوتی ہے۔یہ دونوں تب ممکن ہے جب $Z_1=Z_2$ ہو جو حقیقت میں کبھی بھی نہیں ہو گا لہٰذا صرف آمدی اور ترسیلی امواج کی صورت میں سرحدی شرائط پر پورا نہیں اترا جا سکتا۔مندرجہ بالا دونوں سرحدی شرائط صرف اس صورت میں پوری ہوتی ہیں جب سرحد سے ٹکرا کر واپس لوٹتی انعکاسی امواج

$$E_{xs1}^{-}=E_{x10}^{-}e^{\gamma_1 z} \tag{10.79}$$

$$H_{ys1}^{-}=-\frac{E_{x10}^{-}}{Z_1}e^{\gamma_1 z} \tag{10.80}$$

---

incident wave[57]
normal incidence[58]
transmitted wave[59]

بھی پائی جائیں جنہیں **موج منعکس**[60] کہا جاتا ہے۔انعکاسی موج کا حرکی مستقل γ_1 ہی ہے جبکہ یہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے۔انعکاسی موج میں E_{x10}^- مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔چونکہ انعکاسی امواج گھٹتے z جانب حرکت کرتی ہیں لہٰذا مسئلہ پوئنٹنگ کے تحت $E_{xs1}^- = -Z_1 H_{ys1}^-$ ہو گا تا کہ $\boldsymbol{E}_1^- \times \boldsymbol{H}_1^-$ کی سمت $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو۔

آمدی، ترسیلی اور انعکاسی امواج کی صورت میں دونوں سرحدی شرائط پورے ہوتے ہیں اور ان کی مدد سے E_{x10}^+ کی صورت میں بقایا تمام امواج کے طول بھی حاصل ہوتے ہیں۔آئیں دیکھیں کہ ایسا کس طرح ہوتا ہے۔

اب پہلے خطے میں آمدی امواج کے علاوہ انعکاسی امواج بھی پائی جاتی ہیں لہٰذا سرحدی شرائط میں دونوں کا مجموعہ استعمال کیا جائے گا۔یوں $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی برقی میدان برابر ہونے سے

$$E_{xs1} = E_{xs2} \quad (z = 0)$$

یعنی

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+ \quad (z = 0)$$

یا

$$E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+ \tag{10.81}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان کے برابری سے

$$H_{ys1} = H_{ys2} \quad (z = 0, K_\perp = 0)$$

یعنی

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \quad (z = 0, K_\perp = 0)$$

یا

$$\frac{E_{x10}^+}{Z_1} - \frac{E_{x10}^-}{Z_1} = \frac{E_{x20}^+}{Z_2} \tag{10.82}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 10.81 اور مساوات 10.82 کو E_{x10}^- کی خاطر حل کرنے کی غرض سے مساوات 10.81 کو مساوات میں پر کرتے

$$\frac{E_{x10}^+}{Z_1} - \frac{E_{x10}^-}{Z_1} = \frac{E_{x10}^+ + E_{x10}^-}{Z_2}$$

[60] reflected wave

ہوئے یوں

$$E^-_{x10} = E^+_{x10} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔انعکاسی اور آمدی برقی میدان کے حیطوں کی شرح کو شرح انعکاس[61] پکارا اور Γ سے ظاہر[62] کیا جاتا ہے۔

$$\Gamma = \frac{E^-_{x10}}{E^+_{x10}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \tag{10.83}$$

مخلوط شرح انعکاس کی صورت میں انعکاسی اور آمدی میدان میں زاویائی فرق پایا جائے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شرح انعکاس کی مطلق قیمت صفر تا ایک ممکن ہے۔

$$|\Gamma| \leq 1 \tag{10.84}$$

اسی طرح مساوات 10.81 اور مساوات 10.82 سے E^-_{x10} ختم کرنے سے

$$\tau = \frac{E^+_{x20}}{E^+_{x10}} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \tag{10.85}$$

حاصل ہوتا ہے جو شرح ترسیل[63] کہلایا اور τ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مساوات 10.83 اور مساوات 10.85 سے

$$\tau = 1 + \Gamma \tag{10.86}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں ان نتائج کو چند مخصوص صورتوں میں استعمال کرتے ہیں۔تصور کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق جبکہ دوسرا خطہ کامل موصل ہے۔ایسی صورت میں σ_2 لامحدود ہو گا لہٰذا

$$Z_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ہو گا۔یوں مساوات 10.85 سے

$$E^+_{x20} = 0$$

---

[61] reflection coefficient

[62] Γ یونانی حروف تہجی گیما ہے۔

[63] transmission coefficient

حاصل ہوتا ہے یعنی کامل موصل میں کسی صورت بھی وقت کے ساتھ بدلتا میدان نہیں پایا جا سکتا۔اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ کامل موصل کی گہرائی جلد صفر کے برابر ہے۔

مساوات 10.83 میں $Z_2 = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma = -1$$

یعنی

$$E_{x10}^{-} = -E_{x10}^{+}$$

حاصل ہوتا ہے۔انعکاسی موج کا حیطہ بالکل آمدی موج کے حیطے کے برابر ہے لیکن ان میں $180°$ کا زاویہ پایا جاتا ہے۔موصل سطح آمدی توانائی کو واپس کرتی ہے اور یوں پہلے خطے میں کل برقی میدان

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^{+} + E_{xs1}^{-} \\ &= E_{x10}^{+} e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہو گا جہاں کامل ذو برق میں $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$ لیا گیا ہے۔اس کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^{+} \left(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z} \right) \\ &= -j2E_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

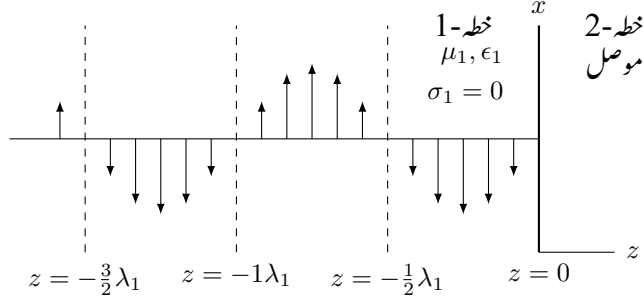
حاصل ہوتا ہے جو دوری سمتیہ کی صورت میں ہے جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لیتے ہوئے اصل موج کی مساوات

$$E_{x1} = 2E_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \sin \omega t \tag{10.87}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ مساوات ساکن میدان کو ظاہر کرتی ہے۔یاد رہے کہ اسے دو آپس میں الٹ سمت میں حرکت کرتی امواج سے حاصل کیا گیا ہے۔اس کا موازنہ آمدی موج

$$E_{x1}^{+} = E_{x10}^{+} \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

سے کریں۔حرکت کرتی موج کی پہچان جزو $\omega t - \beta_1 z$ ہے جو مثبت سمت میں موج کو ظاہر کرتی ہے۔مساوات 10.87 میں ωt اور $\beta_1 z$ علیحدہ علیحدہ پائے جاتے ہیں۔

مساوات 10.87 میں جس لمحہ $\omega t = n\pi$ کے برابر ہو اس لمحہ میدان ہر نقطے پر صفر کے برابر ہو گا۔اس کے علاوہ جس نقطے پر $\beta_1 z = n\pi$ کے برابر ہو، اس نقطے پر ہر وقت میدان صفر ہی رہتا ہے۔مساوات 10.87 کو ساکن

شکل 10.9: ساکن موج، برقی میدان۔

موج[64] کہا جاتا ہے۔ برقی میدان ان سطحوں پر ہر وقت صفر رہتا ہے جہاں

$$\beta_1 z = n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots)$$

ہو جس سے

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

یعنی

$$z = n\frac{\lambda_1}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں سرحد یعنی $z = 0$ پر برقی میدان صفر ہو گا اور پہلے خطے میں سرحد سے دور چلتے ہوئے ہر آدھے طول موج پر صفر برقی میدان پایا جائے گا۔ یہ صورت حال شکل 10.9 میں دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں نقطہ دار لکیر ان سطحوں کو ظاہر کرتی ہیں جہاں میدان صفر رہتا ہے۔ برقی میدان کو وقت $t = \frac{\pi}{2}$ پر دکھایا گیا ہے جب اس کا حیطہ زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔

چونکہ $E^+_{xs1} = Z_1 H^+_{ys1}$ اور $E^-_{xs1} = -Z_1 H^-_{ys1}$ ہوتے ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان

$$H_{ys1} = \frac{E^+_{x10}}{Z_1}\left(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}\right)$$

یا

$$H_{y1} = 2\frac{E^+_{x10}}{Z_1} \cos\beta_1 z \cos\omega t \tag{10.88}$$

standing wave[64]

ہو گا۔یہ بھی ساکن موج ہے لیکن جس سطح پر برقی میدان صفر رہتا ہے وہاں مقناطیسی ساکن موج کی چوٹی پائی جاتی ہے۔اس کے علاوہ برقی اور مقناطیسی ساکن امواج میں $90°$ کا وقتی فرق پایا جاتا ہے لہٰذا یہ امواج کسی بھی سمت میں اوسطاً صفر طاقت منتقل کرتی ہیں۔

آئیں اب دو کامل ذو برق کی سرحد پر صورت حال دیکھیں۔اب ان دو خطوں میں قدرتی رکاوٹ Z_1 اور Z_2 جبکہ $\alpha_1 = 0$ اور $\alpha_2 = 0$ ہوں گے۔عددی قیمتیں لے کر آگے چلتے ہیں۔فرض کریں کہ

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= 50\,\Omega \\
Z_2 &= 377\,\Omega \\
E_{x10}^{+} &= 10\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

ہیں۔یوں

$$
\Gamma = \frac{377-50}{377+50} = 0.7658
$$

ہے لہٰذا

$$
E_{x10}^{-} = 0.7658 \times 10 = 7.658\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
$$

ہو گا۔پہلے خطے میں مقناطیسی میدان

$$
\begin{aligned}
H_{y10}^{+} &= \frac{10}{50} = 0.2\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \\
H_{y10}^{-} &= -\frac{7.658}{50} = -0.153\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

ہیں۔آمدی اوسط سطحی کثافت طاقت مساوات 10.55 سے

$$
P_{1,\text{اوسط}}^{+} = \frac{1}{2}\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{|Z_1|}e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{Z1} = 1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}
$$

جبکہ انعکاسی اوسط سطحی کثافت طاقت

$$
P_{1,\text{اوسط}}^{-} = \frac{1}{2}\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{|Z_1|}e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{Z1} = 0.5864\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}

ہے۔ان مساوات میں $\alpha_1 = 0$ اور $Z_1 = 50\underline{/0}$ استعمال کئے گئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور آمدی کثافت طاقت کی شرح

$$\frac{\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{2Z_0}}{\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{2Z_0}} = |\Gamma|^2 \tag{10.89}$$

کے برابر ہے۔

دوسرے خطے میں

$$E_{x20}^{+} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} E_{x10}^{+} = 17.658 \,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$
$$H_{y20}^{+} = \frac{17.658}{377} = 0.046\,84 \,\frac{\text{A}}{\text{m}}$$

ہیں لہٰذا

$$P_{2,\text{اوسط}}^{+} = \frac{1}{2} \frac{\left(E_{x20}^{+}\right)^2}{|Z_2|} e^{-2\alpha_2 z} \cos\theta_{Z2} = 0.4135 \,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور ترسیلی طاقت کا مجموعہ آمدی طاقت کے عین برابر ہے۔

$$P_{1,\text{اوسط}}^{+} = P_{1,\text{اوسط}}^{-} + P_{2,\text{اوسط}}^{+}$$

مثال 10.6: ہوا سے سمندری پانی $(\epsilon_R = 78, \mu_R = 1, \sigma = 5)$ کی سطح پر $50\,\text{MHz}$ تعدد کی بائیں دائری برقی موج عمودی آمد ہے۔حرکی مستقل، انعکاسی مستقل اور ترسیلی مستقل حاصل کریں۔

حل:ہوا کی قدرت رکاوٹ $Z_1 = 377\,\Omega$ ہے۔سمندری پانی کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5 + j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 78 \times 8.85 \times 10^{-12}}}$$
$$= 6.41 + j6.14 \quad \Omega$$

اور حرکی مستقل

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}\\ &= \sqrt{j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}(5 + j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 78 \times 8.85 \times 10^{-12})}\\ &= 30.7 + j32.1 \quad \mathrm{m}^{-1}\end{aligned}$$

ہیں۔ سمندری پانی میں $\sigma \gg \omega\epsilon$ ہے لہٰذا سمندری پانی کو موصل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرنے سے حرکی مستقل

$$\gamma_2 = \sqrt{\pi f \mu \sigma}(1 + j) = 31.4 + j31.4$$

حاصل ہوتا ہے جو مکمل درست جواب $(30.7 + j32.1)$ کے انتہائی قریب جواب ہے۔

شرح انعکاس

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{6.41 + j6.14 - 377}{6.41 + j6.14 + 377}\\ &= -0.966 + j0.031\\ &= 0.9665\underline{/178^\circ}\end{aligned}$$

اور شرح ترسیل

$$\begin{aligned}\tau = 1 + \Gamma &= 0.034 + j0.031\\ &= 0.046\underline{/53^\circ}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

10.7 شرح ساکن موج

کسی بھی ترسیلی نظام میں مختلف مقامات پر برقی یا مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارہ باآسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ محوری تار کا اندرونی تار ذرا زیادہ لمبا رکھتے ہوئے برقی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح تار کا ایک چھوٹا دائرہ مقناطیسی میدان کا نمونہ حاصل کرنے میں کام آتا ہے۔ ان آلات سے حاصل اشارات کو سمت کار[65] سے گزارتے

[65] rectifier

$2E_{x10}^{+}$

کامل موصل

$-2\lambda_1$ $-\frac{3\lambda_1}{2}$ $-\lambda_1$ $-\frac{\lambda_1}{2}$ 0

شکل 10.10: کامل موصل سے انعکاس، کامل ذو برق میں ساکن موج پیدا کرتا ہے۔

ہوئے مائیکرو میٹر سے ناپا جا سکتا ہے۔مائیکرو میٹر میدان کے حیطے کے راست تناسب جواب دیتا ہے۔ان آلات کو عموماً درکار اشارات کے ہمسُر[66] رکھا جاتا ہے تا کہ یہ زیادہ حساس ہوں۔

اگر بغیر ضیاع خطے میں یکساں مستوی موج حرکت کر رہی ہو اور اس خطے میں انعکاسی موج نہ پائی جاتی ہو تب میدان ناپنے والا آلہ تمام مقامات پر یکساں حیطہ دکھائے گا۔ایسا آلہ تیزی سے تبدیل ہوتے حیطے کو دکھانے سے قاصر ہوتا ہے۔ہر جگہ برابر حیطہ اس بات کی نشانی ہے کہ خطے میں طاقت ضائع نہیں ہوتی اور یہ کہ انعکاسی موج بھی غیر موجود ہے۔

اس کے برعکس کامل ذو برق میں آمدی موج کا کامل موصل سے انعکاس، ساکن موج پیدا کرتا ہے۔ایسے خطے میں میدان ناپتا آلہ مختلف مقامات پر مختلف حیطے ناپے گا۔چونکہ سرحد سے ہر آدھے طول موج کے فاصلے پر میدان صفر رہتا ہے لہٰذا ان نقطوں پر آلہ صفر حیطہ ناپے گا جبکہ عین ایسے دو قریبی نقطوں کے درمیان آلہ زیادہ سے زیادہ حیطہ دکھائے گا۔آلے کو سرحد کے قریب اور دور کرنے سے ناپے گئے حیطے کی شکل $|\sin\beta z|$ کی طرح حاصل ہو گی جہاں سرحد سے فاصلہ z ہے۔اسے شکل 10.10 میں دکھایا گیا ہے۔سائن نما حیطے کا تبدیل ہونا ساکن موج کی پہچان ہے۔

مثال 10.7: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں کامل ذو برق میں ساکن موج کی مساوات حاصل کریں۔

حل: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں $\Gamma = -1$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $E_{xs1}^{-} = -E_{x10}^{+}e^{j\beta_1 z}$ ہو گا۔یوں آمدی اور انعکاسی امواج کا مجموعہ

$$\begin{aligned}E_{xs1} &= E_{x10}^{+}e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^{+}e^{j\beta_1 z}\\ &= -2jE_{x10}^{+}\sin\beta_1 z\end{aligned}$$

[66] tuned

ہو گا۔اس دوری سمتیہ سے حقیقی ساکن موج کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E_{xs1}e^{j\omega t}=-2jE^+_{x10}\sin\beta_1 z\cos\omega t+2E^+_{x10}\sin\beta_1 z\sin\omega t$$

حقیقی جزو

$$E_{x1}=2E^+_{x10}\sin\beta_1 z\sin\omega t$$

لیتے ہیں۔یہی ساکن موج کی مساوات ہے۔شکل 10.10 میں آلہ ناپ سے حاصل $|E_{x1}|$ دکھایا گیا ہے۔

اب ایسی صورت پر غور کرتے ہیں جہاں تمام کی تمام موج سرحد سے واپس نہیں لوٹتی بلکہ اس کا کچھ حصہ سرحد پار کرتے ہوئے دوسری جانب چلے جاتی ہے۔پہلے خطے میں اب آمدی موج کے علاوہ ایسی انعکاسی موج پائی جاتی ہے جس کا حیطہ آمدی موج سے کم ہوتا ہے۔اگرچہ اب پہلے خطے میں ساکن موج کے ساتھ ساتھ حرکت کرتی موج بھی پائی جاتی ہے لیکن اس کے باوجود اس کو ساکن موج ہی کہا جاتا ہے۔اب کسی بھی نقطے پر میدان ہر وقت صفر نہیں رہتا۔ساکن اور حرکت کرتے حصوں کا اندازہ حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور اس کے کم سے کم قیمت کی شرح سے بیان کی جاتی ہے۔اس شرح کو **شرح ساکن موج**[67] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے جبکہ دوسرا خطہ کوئی بھی مادہ ہو سکتا ہے۔یوں $\alpha_1=0$ ہو گا۔اب

$$\begin{aligned}E^+_{xs1}&=E^+_{x10}e^{-j\beta_1 z}\\E^-_{xs1}&=\Gamma E^+_{x10}e^{j\beta_1 z}\end{aligned}$$

ہوں گے جہاں

$$\Gamma=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}$$

ہے۔چونکہ کامل ذو برق میں $\sigma=0$ ہوتا ہے لہٰذا Z_1 مثبت حقیقی عدد ہے جبکہ Z_2 مخلوط عدد ہو سکتا ہے لہٰذا Γ بھی مخلوط ہو سکتا ہے۔یوں اسے

$$\Gamma=|\Gamma|\,e^{j\phi}$$

---

[67] standing wave ratio

بھی لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$E_{xs1}^{-} = |\Gamma| \, E_{x10}^{+} e^{j(\beta_1 z + \phi)}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ساکن موج کی مساوات

$$E_{xs1} = \left(e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| \, e^{j(\beta_1 z + \phi)} \right) E_{x10}^{+} \tag{10.90}$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد $e^{j\theta}$ کو

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ہوتا ہے لٰہذا اس کی مطلق قیمت ایک (1) ہی رہتی ہے۔اس عدد کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\theta = 0$ کی صورت میں $+1$ حاصل ہوتی ہے۔یہی قیمت $\theta = \mp 2\pi$ یا $\theta = \mp 4\pi$ کی صورت میں بھی حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح اس کی کم سے کم قیمت $\theta = \mp\pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi \cdots$ پر -1 حاصل ہوتی ہے۔اس طرح مساوات 10.90 کو

$$E_{xs1} = \left(1 + |\Gamma| \, e^{j(2\beta_1 z + \phi)} \right) e^{-j\beta_1 z} E_{x10}^{+}$$

لکھتے ہوئے اگر $2\beta_1 z + \phi$ کو θ تصور کیا جائے تو $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی $+1$

$$2\beta_1 z + \phi = 0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \cdots$$

پر حاصل ہو گی۔اس مساوات کو

$$-\beta_1 z_{\text{بلند تر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots) \tag{10.91}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ایسی صورت میں

$$|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}} = (1 + |\Gamma|) \, E_{x10}^{+} \tag{10.92}$$

ہو گا۔

$Z_2 \gg Z_1$ کی صورت میں $\Gamma = 1\underline{/0^\circ}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں سرحد پر ساکن موج کی چوٹی پائی جائے گی۔اگلی چوٹی سرحد سے $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہو گی۔ Z_2 اور Z_1 کے کسی بھی اور قیمت کی صورت میں سرحد اور پہلی چوٹی کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ سے کم ہو گا۔

اسی طرح $e^{j(2\beta_1 z+\phi)}$ کی کم سے کم قیمت یعنی -1

$$2\beta_1 z+\phi=\pi,-\pi,3\pi,-3\pi,\cdots$$

پر حاصل ہو گی۔ اس مساوات کو

$$-\beta_1 z_{\text{کمتر}}=\frac{\phi}{2}+n\pi+\frac{\pi}{2}\qquad(n=0,\mp1,\mp2,\cdots)\tag{10.93}$$

لکھا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں

$$\left|E_{xs1}\right|_{\text{کمتر}}=(1-\left|\Gamma\right|)\,E_{x10}^{+}\tag{10.94}$$

ہو گا۔

$Z_2\ll Z_1$ کی صورت میں سرحد پر ساکن موج کی کمتر قیمت پائی جائے گی۔اگلی کمتر قیمت سرحد سے $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہو گی۔ Z_2 اور Z_1 کے کسی بھی اور قیمت کی صورت میں سرحد اور پہلی کمتر نقطے کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ سے کم ہو گا۔

مساوات 10.91 سے $z_{\text{بلندتر}}$ اور مساوات 10.93 سے $z_{\text{کمتر}}$ حاصل کرتے ہوئے دھیان رہے کہ صرف ان قیمتوں کو درست تصور کیا جائے جو شکل 10.11 میں ٹھیک طرف پائی جاتی ہوں یعنی $z_{\text{بلندتر}}$ اور $z_{\text{کمتر}}$ کی قیمت منفی ہونی چاہیے۔

موج کی کم تر قیمت ہر آدھے طول موج پر پائی جاتی ہے۔موج کی بلند تر قیمت ہر دو کم تر قیمتوں کے مقام کے عین وسط میں پائی جاتی ہے۔کامل موصل کی صورت میں پہلا کمتر میدان $-\beta_1 z=0$ یعنی سرحد پر پایا جائے گا۔اگر $Z_2<Z_1$ ہو اور دونوں قدرتی رکاوٹوں کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں تب $\phi=\pi$ ہو گا اور ایسی صورت میں سرحد یعنی $-\beta_1 z=0$ پر برقی دباو کی کمتر قیمتیں پائی جائیں گی۔اس کے برعکس اگر $Z_2>Z_1$ ہو اور دونوں رکاوٹ حقیقی ہوں تب سرحد پر برقی میدان کی قیمت بلند تر ہو گی۔

ان معلومات کو زیر استعمال لانے کی غرض سے $10\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور $1\,\text{GHz}$ تعدد کے موج پر غور کرتے ہیں جو خطہ اول میں سرحد کی طرف عمودی آمد ہے۔پہلے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1}=3$، $\mu_{R1}=1$ اور $\sigma_1=0$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1}=6$، $\mu_{R1}=1$ اور $\sigma_1=0$ ہیں۔

یوں

$$\omega=2\pi10^9\,\frac{\text{rad}}{\text{s}},\quad\beta_1=36.28\,\frac{\text{rad}}{\text{m}},\quad\beta_2=51.3\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اگرچہ خلاء میں اس موج کی طول 30 cm ہو گی، یہاں $\lambda_1 = 17.32\,\text{cm}$ اور $\lambda_2 = 12.25\,\text{cm}$ ہیں۔قدرتی رکاوٹ $Z_1 = 217.66\,\Omega$ اور $Z_2 = 153.91\,\Omega$ ہیں جن سے شرح انعکاس $\Gamma = -0.17$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ دونوں رکاوٹ حقیقی اعداد ہیں اور $Z_1 > Z_2$ ہے لہٰذا سرحد پر کمتر برقی میدان پایا جائے گا۔پہلے خطے، یعنی $z < 0$، میں سرحد سے دور ہر 8.66 cm فاصلے پر برقی میدان کی کمتر قیمت پائی جائے گی۔مساوات 10.94 سے ساکن موج کی کمتر قیمت $|Exs1|_{\text{کمتر}} = 8.3\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ حاصل ہوتی ہے۔چونکہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے لہٰذا اس میں طاقت کا ضیاع نہیں ہوتا اور یوں اس خطے میں تمام کمتر قیمتیں برابر ہوں گی۔

میدان کی بلند تر قیمت $11.7\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پہلے خطے میں سرحد سے 4.33 ، 12.99 ، 21.65 ، $\cdots$ سنٹی میٹر کے فاصلوں پر پائی جائیں گی۔

چونکہ دوسرے خطے میں انعکاسی موج نہیں پائی جاتی لہٰذا اس میں ساکن موج بھی نہیں پائی جائے گی۔

ساکن موج کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کی شرح کو *شرح ساکن موج*[68] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$s = \frac{|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}}}{|E_{xs1}|_{\text{کمتر}}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{10.95}$$

چونکہ $|\Gamma| \le 1$ رہتا ہے لہٰذا شرح ساکن موج ہر صورت مثبت اور اکائی کے برابر یا اس سے زیادہ قیمت کا ہو گا یعنی

$$s \ge 1 \tag{10.96}$$

مندرجہ بالا مثال میں $s = \frac{1+0.17}{1-0.17} = 1.409$ ہے۔

اگر $|\Gamma| = 1$ ہو تب انعکاسی اور آمدی امواج برابر ہوں گے لہٰذا تمام کی تمام آمدی توانائی سرحد سے واپس لوٹتی ہے اور ایسی صورت میں s لامحدود ہو گی۔پہلے خطے میں ہر $\frac{\lambda_1}{2}$ فاصلے پر ایسی سطح پائی جائے گی جس پر برقی میدان ہر وقت صفر رہتا ہے۔ان سطحوں کے درمیان ایسی سطحیں ہوں گی جہاں آمدی موج کے دگنے حیطے کا برقی میدان ہو گا۔

اگر $Z_1 = Z_2$ ہو تب $\Gamma = 0$ ہو گا۔ایسی صورت میں توانائی سرحد سے واپس نہیں لوٹتی، $s = 1$ ہوتا ہے اور برقی میدان کی بلند تر اور کم تر قیمتیں برابر ہوتی ہیں۔

آدھی طاقت کے انعکاس کی صورت میں $|\Gamma|^2 = 0.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.707$ اور $s = 5.83$ ہو گا۔

standing wave ration[68]

$\gamma_1 = 1 + j5\pi$
$\sigma_2 = \infty$

شکل 10.11: غیر کامل ذو برق میں ساکن موج کی بلند تر اور کم تر قیمتوں میں فرق سرحد سے دور کم ہوتا ہے۔

چونکہ برقی اور مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارات باآسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں اور s کی قیمت حاصل کرنے کے لئے راست تناسب کے اشارات ہی درکار ہیں لہٰذا شرح ساکن موج کو تجرباتی طور حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہی اس کی اہمیت کا راز ہے۔یاد رہے کہ s حاصل کرنے کے لئے میدان کی اصل قیمت درکار نہیں ہوتی۔صرف اتنا ضروری ہوتا ہے کہ تمام اشارات اصل میدان کے تناسب سے ہوں۔

آئیں اب پہلے خطے کو غیر کامل ذو برق تصور کریں جس کا α صفر کے برابر نہیں ہو گا۔اب بائیں سے آتی آمدی موج مثبت z جانب چلتے ہوئے گھٹے گی۔انعکاسی موج منفی z جانب چلتے ہوئے گھٹتے جائے گی حتٰی کہ آخر کار اس کی قیمت قابل نظر انداز ہو گی۔یوں اگرچہ سرحد کے قریب بلند تر اور کم تر میدان میں فرق واضح ہو سکتا ہے لیکن سرحد سے دور ان میں فرق نہیں رہ پاتا۔پہلے خطے کا حرکی مستقل $\gamma_1 = 1 + j5\pi$ اور دوسرا خطہ کامل موصل ہونے کی صورت میں ایسی ہی ایک ساکن موج شکل 10.11 میں دکھائی گئی ہے جہاں موصل $z = 0$ کے دائیں ہاتھ پر ہے۔اس شکل میں عین سرحد پر آمدی موج کی قیمت $E_{x10}^{+} = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔چونکہ ذو برق کی سرحد موصل کے ساتھ ہے اور موصل میں برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا شکل میں سرحد پر برقی میدان صفر ہی ہے۔سرحد سے $\frac{2\pi}{\beta_1} = 0.2\,\mathrm{m}$ فاصلے پر دوبارہ کم تر میدان پایا جاتا ہے۔اسی طرح پہلی چوٹی سرحد پر آمدی میدان کے تقریباً دگنی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو چوٹیاں یا دو نشیب برابر نہیں ہیں۔یہاں شرح ساکن موج کی قیمت اس صورت مطلب رکھتی ہے جب اسے ناپنے کا مقام یعنی z بھی ساتھ بتلایا جائے۔ایسی صورت میں انعکاسی شرح اور تضعیفی مستقل زیادہ کار آمد معلومات ہیں۔

اگرچہ مندرجہ بالا مثال زیادہ انتہا درجے کا تھا لیکن یہ بھی نہیں بھولنا چاہئے کہ حقیقت میں کامل ترسیلی تار بھی نہیں پائے جاتے۔حقیقت میں شرح ساکن موج ہر صورت سرحد سے فاصلے پر منحصر ہو گی اور اس کا استعمال اسی وقت

ممکن ہو گا جب ہماری دلچسپی کے خطے میں اس کی قیمت زیادہ تبدیل نہ ہو۔

آئیں دوبارہ پہلا خطہ کامل ذو برق لیتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح حاصل کریں۔لامحدود حجم میں آزاد موج کی صورت میں یہ شرح Z_1 تھی۔انعکاسی موج کی موجودگی میں برقی اور مقناطیسی میدان صفر بھی ممکن ہیں لہٰذا ان کی شرح صفر سے لامحدود قیمت کی ہو سکتی ہے۔سرحد سے $z = -l$ فاصلے پر میدان

$$E_{xs1} = \left(e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}\right) E_{x10}^{+}$$
$$H_{ys1} = \left(e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}\right) \frac{E_{x10}^{+}}{Z_1}$$

ہیں۔ان کی شرح کو **داخلی قدرتی رکاوٹ**[69] کہتے اور $Z_{\text{داخلی}}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$Z_{\text{داخلی}} = \left.\frac{E_{xs1}}{H_{ys1}}\right|_{z=-l} = Z_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$

اس میں $\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$ پر کرتے ہوئے اور **یولر مماثل**[70] استعمال کرتے ہوئے

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_1 \frac{(Z_2 + Z_1)(\cos\beta_1 l + j\sin\beta_1 l) + (Z_2 - Z_1)(\cos\beta_1 l - j\sin\beta_1 l)}{(Z_2 + Z_1)(\cos\beta_1 l + j\sin\beta_1 l) - (Z_2 - Z_1)(\cos\beta_1 l - j\sin\beta_1 l)}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باآسانی یوں

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_1 \frac{Z_2 + jZ_1 \tan\beta_1 l}{Z_1 + jZ_2 \tan\beta_1 l} \tag{10.97}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

جب Z_2 اور Z_1 برابر ہوں تب داخلی قدرتی رکاوٹ $Z_{\text{داخلی}}$ پہلے خطے کی قدرتی رکاوٹ Z_1 کے برابر ہوتی ہے۔ایسی صورت میں انعکاس پیدا نہیں ہوتا اور ترسیلی نظام **ہم رکاوٹی**[71] کہلاتا ہے۔ہم رکاوٹی نظام میں انعکاس کی غیر موجودگی کی بنا توانائی ایک ہی سمت میں منتقل ہوتی ہے۔اگر دوسرا خطہ کامل موصل ہو تب $Z_2 = 0$ ہو گا۔ایسی صورت میں

$$Z_{\text{داخلی}} = jZ_1 \tan\beta_1 l \quad (Z_2 = 0) \tag{10.98}$$

---

[69] intrinsic input impedance
[70] $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$
[71] matched

ہو گا لہٰذا ان مقامات پر جہاں $E_{xs1}=0$ ہو، یعنی جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو، داخلی قدرتی رکاوٹ صفر کے برابر ہو گی جبکہ ان مقامات پر جہاں $H_{ys1}=0$ ہو وہاں داخلی قدرتی رکاوٹ لامحدود ہو گی۔

مساوات 10.97 ترسیلی نظام پر غور کرنے کے لئے انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔

10.8 دو سرحدی انعکاس

اب تک ہم دو ایسے خطوں کی سرحد پر موج کے انعکاس پر غور کرتے رہے ہیں جن میں دونوں خطے نیم لامحدود جسامت کے تھے۔ **نیم لامحدود خطے**[72] سے مراد ایسا خطہ ہے جس کی ایک سرحد محدود فاصلے پر اور دوسری سرحد لامحدود فاصلے پر ہو۔ ایسی صورت میں سرحد پار کرنے کے بعد ترسیلی موج دوسرے خطے میں مسلسل آگے ہی بڑھتی ہے اور ایسا کوئی امکان نہیں پایا جاتا کہ یہ لامحدود فاصلے پر موجود سرحد سے انعکاس پذیر ہو کر واپس پہلی سرحد تک آن پہنچے۔ اس حصے میں ہم محدود جسامت کے خطے میں ترسیلی موج پر غور کرتے ہیں جہاں دوسرے خطے کی محدود جسامت کی بنا پر ترسیلی موج کا کچھ حصہ واپس پہلی سرحد پر پہنچ سکتا ہے۔

شکل 10.12 میں دو سرحدی مسئلہ دکھایا گیا ہے جہاں پہلے نیم لامحدود خطے کی قدرتی رکاوٹ Z_1 ، دوسرے محدود موٹائی کے خطے کی قدرتی رکاوٹ Z_2 اور تیسرے نیم لامحدود خطے کی قدرتی رکاوٹ Z_3 ہے۔ محدود خطے کی موٹائی l ہے۔ یہاں پہلا سرحد خطہ-1 اور خطہ-2 کے درمیان $z=-l$ پر جبکہ دوسرا سرحد خطہ-2 اور خطہ-3 کے درمیان $z=0$ پر پایا جاتا ہے۔ پہلے خطے میں موج دائیں جانب (یعنی بڑھتے z جانب) حرکت کرتے ہوئے پہلی سرحد پر عمودی آن پہنچتی ہے جس کے بعد یہ مسلسل چلی آتی ہے۔

پہلی سرحد پر آمدی موج کا کچھ حصہ انعکاس پذیر ہو کر واپس پہلے خطے میں بائیں جانب لوٹتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ دوسرے خطے میں داخل ہو کر دائیں جانب حرکت کرتے ہوئے دوسری سرحد پر پہنچتا ہے۔ اس موج کا کچھ حصہ دوسری سرحد سے بھی گزر پاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ دوسری سرحد سے انعکاس پذیر ہو کر واپس پہلی سرحد جانب چل پڑتا ہے جہاں انعکاس اور ترسیل کا عمل ایک مرتبہ دوبارہ دہرایا جاتا ہے۔ یوں دوسری سرحد سے واپس لوٹتی موج کا کچھ حصہ پہلی سرحد سے گزر کر پہلے خطے میں داخل ہو کر تازہ انعکاسی موج کے ساتھ مل کر بائیں چلے جاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ پہلی سرحد سے انعکاس پذیر ہو کر اسی سرحد سے تازہ ترسیلی موج کے ساتھ مل کر دوسری سرحد کے جانب چل پڑتا ہے۔ یہی عمل بار بار دہرایا جاتا ہے۔

[72] semi-infinity region

x
آمدی موج
η_1 η_2 η_3
$\eta_{\text{داخلی}}$
$-l$ 0 z

شکل 10.12: دوسرحدی مسئلے میں دوسرے اور تیسرے خطے کے قدرتی رکاوٹ اور دوسرے خطے کی موٹائی کے اثرات پہلی سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ کی صورت میں نمودار ہوتے ہیں۔

یوں ہر لمحہ پہلے خطے سے تازہ ترسیلی موج دوسرے خطے میں داخل ہو کر، اس خطے میں پہلے سے موجود، متعدد مرتبہ انعکاس پذیر اجزاء کے ساتھ مل کر دوسری سرحد کی جانب ایک نئی کارواں روانہ کرتی ہے۔اسی طرح دوسرے خطے میں بار بار انعکاس پذیر اور پہلی سرحد سے دو مرتبہ ترسیل کے بعد متعدد حصے مل کر پہلے خطے میں مجموعی انعکاسی موج کو جنم دیتے ہیں۔ ہم اسی طرح تمام امواج کو مد نظر رکھتے ہوئے مسئلے کو حل کر سکتے ہیں۔صفحہ 574 پر حصہ 11.7 میں ایسا ہی کرتے ہوئے عارضی حالت دریافت کی گئی ہے۔

اگر آمدی موج برقرار آتی رہے تب تینوں خطوں میں جلد برقرار صورت حال پیدا ہو جاتی ہے جہاں پہلے خطے میں آمدی موج کی نسبت سے کوئی خاص مقدار کی موج بطور انعکاسی موج پائی جاتی ہے۔اس انعکاسی موج کا مخصوص حیطہ اور دوری زاویہ پایا جاتا ہے۔اسی طرح دونوں سرحد سے گزرتے ہوئے، تیسرے خطے میں بھی آمدی موج کی نسبت سے کوئی خاص مقدار کی موج بطور ترسیلی موج پائی جاتی ہے جس کا مخصوص حیطہ اور دوری زاویہ پایا جاتا ہے۔دوسرے خطے میں پہلی سرحد سے تازہ ترسیلی اور دوسرے خطے میں واپس انعکاسی امواج مل کر مخصوص حیطے اور دوری زاویے کی موج کو جنم دیتے ہیں جو پہلی سرحد سے دوسری سرحد کی جانب گامزن پائی جاتی ہے۔اسی طرح دوسرے خطے میں دوسری سرحد سے تمام انعکاس پذیر امواج کا مجموعہ بطور انفرادی موج ابھرتا ہے جس کا مخصوص حیطہ اور دوری زاویہ ہوتا ہے۔ یوں برقرار صورت حال حاصل کرنے کے بعد کل پانچ عدد امواج پائی جاتی ہیں یعنی پہلے خطے میں آمدی اور انعکاسی موج، تیسرے خطے میں ترسیلی موج اور دوسرے خطے میں دائیں حرکت کرتی موج اور بائیں حرکت کرتی موج۔آئیں ان پانچ عدد امواج کی مدد سے مسئلے کو حل کریں۔

ہم تصور کرتے ہیں کہ تینوں خطے بے ضیاع، غیر مقناطیسی ہیں اور برقی میدان x سمت میں ہے۔ یوں دوسرے خطے میں دائیں اور بائیں جانب حرکت کرتی ہوئے امواج مل کر برقی میدان

$$E_{xs2} = E_{x20}^{+} e^{-j\beta_2 z} + E_{x20}^{-} e^{j\beta_2 z} \tag{10.99}$$

پیدا کرتے ہیں جہاں $\beta_2=\frac{\omega\sqrt{\epsilon_{R2}}}{c}$ ہے جبکہ E_{x20}^{+} اور E_{x20}^{-} مخلوط مقدار ہیں۔مقناطیسی میدان y سمت میں ہو گا۔یوں مقناطیسی میدان

$$H_{ys2}=H_{y20}^{+}e^{-j\beta_2 z}+H_{y20}^{-}e^{j\beta_2 z} \tag{10.100}$$

لکھا جائے گا۔دوسرے خطے میں بائیں اور دائیں حرکت کرتے برقی امواج دوسری سرحد کے انعکاسی مستقل Γ_{23} سے وابستہ ہیں جہاں

$$\Gamma_{23}=\frac{Z_3-Z_2}{Z_3+Z_2} \tag{10.101}$$

کے برابر ہے۔یوں

$$E_{x20}^{-}=\Gamma_{23}E_{x20}^{+} \tag{10.102}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مقناطیسی اجزاء کو یوں

$$H_{y20}^{+}=\frac{E_{x20}^{+}}{Z_2} \tag{10.103}$$

$$H_{y20}^{-}=-\frac{E_{x20}^{-}}{Z_2}=-\frac{\Gamma_{23}E_{20}^{+}}{Z_2} \tag{10.104}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

برقی میدان تقسیم مقناطیسی میدان کو رکاوٹِ موج[73] Z_m کہا جاتا ہے۔

$$Z_m(z)=\frac{E_{xs2}}{H_{ys2}}=\frac{E_{x20}^{+}e^{-j\beta_2 z}+E_{x20}^{-}e^{j\beta_2 z}}{H_{y20}^{+}e^{-j\beta_2 z}+H_{y20}^{-}e^{j\beta_2 z}} \tag{10.105}$$

مساوات 10.102 اور مساوات 10.103 استعمال کرتے ہوئے اسے

$$Z_m(z)=Z_2\left[\frac{e^{-j\beta_2 z}+\Gamma_{23}e^{j\beta_2 z}}{e^{-j\beta_2 z}-\Gamma_{23}e^{j\beta_2 z}}\right] \tag{10.106}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 10.101 اور یولر مماثل[74] کے استعمال سے اسے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$Z_m(z)=Z_2\frac{Z_3\cos\beta_2 z-jZ_2\sin\beta_2 z}{Z_2\cos\beta_2 z-jZ_3\sin\beta_2 z} \tag{10.107}$$

---

[73] wave impedance
[74] Euler's identity

مندرجہ بالا مساوات دوسرے خطے میں موج کی رکاوٹ دیتی ہے۔اسے استعمال کرتے ہوئے پہلی سرحد پر کل انعکاسی موج حاصل کرتے ہیں۔چونکہ سرحد پر متوازی برقی میدان $\boldsymbol{E}$ اور متوازی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ ہموار ہیں لہٰذا

$$E_{xs1}^{+} + E_{xs1}^{-} = E_{xs2} \qquad (z = -l) \tag{10.108}$$

$$H_{ys1}^{+} + H_{ys1}^{-} = H_{ys2} \qquad (z = -l) \tag{10.109}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان مساوات کو

$$E_{x10}^{+} + E_{x10}^{-} = E_{xs2} \qquad (z = -l) \tag{10.110}$$

$$\frac{E_{x10}}{Z_1} - \frac{E_{x10}^{-}}{Z_1} = \frac{E_{xs2}}{Z_m(-l)} \qquad (z = -l) \tag{10.111}$$

لکھا[75] جا سکتا ہے جہاں پہلے خطے میں آمدی موج کا حیطہ E_{x10}^{+} اور مجموعی انعکاسی موج کا حیطہ E_{x10}^{-} ہے۔ان دونوں مساوات میں دائیں ہاتھ E_{xs2} کو جوں کا توں لکھا گیا ہے جبکہ $z = -l$ پر موج کی رکاوٹ کی قیمت استعمال کی گئی ہے۔ $z = -l$ پر موج کی رکاوٹ کو پہلی سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ $Z_{\text{داخلی}}$ لکھتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو حل کرتے ہوئے E_{xs2} سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں۔یوں

$$\frac{E_{x10}^{-}}{E_{x10}^{+}} = \Gamma = \frac{Z_{\text{داخلی}} - Z_1}{Z_{\text{داخلی}} + Z_1} \tag{10.112}$$

حاصل ہوتا ہے۔ پہلی سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ مساوات 10.107 میں $z = -l$ پر کرنے سے

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_2 \frac{Z_3 \cos \beta_2 l + jZ_2 \sin \beta_2 l}{Z_2 \cos \beta_2 l + jZ_3 \sin \beta_2 l} \tag{10.113}$$

یا

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_2 \frac{Z_3 + jZ_2 \tan \beta_2 l}{Z_2 + jZ_3 \tan \beta_2 l} \tag{10.114}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہاں رک کر ایک مرتبہ مساوات 10.114 کا مساوات 10.97 کے ساتھ موازنہ کریں۔

مساوات 10.112 اور مساوات 10.113 عمومی مساوات ہیں جن سے بے ضیاع، دو متوازی سرحد سے مجموعی انعکاسی موج کا حیطہ اور دوری زاویہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔پہلے خطے میں آمدی طاقت کا Γ^2 حصہ مجموعی انعکاسی طاقت ہو گا۔آمدی طاقت کا $1 - \Gamma^2$ حصہ دوسرے خطے سے ہوتا ہوا تیسرے خطے میں ترسیل ہو گا۔دوسرے خطے میں بائیں جانب سے جتنی طاقت داخل ہوتی ہے، اس سے اتنی ہی طاقت دائیں جانب خارج ہوتی ہے۔

[75] ایسا اس لیے لکھا جا سکتا ہے جب آمدی موج کا حیطہ عین پہلی سرحد پر پایا جاتا ہو۔

مساوات 10.112 میں $Z_{داخلی} = Z_1$ کی صورت میں $\Gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے جس سے انعکاسی طاقت صفر کے برابر ہو جاتی ہے۔ایسی صورت میں تمام کی تمام آمدی طاقت تیسرے خطے میں داخل ہو پاتی ہے۔ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے دوسرا خطہ موجود ہی نہیں ہے۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ داخلی قدرتی رکاوٹ اور پہلا خطہ ہم رکاوٹ[76] ہیں۔ہم رکاوٹ صورت کئی طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہے۔یہاں $Z_3 = Z_1$ کی صورت میں ہم رکاوٹی حالت حاصل کرتے ہیں۔حصہ 10.8.2 میں $Z_3 \neq Z_1$ کی صورت میں ہم رکاوٹی حالت اختیار کرنا دکھایا جائے گا۔

اگر پہلے اور تیسرے خطے کی قدرتی رکاوٹ برابر ہوں، یعنی $Z_1 = Z_3$ ہوں، تب $\beta_2 l = m\pi$ جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ہو کی صورت میں مساوات 10.113 سے $Z_{داخلی} = Z_1$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$ کے برابر ہے جہاں λ_2 دوسرے خطے میں طول موج ہے لہٰذا

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} = m\pi$$

یا

$$l = \frac{m\lambda_2}{2} \tag{10.115}$$

درکار شرط ہے۔مساوات 10.115 کے مطابق دوسرے خطے کی موٹائی دوسرے خطے میں طول موج کی آدھی یا اس کے m گنا درکار ہے۔ایسی صورت میں $Z_{داخلی} = Z_1$ حاصل ہوتا ہے۔اس ترکیب سے ہم رکاوٹ صورت حال حاصل کرنے کو نصف طول موج[77] کی ترکیب کہا جاتا ہے۔

نصف طول موج ترکیب سے تمام آمدی طاقت تیسرے خطے میں منتقل کی جا سکتی ہے۔آمدی موج کی تعدد یعنی اس کی طول موج تبدیل کرنے سے ہم رکاوٹی شرط پوری نہیں ہو پاتی لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 10.113 سے حاصل $Z_{داخلی}$ کی قیمت Z_1 سے قدر مختلف ہو گی جس سے Γ صفر نہیں رہ پاتا۔طول موج جتنی زیادہ تبدیل کی جائے Γ کی قیمت اتنی زیادہ حاصل ہوتی ہے۔ایسی صورت میں دو سرحدی جوڑ بطور پٹی گزار فلٹر[78] کردار ادا کرتا ہے۔

آئیں دو سرحدی مسئلے کے حقیقی مثال پر غور کریں۔

---

[76] matched
[77] half-wave matching
[78] band pass filter

شکل 10.13: ریڈار اینٹینا پر ایسی شفاف حفاظتی تہہ چڑھائی جاتی ہے جو برقناطیسی امواج کو نہیں گھٹاتی۔

ریڈار اینٹینا کو موسمی اثرات سے بچانے کی خاطر استعمال کئے جانے والی ایسی تہہ کی بات کرتے ہیں جو ریڈار کی شعاعوں کے لئے بالکل شفاف ثابت ہوتی ہے۔یہ تہہ عموماً اینٹینا پر گنبد کی شکل میں ہوتی ہے۔شکل 10.13 میں ریڈار اینٹینا $z = -l$ کے بائیں جانب خلاء میں ہے جبکہ $z = 0$ تا $z = -l$ خطے میں حفاظتی تہہ ہے۔یوں $z = 0$ کے دائیں جانب خلاء ہے جس میں ریڈار اشارات بھیجتا ہے۔ خلاء کی قدرتی رکاوٹ $377\,\Omega$ ہوتی ہے۔ذو برق کی بنی حفاظتی تہہ کی موٹائی زیادہ نہیں رکھی جاتی تاکہ اس میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو۔حفاظتی تہہ سے انعکاس قابل قبول نہیں چونکہ اس طرح ریڈار کی امواج واپس اینٹینا کی طرف لوٹیں گے۔ہم چاہتے ہیں کہ اینٹینا، دائیں جانب کے پورے نظام کے لئے ہم رکاوٹی ہو۔ایسا $Z_{\text{داخلی}} = Z_2$ کی صورت میں ہو گا یعنی

$$377 = Z_1 \frac{377 + jZ_1 \tan\beta_1 l}{Z_1 + j377\tan\beta_1 l}$$

یا

$$j377^2 \tan\beta_1 l = jZ_1^2 \tan\beta_1 l$$

اب تمام غیر مقناطیسی اشیاء کی $Z_1 < 377$ ہے لہٰذا اس مساوات پر پورا صرف اس صورت اترا جا سکتا ہے جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو۔کم سے کم موٹائی یوں $n = 1$ کی صورت میں $l = \frac{\pi}{\beta_1}$ یعنی $l = \frac{\lambda_1}{2}$ حاصل ہوتی ہے۔اگر ریڈار $10\,\text{GHz}$ کی شعاعیں پیدا کرتا ہو تب ہم حفاظتی تہہ کو کم ضیاع اور ہلکے وزن کے ایسے پلاسٹک سے بنا سکتے ہیں جس کا $\epsilon_R = 2.25$ ہے۔ہمیں تہہ کی موٹائی

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3\times10^8}{2\sqrt{2.25}\times10^{10}} = 1\,\text{cm}$$

رکھنی ہو گی۔

اگر $10\,\text{GHz}$ پر چلنے والے ریڈار پر چڑھائی حفاظتی تہہ کی موٹائی $0.5\,\text{cm}$ کر دی جائے تب $\beta_1 = 314.2$ اور $Z_1 = 251.33$ لیتے ہوئے

$$Z_{\text{داخلی}} = 251.33 \times \frac{377 + j251.33\tan(314.2 \times 0.005)}{251.33 + j377\tan(314.2 \times 0.005)}$$
$$\approx 167.6\,\Omega$$

ہو گی۔یوں شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{167.6 - 377}{167.6 + 377} = -0.3845$$

ہو گا اور انعکاسی طاقت کی فی صد شرح

$$\frac{\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{2Z_0}}{\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{2Z_0}} \times 100 = |\Gamma|^2 \times 100 = 14.78\,\%$$

ہو گی۔

مشق 10.7: دو خطے آپس میں $z = 0$ پر ملتے ہیں۔سرحد کے بائیں جانب پہلا خطہ ہے جس کے مستقل $\epsilon_{R1} = 5$ ، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔سرحد کے دوسری جانب مستقل $\epsilon_{R2} = 2$ ، $\mu_{R2} = 10$ اور $\sigma_2 = 0$ ہیں۔ پہلے خطے میں s حاصل کریں۔دوسرے خطے میں s حاصل کریں اور آخر میں $z = -0.6\,\text{cm}$ پر $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔

جوابات: 5 ، 1 اور $86.9\underline{/-61.8^\circ}$

10.8.1 فیبری-پیروٹ طیف پیما

بصریات کے میدان میں عموماً **انعطافی مستقل**[79] n استعمال کیا جاتا ہے جہاں

$$n = \sqrt{\epsilon_R} \tag{10.116}$$

کے برابر ہے۔چونکہ **فیبری-پیروٹ طیف پیما**[80] بصریات میں استعمال کیا جاتا ہے لہٰذا ہم انعطافی مستقل استعمال کرتے ہوئے اس کی کارکردگی پر غور کرتے ہیں۔خلاء میں $\beta_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ جبکہ شیشے[81] میں $\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_R}$ ہیں۔یوں

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\beta}{\beta_0} = \sqrt{\epsilon_R} = n \tag{10.117}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

سادہ ترین صورت میں فیبری-پیروٹ طیف پیما n انعطافی مستقل کے سادہ شیشے (یا کسی دوسرے شفاف مادے) کا تختہ ہوتا ہے جس کی موٹائی l کو یوں رکھا جاتا ہے کہ درکار طول موج پر یہ مساوات 10.115

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2l}{m} \qquad (m = 1, 2, 3 \cdots) \tag{10.118}$$

پر پورا اترے جہاں خلاء میں طول موج λ_0 جبکہ شیشے کے تختے میں طول موج λ ہے۔مندرجہ بالا مساوات سے حاصل تمام طول موج، شیشے کے تختے سے بغیر گھٹے گزرتی ہیں۔عموماً ہم چاہتے ہیں کہ شیشے کے تختے سے صرف اور صرف ایک مخصوص طول موج گزر پائے تا کہ ایسی تمام امواج جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتی ہوں۔ایسا یوں ممکن بنایا جا سکتا ہے کہ درکار طول موج اور مساوات 10.118 سے حاصل قریبی طول موج میں طویل فاصلہ ہو۔مندرجہ بالا مساوات میں m کی مختلف قیمتیں مختلف طول موج دیتی ہیں۔ایسے دو عدد قریبی طول موج جنہیں اس مساوات میں m اور $m-1$ پر کرنے سے حاصل کیا گیا ہو میں فرق

$$\lambda_{m-1} - \lambda_m = \Delta\lambda = \frac{2l}{m-1} - \frac{2l}{m} = \frac{2l}{m(m-1)} \approx \frac{2l}{m^2} \tag{10.119}$$

ہو گا۔یاد رہے کہ m شیشے میں نصف طول موج کی گنتی

$$m = \frac{2l}{\lambda} = \frac{2ln}{\lambda_0} \tag{10.120}$$

---

[79] refractive index
[80] Fabry-Perot interferometer
[81] شیشہ غیر مقناطیسی ہے لہٰذا اس کی $\mu_R = 1$ ہے۔

ہے۔یوں

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2l} \tag{10.121}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے خلاء میں طول موج λ_0 کی صورت میں

$$\Delta\lambda_0 = \frac{\lambda_0^2}{2ln} \tag{10.122}$$

لکھا جا سکتا ہے۔درکار طول موج λ_0 سے قریب تر طول موج، جو شیشے سے گزر پائے گا، کا فاصلہ $\Delta\lambda_0$ ہے جو طیفی حد[82] کہلاتی ہے۔اگر کسی طرح اس فاصلے پر پائے جانے والے طول موج کو علیحدہ کرنا ممکن ہو تب ہم λ_0 کو علیحدہ کرنے میں کامیاب ہوں گے۔طیف پیما کو بطور پٹی گزار فلٹر بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جہاں درکار طول موج کے قریبی طول موج شیشے سے گزر پاتے ہیں جبکہ اس سے دور طول موج نہیں گزر پاتے۔

مثال 10.8: سرخ رنگ کی خلاء میں طول موج $600\,\text{nm}$ ہے۔ہمیں اس طول موج پر $\Delta\lambda_0 = 100\,\text{nm}$ فاصلے تک طول موج علیحدہ کرنے ہیں۔فیبری-پیروٹ طیف پیما میں استعمال کردہ شیشے کا انعطافی مستقل $n = 1.45$ ہے۔شیشے کی موٹائی حاصل کریں۔

حل:ہم چاہیں گے کہ طیف پیما کی $\Delta\lambda_0$ درکار قیمت سے قدر زیادہ ہو یعنی

$$l < \frac{\lambda_0^2}{2n\Delta\lambda_0} = \frac{600\times10^{-9}\times600\times10^{-9}}{2\times1.45\times100\times10^{-9}} = 1.241\,\mu\text{m}$$

اتنی باریک موٹائی کا شیشہ بنانا یا اسے استعمال کرنا ناممکن سی بات ہے۔اس کا بہتر حل یہ ہو گا کہ دو شیشوں کے درمیان تقریباً یہی فاصلہ رکھا جائے۔ان دو عدد شیشوں کے قریبی سطحوں کے مابین فاصلہ کم یا زیادہ کرتے ہوئے کسی بھی طول موج کو گزارہ جا سکتا ہے۔شیشوں کے بیرونی جانب سطحوں پر غیر انعکاسی تہہ[83] چڑھائی جاتی ہے۔

[82] free spectral range
[83] antireflective coating

10.8.2 $Z_1 \neq Z_3$ کی صورت میں ہم رکاوٹ صورت کا حصول

اس حصے میں ہم مساوات 10.113 میں $Z_1 \neq Z_3$ کی صورت میں $Z_{\text{داخلی}} = Z_1$ کے حصول پر غور کرتے ہیں جس سے $\Gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\beta_2 l = (2m-1)\frac{\pi}{2} \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

یعنی

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} l = (2m-1)\frac{\pi}{2} \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

کی صورت میں

$$l = (2m-1)\frac{\lambda_2}{4} \tag{10.123}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کے مطابق دوسرے خطے کی موٹائی، طول موج کے چوتھائی حصے کے طاق گنا ہے۔ایسی صورت میں مساوات 10.113 سے

$$Z_{\text{داخلی}} = \frac{Z_2^2}{Z_3} \tag{10.124}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم دوسرے خطے کی موٹائی کے ذریعہ پہلے خطے کو تیسرے خطے کے ہم رکاوٹ بنا سکتے ہیں۔ایسی صورت میں $Z_{\text{داخلی}} = Z_1$ ہو گا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3} \tag{10.125}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 10.123 اور مساوات 10.125 **چوتھائی طول موج**[84] سے ہم رکاوٹ بنانا ممکن بناتا ہے۔ **غیر انعکاسی تہہ**[85] کا دارومدار اسی اصول پر ہے۔

مثال 10.9: $660\,\text{nm}$ طول موج کی شعاع کے لئے $n_3 = 1.45$ انعطافی مستقل کے شیشے کو خلاء $n_1 = 1$ کے ہم رکاوٹ بذریعہ غیر انعکاسی تہہ بنانا چاہتے ہیں۔اس تہہ کی کم سے کم موٹائی اور انعطافی مستقل n_2 دریافت کریں۔

---

[84] quarter-wave matching
[85] antireflective coating

حل: خلاء اور شیشے کے قدرتی رکاوٹ

$$Z_1 = 377\,\Omega$$
$$Z_3 = \frac{377}{1.45} = 260\,\Omega$$

ہیں۔یوں مساوات 10.125 سے غیر انعکاسی تہہ کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_2 = \sqrt{377 \times 260} = 313\,\Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔یوں تہہ کا انعطافی مستقل

$$n = \frac{377}{313} = 1.2$$

ہو گا۔دوسرے خطے یعنی ذو برق تہہ میں طول موج

$$\lambda_2 = \frac{660}{1.2} = 550\,\mathrm{nm}$$

ہو گا جس سے تہہ کی کم سے کم موٹائی

$$l = \frac{\lambda_2}{4} = 0.1375\,\mu\mathrm{m}$$

حاصل ہوتی ہے۔

10.8.3 متعدد سرحدی مسئلہ

ہم تو مختلف خطوں کے درمیان سرحد پر انعکاس کو تفصیلاً دیکھ چکے ہیں۔اسی طرح ہم نے دو سرحدی صورت حال پر بھی غور کیا۔آئیں اس حصے میں متعدد سرحدی صورت میں شرح انعکاس حاصل کریں۔شکل 10.14 میں تین سرحدی مسئلہ دکھایا گیا ہے جس پر غور کرتے ہوئے متعدد سرحدی مسئلے کا حل تلاش کیا جائے گا۔

ہمیں آمدی طاقت کا وہ حصہ دریافت کرنا ہے جو تین سرحدی تہہ سے گزر نہیں پاتا بلکہ یہ انعکاس پذیر ہو کر آمدی موج کے الٹ سمت میں واپس چلے جاتا ہے۔اسی طرح ہمیں آمدی طاقت کا وہ حصہ دریافت کرنا ہے جو تینوں سرحدوں کو عبور کرتے ہوئے چوتھے خطے میں ترسیل کر پاتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر ہمیں پہلی سرحد پر داخلی قدرتی

شکل 10.14: متعدد سرحدی صورت میں شرح انعکاس۔

رکاوٹ Z_a درکار ہو گی۔ مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہمیں اختتامی سرحد سے ابتدائی سرحد کی جانب چلتے ہوئے ہر سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کرنے ہو گی۔ یوں ہم پہلے Z_b حاصل کریں گے۔ یوں تیسرے اور چوتھے خطے کے اثرات کو Z_b سے ظاہر کرتے ہوئے ہم پہلی سرحد پر پہنچیں گے۔

مساوات 10.113 استعمال کرتے ہوئے

$$Z_b = Z_3 \frac{Z_4 \cos \beta_3 l_b + jZ_3 \sin \beta_3 l_b}{Z_3 \cos \beta_3 l_b + jZ_4 \sin \beta_3 l_b} \tag{10.126}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح ہم تبادلہ رکاوٹ[86] کی مدد سے تین سرحدی مسئلے کو دو سرحدی مسئلہ بنا پائے ہیں جہاں دوسری سرحد کے دائیں جانب جو کچھ بھی ہے اسے Z_b سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اب پہلی سرحد پر مساوات 10.113 کے استعمال سے

$$Z_a = Z_2 \frac{Z_b \cos \beta_2 l_a + jZ_2 \sin \beta_2 l_a}{Z_2 \cos \beta_2 l_a + jZ_b \sin \beta_2 l_a} \tag{10.127}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آمدی طاقت کا Γ^2 حصہ انعکاسی طاقت ہو گا جہاں

$$\Gamma = \frac{Z_a - Z_1}{Z_a + Z_1} \tag{10.128}$$

کے برابر ہے۔ آمدی طاقت کا بقایا حصہ یعنی $1 - \Gamma^2$ حصہ چوتھے خطے میں ترسیل ہو گا۔ تبادلہ رکاوٹ کی ترکیب متعدد سرحدی مسئلے پر لاگو کی جا سکتی ہے۔

کیمرے[87] کے عدسہ[88] پر متعدد تہہ چڑھا کر اس کی کارکردگی بہتر کی جاتی ہے۔ یوں عدسہ پر پہلی تہہ کا انعطافی مستقل

impedance transformation[86]
camera[87]
lens[88]

عدسے کے شیشے کے انعطافی مستقل کے برابر ہو گا۔اگلی تہہ کا انعطافی مستقل قدر کم ہو گا۔اسی طرح آخری تہہ کا انعطافی مستقل عین خلاء کے انعطافی مستقل کے برابر ہو گا۔یوں ایک تہہ سے دوسری تہہ میں موج بغیر انعکاس کے داخل ہو گی۔موج کو سرحد نظر ہی نہیں آتی۔

10.9 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب

اس حصے میں تقطیب موج [89] پر غور کیا جائے گا۔خطی تقطیب اور بیضوی تقطیب کے بعد دائری تقطیب پر تبصرہ کیا جائے گا۔

اب تک اٹل سمت کی امواج پر غور کیا گیا۔یوں $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ جانب حرکت کرتا $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ سمت کا میدان

$$E_x = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z) \tag{10.129}$$

لکھا گیا۔یہ مساوات خطی تقطیب کی مثال ہے جہاں میدان تمام اوقات صرف x سمت میں پایا جاتا ہے۔عموماً $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ جانب حرکت کرتے موج میں $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ کے علاوہ $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ جزو بھی پایا جائے گا۔ایسی صورت میں موج کے اجزاء

$$\begin{aligned} E_x &= E_1\cos(\omega t - \beta z)\\ E_y &= E_2\cos(\omega t - \beta z - \delta) \end{aligned} \tag{10.130}$$

ہو سکتے ہیں جہاں دونوں اجزاء کے حیطے مختلف ممکن ہیں جبکہ ان میں زاویائی ہٹاو δ بھی پایا جا سکتا ہے۔ان اجزاء کا مجموعہ

$$\boldsymbol{E} = E_1\cos(\omega t - \beta z)\boldsymbol{a}_{\text{x}} + E_2\cos(\omega t - \beta z - \delta)\boldsymbol{a}_{\text{y}} \tag{10.131}$$

ایسی موج کو ظاہر کرے گا۔یہ مساوات غور طلب ہے۔آئیں خلاء میں کسی بھی اٹل نقطے پر وقت تبدیل ہونے سے ایسے میدان پر غور کریں۔ہم خلاء میں $z = 0$ کو اٹل نقطہ لیتے ہوئے میدان حاصل کرتے ہیں۔

اگر $E_2 = 0$ ہو تب وقت t کی تبدیلی سے میدان کی قیمت $-E_1\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ تا $+E_1\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ تبدیل ہوتی ہے۔اس میدان کو تمام t کے لئے شکل 10.15-الف میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میدان کی نوک $-E_1$ تا $+E_1$ خطی لکیر پر رہتی ہے۔اسی حقیقت سے ایسی موج کی قطبیت کو خطی قطبیت [90] کہتے ہیں۔یہ موج $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ سمت میں خطی قطبیت رکھتی ہے۔اس کے برعکس اگر مساوات 10.131 میں $E_1 = 0$ ہو تب یہ $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ خطی قطبیت کی موج ہو گی جسے شکل 10.15-ب میں دکھایا گیا ہے۔اگر $E_1 = E_2 = E_{12}$ اور $\delta = 0$ ہوں تب بھی خطی قطبیت کی موج

---

[89] wave polarization
[90] linear polarization

y E_2 $\boldsymbol{E}$ $45°$ E_1 x $-\boldsymbol{E}$

y E_2 x $-E_2$

y $-E_1$ E_1 x

الف: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ خطی قطبیت ب: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ خطی قطبیت پ: $45°$ خطی قطبیت

شکل 10.15: خطی، دائری اور بیضوی قطبیت۔

حاصل ہوتی ہے البتہ یہ موج افقی محدد کے ساتھ $45°$ کا زاویہ بناتی ہے۔ شکل 10.15-پ میں اس موج کو دکھایا گیا ہے۔

آئیں اب ذرا دلچسپ صورت حال دیکھیں۔ نقطہ $z=0$ پر مساوات 10.130

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_1 \cos \omega t \\
E_y &= E_2 \cos(\omega t - \delta)
\end{aligned}
\tag{10.132}
$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں جس میں E_y کو

$$
E_y = E_2 \left(\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta \right)
$$

لکھنا ممکن ہے۔ اس مساوات میں، E_x کی مساوات استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\cos \omega t &= \tfrac{E_x}{E_1} \\
\sin \omega t &= \sqrt{1 - \left(\tfrac{E_x}{E_1} \right)^2}
\end{aligned}
$$

پر کر کے

$$
E_y = E_2 \left[\frac{E_x}{E_1} \cos \delta + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1} \right)^2} \sin \delta \right]
$$

ملتا ہے جسے

$$
\frac{E_x^2}{E_1^2} - 2 \frac{E_x}{E_1} \frac{E_y}{E_2} \cos \delta + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \sin^2 \delta
\tag{10.133}
$$

یا

$$aE_x^2 - bE_xE_y + cE_y^2 = 1 \tag{10.134}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$a = \frac{1}{E_1^2 \sin^2\delta} \qquad b = \frac{2\cos\delta}{E_1E_2\sin^2\delta} \qquad c = \frac{1}{E_2^2\sin^2\delta} \tag{10.135}$$

لئے گئے ہیں۔مساوات 10.134 بیضوی قطبیت[91] کی عمومی مساوات ہے۔

مساوات 10.133 میں $E_1 = E_2 = E_0$ اور $\delta = \mp 90^\circ$ کی صورت میں

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \tag{10.136}$$

حاصل ہوتا ہے جو دائرے کی مساوات ہے اور جسے شکل 10.16-الف میں دکھایا گیا ہے۔شکل میں E_1 اور E_2 بھی ظاہر کئے گئے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔مساوات 10.132 سے $\delta = +90^\circ$ کی صورت میں $\omega t = 0$ پر

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos 0 = E_0 \\ E_y &= E_0 \cos(0 - 90^\circ) = 0 \qquad (\delta = +90^\circ) \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جبکہ کچھ ہی لمحے بعد $\omega t = 30^\circ$ کی صورت میں

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos 30^\circ = 0.866E_0 \\ E_y &= E_0 \cos(30^\circ - 90^\circ) = 0.5E_0 \qquad (\delta = +90^\circ) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 10.17-الف میں دونوں اوقات پر موج دکھائی گئی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بڑھتے وقت کے ساتھ میدان کی نوک دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں حرکت کرتی ہے۔اس شکل میں موج کی حرکت کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کاغذ سے باہر کو ہے۔اگر دائیں ہاتھ کے انگوٹھے کو موج کی حرکت کی سمت میں رکھا جائے تو اس ہاتھ کی بقایا چار انگلیاں دائرے پر میدان کی نوک کی حرکت کی سمت دیتی ہیں۔یوں $\delta = +90^\circ$ کی صورت میں مساوات 10.136 دائیں دائری قطبیت[92] کی موج کو ظاہر کرتی ہے۔

اسی طرح $\delta = -90^\circ$ کی صورت میں بائیں دائری قطبیت[93] حاصل ہوتی ہے جسے شکل 10.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

---

[91] elliptic polarization
[92] right circular polarization
[93] left circular polarization

الف: دائری قطبیت   ب: بیضوی قطبیت

شکل 10.16: دائری اور بیضوی قطبیت۔

الف: دایاں دائری قطبیت   ب: بایاں دائری قطبیت

شکل 10.17: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ کی دائری قطبیت۔

دائیں ہاتھ قطبی موج سے مراد وہ موج ہے جو آپ کی طرف حرکت کرتی ہوئی آپ کو گھڑی کے الٹ گھومتی نظر آئے۔ کسی موج کی قطبیت سے مراد وہ قطبیت ہے جو دیکھنے والے کی طرف حرکت کرتی موج کی قطبیت ہو گی۔

جہاں بھی غلطی کی گنجائش ہو وہاں بہتر ہوتا ہے کہ قطبیت کا ذکر کرتے وقت حرکت کی سمت کا بھی ذکر کیا جائے۔

مساوات 10.133 میں $\delta = \mp 90^\circ$ اور $E_1 \neq E_2$ کی صورت میں بیضوی موج حاصل ہوتی ہے جسے شکل 10.16-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 10.18 میں مساوات 10.133 کی عمومی شکل دکھائی گئی ہے جس میں $\delta \neq 90^\circ$ اور $E_1 \neq E_2$ ہیں۔ اس شکل میں ترخیم[94] افقی محدد کے ساتھ τ زاویہ بناتا ہے۔ یوں $\tau = 15^\circ$ کی صورت میں یہ 15° قطبی موج

شکل 10.18: عمومی بیضوی قطبیت۔

کہلائے گی۔ شکل 10.18 میں رداس کبیرہ MA اور رداس صغیرہ MB کی شرح کو شرح رداس[95]

$$\text{شرح رداس} = \frac{AA'}{BB'} \tag{10.137}$$

کہا جاتا ہے جبکہ τ موج کا زاویہ جھکاو[96] کہلاتا ہے۔ AA' محور کبیرہ اور BB' محور صغیرہ کہلاتے ہیں۔

مثال 10.10: برقی موج $\boldsymbol{E} = 3\cos(\omega t - \beta z - 45°)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 4\cos(\omega t - \beta z + 30°)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا شرح رداس اور $z = 0$ پر زاویہ جھکاو حاصل کریں۔

حل: پہلے موج کا زیادہ سے زیادہ حیطہ اور کم سے کم حیطہ دریافت کرتے ہیں۔ کسی بھی تفاعل $f(x)$ کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت دریافت کرنے کی خاطر پہلے وہ نقطہ x_0 دریافت کیا جاتا ہے جہاں درکار قیمت پائی جائے گی۔ یہ نقطہ $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$ سے حاصل ہوتا ہے۔

دی گئی برقی موج کی عمومی صورت

$$\boldsymbol{E} = E_x \cos\theta + E_y \cos(\theta + \delta) \tag{10.138}$$

---

ellipse[94]
axial ratio[95]
tilt angle[96]

ہے جس سے

$$|\boldsymbol{E}|^2 = E_x^2 \cos^2\theta + E_y^2 \cos^2(\theta + \delta)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہمیں متغیرہ θ کی وہ قیمت درکار ہے جس پر $|\boldsymbol{E}|^2$ زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم پایا جائے گا۔اس تفاعل کا تفرق صفر کے برابر پر کرتے ہیں۔

$$-2E_x^2 \cos\theta \sin\theta - 2E_y^2 \cos(\theta+\delta)\sin(\theta+\delta) = 0$$

اس میں $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ استعمال کرتے ہوئے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$E_x^2 \sin 2\theta + E_y^2 \sin[2(\theta+\delta)] = 0$$

اب $\sin(2\theta+2\delta) = \sin 2\theta \cos 2\delta + \cos 2\theta \sin 2\delta$ پر کرتے ہیں۔

$$E_x^2 \sin 2\theta + E_y^2 [\sin 2\theta \cos 2\delta + \cos 2\theta \sin 2\delta] = 0$$

اس سے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-E_y^2 \sin 2\delta}{E_x^2 + E_y^2 \cos 2\delta}$$

جس سے

$$\theta_{01} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-E_y^2 \sin 2\delta}{E_x^2 + E_y^2 \cos 2\delta}\right) \tag{10.139}$$

حاصل ہوتا ہے۔محور کبیرہ اور محور صغیرہ میں 90° کا فرق پایا جاتا ہے لہٰذا دوسرا محور

$$\theta_{02} = 90^\circ + \theta_{01} \tag{10.140}$$

پر ہو گا۔ان میں ایک نقطے پر تفاعل کی کم سے کم قیمت حاصل ہو گی جبکہ دوسرے نقطے پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل ہو گی۔

سوال میں دی گئی موج میں $\omega t - \beta z - 45^\circ = \theta$ پر کرنے سے اسے

$$\boldsymbol{E} = 3\cos\theta - 4\cos(\theta + 75^\circ)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 10.139 اور مساوات 10.140 سے

$$\theta_{01} = \omega t - \beta z - 45^\circ = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-(-4)^2\sin(2\times 75^\circ)}{3^2+(-4^2\cos(2\times 75^\circ)}\right) = 29.37^\circ$$
$$\theta_{02} = 90^\circ + 29.37 = 119.37^\circ$$

حاصل ہوتے ہیں۔پہلے نقطے پر محور

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= 3\cos 29.37^\circ \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 4\cos(29.37^\circ + 75^\circ)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\ &= 2.6144\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.9927\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\ &= 2.797\underline{/20.792^\circ}\end{aligned}$$

جبکہ دوسرے نقطے پر محور

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -1.471\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3.875\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\ &= 4.145\underline{/110.79^\circ}\end{aligned}$$

پایا جائے گا۔دوسرے محور کی لمبائی زیادہ ہے لہٰذا یہ محور کبیرہ ہے۔ شرح رداس

$$\frac{4.145}{2.797} = 1.42$$

ہے جبکہ محور کبیرہ کا زاویہ جھکاو 110.79° یا -69.11° دیتا ہے۔شکل 10.19 میں نتائج دکھائے گئے ہیں۔

مثال 10.11: صفحہ کتاب کے عمودی باہر کی جانب موج کے اجزاء درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}E_x &= 5\cos\omega t\\ E_y &= 15\cos(\omega t + 90^\circ)\end{aligned}$$

موج کی شرح رداس، تقطیب اور زاویہ جھکاو حاصل کریں۔

حل:

$$\text{شرح رداس} = \frac{15}{5} = 3$$

شکل 10.19: مثال 10.10 کی بیضوی قطبی موج۔

کبیرہ اور صغیرہ رداس برابر نہ ہونے کی وجہ سے بیضوی موج پائی جائے گی۔گھومنے کی سمت دریافت کرنے کی خاطر ہم کسی بھی دو قریبی لمحات پر موج کو دیکھتے ہیں۔یوں لمحہ $\omega t = 0$ پر

$$E_x = 5\cos 0^\circ = 5$$
$$E_y = 15\cos 90^\circ = 0$$

ہوں گے جبکہ $\omega t = 30^\circ$ پر

$$E_x = 5\cos 30^\circ = 4.33$$
$$E_y = 15\cos(30^\circ + 90^\circ) = -7.5$$

ہوں گے۔ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موج گھڑی کی سمت گھوم رہی ہے لہٰذا یہ بائیں بیضوی قطبی موج کہلائے گی۔

چونکہ کبیرہ رداس y محدد جبکہ صغیرہ رداس x محدد پر ہیں لہٰذا زاویہ جھکاو 90° ہے۔

مثال 10.12: موج کی دوری سمتی مساوات $\boldsymbol{E}_s = E_0(\boldsymbol{a}_\text{X} - j\boldsymbol{a}_\text{y})e^{-j\beta z}$ ہے۔موج کی حقیقی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی قطبیت دریافت کریں۔

حل:موج کو حقیقی شکل میں لکھنے کی خاطر دوری سمتی مساوات کو $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے یولر مماثل کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= E_0(\boldsymbol{a}_\text{X} - j\boldsymbol{a}_\text{y})e^{j(\omega t - \beta z)} \\
&= E_0(\boldsymbol{a}_\text{X} - j\boldsymbol{a}_\text{y})[\cos(\omega t - \beta z) + j\sin(\omega t - \beta z)] \\
&= E_0[\boldsymbol{a}_\text{X}\cos(\omega t - \beta z) + \boldsymbol{a}_\text{y}\sin(\omega t - \beta z)] \\
&\qquad + jE_0[\boldsymbol{a}_\text{X}\sin(\omega t - \beta z) - \boldsymbol{a}_\text{y}\cos(\omega t - \beta z)]
\end{aligned}$$

اس کا حقیقی جزو

$$\boldsymbol{E} = E_0[\boldsymbol{a}_\text{X}\cos(\omega t - \beta z) + \boldsymbol{a}_\text{y}\sin(\omega t - \beta z)]$$

یعنی

$$\boldsymbol{E} = E_0[\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cos(\omega t - \beta z) + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cos(\omega t - \beta z - 90^\circ)] \quad \text{دایاں دائری قطبی} \tag{10.141}$$

ہے جو حقیقی موج کی مساوات ہے۔

کسی بھی نقطے مثلاً $z = 0$ پر دو قریبی لمحات پر موج کو دیکھتے ہوئے، اس کے گھومنے کی سمت دیکھی جا سکتی ہے۔ لمحہ $\omega t = 0$ پر موج $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں ہے جبکہ لمحہ $\omega t = 90^\circ$ پر موج $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں ہے۔ یوں موج الٹ گھڑی گھوم رہی ہے۔ چونکہ رداس کبیرہ اور رداس صغیرہ برابر ہیں لٰہذا یہ دائری موج ہے۔ اس موج کو دائیں دائری قطبی موج کہا جائے گا۔ سوال 10.48 میں آپ سے گزارش کی گئی ہے کہ بایاں دائری قطبی موج کی مساوات

$$\boldsymbol{E} = E_0[\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cos(\omega t - \beta z) + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cos(\omega t - \beta z + 90^\circ)] \quad \text{بایاں دائری قطبی} \tag{10.142}$$

حاصل کریں۔

مشق 10.8: موج کی دوری سمتی مساوات $\boldsymbol{E}_s = E_0(\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - j\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})e^{j\beta z}$ ہے۔ موج کی حقیقی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی قطبیت دریافت کریں۔

جواب: دھیان رہے کہ یہ موج منفی z محدد کی جانب حرکت کر رہی ہے۔ یوں یہ بائیں دائری قطبی موج ہے۔

مثال 10.13: دائیں دائری قطبی موج $E_0(\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - j\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})e^{-j\beta z}$ اور بائیں دائری قطبی موج $E_0(\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + j\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})e^{-j\beta z}e^{j\delta}$ میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ ان کا مجموعہ دریافت کریں۔

حل:ان کا مجموعہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= E_0(\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - j\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})e^{-j\beta z} + E_0(\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + j\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})e^{-j\beta z}e^{j\delta} \\ &= E_0[(1+e^{j\delta})\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - j(1-e^{j\delta})\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}]e^{-j\beta z}\end{aligned}$$

ہو گا۔اس سے $e^{j\frac{\delta}{2}}$ باہر نکالتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = E_0 e^{j\frac{\delta}{2}}[(e^{-j\frac{\delta}{2}} + e^{j\frac{\delta}{2}})\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - j(e^{-j\frac{\delta}{2}} - e^{j\frac{\delta}{2}})\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}]e^{-j\beta z}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $e^{j\frac{\delta}{2}} + e^{j\frac{\delta}{2}} = 2\cos\frac{\delta}{2}$ اور $e^{j\frac{\delta}{2}} - e^{j\frac{\delta}{2}} = j2\sin\frac{\delta}{2}$ پر کرنے سے

$$\boldsymbol{E} = 2E_0\left[\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right]e^{-j(\beta z - \frac{\delta}{2})} \tag{10.143}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 10.143 خطی قطبی موج ہے جو x محدد کے ساتھ $\frac{\delta}{2}$ زاویے پر ہے۔اس مثال سے ثابت ہوا کہ کسی بھی خطی قطبی موج کو دو عدد دائری قطبی امواج کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

10.10 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ

کسی بھی موج کی اوسط طاقت مساوات 10.56

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے۔شکل 10.18 کے عمومی بیضوی قطبی موج کے x اور y اجزاء

$$E_{sx} = E_1 e^{j(\omega t - \beta z)} \tag{10.144}$$

$$E_{sy} = E_2 e^{j(\omega t - \beta z + \delta)} \tag{10.145}$$

میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر کل برقی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہو گا جسے نقطہ $z = 0$ پر

$$\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}E_1 e^{j\omega t} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}E_2 e^{j(\omega t + \delta)} \tag{10.146}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ

$$\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}} = Z = |Z| \, e^{j\theta_Z}$$

ہوتا ہے لہٰذا مساوات 10.144 کی جوڑی مقناطیسی موج

$$H_{sy} = \frac{E_{sx}}{|Z|} e^{-j\theta_Z} = \frac{E_1}{|Z|} e^{j(\omega t - \beta z - \theta_Z)} = H_1 e^{j(\omega t - \beta z - \theta_Z)}$$

ہو گی۔اسی طرح مساوات 10.145 کی جوڑی

$$H_{sx} = -H_2 e^{j(\omega t - \beta z + \delta - \theta_Z)} \tag{10.147}$$

ہو گی۔کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہو گا جسے نقطہ $z = 0$ پر

$$\boldsymbol{H}_s = -\boldsymbol{a}_{\text{X}} H_2 e^{j(\omega t + \delta - \theta_Z)} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} H_1 e^{j(\omega t - \theta_Z)} \tag{10.148}$$

لکھا جا سکتا ہے۔جوڑی دار مخلوط $\boldsymbol{H}_s$ کی قیمت مندرجہ بالا مساوات میں مثبت j کو منفی اور منفی j کو مثبت لکھ کر حاصل ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}_s^* = -\boldsymbol{a}_{\text{X}} H_2 e^{-j(\omega t + \delta - \theta_Z)} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} H_1 e^{-j(\omega t - \theta_Z)} \tag{10.149}$$

مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ سے اوسط طاقت

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{a}_{\text{X}} E_1 e^{j\omega t} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} E_2 e^{j(\omega t + \delta)} \right) \times \left(-\boldsymbol{a}_{\text{X}} H_2 e^{-j(\omega t + \delta - \theta_Z)} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} H_1 e^{-j(\omega t - \theta_Z)} \right) \Big|_{\text{حقیقی}} \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \left[E_1 H_1 e^{j\theta_Z} + E_2 H_2 e^{j\theta_Z} \right]_{\text{حقیقی}}
\end{aligned}$$

یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \left(E_1 H_1 + E_2 H_2 \right) \cos \theta_Z \tag{10.150}$$

حاصل ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ طاقت δ پر بالکل منحصر نہیں ہے۔

بے ضیاع خطے میں برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہوتے ہیں۔ان میں $\frac{E_1}{H_1} = \frac{E_2}{H_2} = Z_0$ کے برابر ہوتا ہے جہاں حقیقی قدرتی رکاوٹ کا زاویہ $\theta_Z = 0$ ہے۔ایسے خطے میں

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \left(E_1 H_1 + E_2 H_2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \left(H_1^2 + H_2^2 \right) Z_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{a}_{\text{Z}} H^2 Z_0
\end{aligned} \tag{10.151}$$

ہو گا جہاں $H=\sqrt{H_1^2+H_2^2}$ کے برابر ہے۔اس مساوات کو

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\left(E_1H_1+E_2H_2\right)\\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\frac{E_1^2+E_2^2}{Z_0}=\frac{1}{2}\frac{E^2}{Z_0}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\end{aligned} \tag{10.152}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $E=\sqrt{E_1^2+E_2^2}$ کے برابر ہے۔

جس بیضوی موج کے اجزاء مساوات 10.144 اور مساوات 10.145 میں دیے گئے ہیں، اس موج کی طاقت مساوات 10.152 دیتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعی بیضوی موج کی طاقت دونوں اجزاء کی علیحدہ علیحدہ طاقت $\frac{E_1^2}{2Z_0}$ اور $\frac{E_2^2}{2Z_0}$ کے مجموعے کے برابر ہے۔

مثال 10.14: خلاء میں بیضوی قطبی موج کے اجزاء

$$\begin{aligned}E_x &= 2\cos(\omega t-\beta z)\\ E_y &= 3\cos(\omega t-\beta z+75^\circ)\end{aligned}$$

وولٹ فی میٹر ہیں۔موج کی فی مربع میٹر اوسط طاقت دریافت کریں۔

حل: خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z=120\pi$ لیتے ہوئے مساوات 10.152 سے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}}=\frac{1}{2}\frac{2^2+3^2}{120\pi}=17.24\,\frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 10.1: خلاء میں $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ سمت میں حرکت کرتی، $600\,\text{MHz}$ تعدد کے مستوی برقی موج $\boldsymbol{E}$ کی چوٹی لمحہ $t = 1\,\text{ns}$ پر $z = 0.3\,\text{m}$ پر پائی جاتی ہے۔ یہ چوٹی $310\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ کے برابر ہے۔ الف) برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ امواج کی مساوات لکھیں۔ ب) میدان سمتیہ $5\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کی سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما $\boldsymbol{E}_s$ اور $\boldsymbol{H}_s$ امواج کی مساوات لکھیں۔

جواب: $\boldsymbol{E} = 310\boldsymbol{a}_{\text{x}} \cos(12\pi \times 10^8 t - 4\pi z)$ ، $\boldsymbol{H} = \frac{31}{12\pi}\boldsymbol{a}_{\text{y}} \cos(12\pi \times 10^8 t - 4\pi z)$ ، $\boldsymbol{E}_s = 310\left[\frac{5}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\text{x}} - \frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\text{y}}\right] e^{-j4\pi z}$ ، $\boldsymbol{H}_s = \frac{31}{12\pi}\left[\frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \frac{5}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\text{y}}\right] e^{-j4\pi z}$

سوال 10.2: خلاء میں نقطہ $N(3,-2,5)$ پر $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ جانب حرکت کرتی، $200\,\text{MHz}$ تعدد کے برقی میدان کی سائن نما مستوی موج کی چوٹی لمحہ $t = 0$ پر $\boldsymbol{E}_0 = 150\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 210\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ الف) λ ، β ، $\boldsymbol{a}_E$ ، $\boldsymbol{a}_H$ ، H_0 اور مقناطیسی موج $\boldsymbol{H}_s$ حاصل کریں۔ ب) لمحہ $t = 0$ پر نقطہ N پہ برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ پ) لمحہ $t = 1.5\,\text{ns}$ پر نقطہ N پہ برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ ت) نقطہ $P(5,3,7)$ پہ لمحہ $t = 2\,\text{ns}$ پر برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔

جوابات: $\lambda = \frac{3}{2}\,\text{m}$ ، $\beta = 4.2\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{a}_E = 0.51\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 0.86\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ ، $\boldsymbol{a}_H = -0.86\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 0.51\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ ، $H_0 = 0.7733\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{H}_s = 0.7733(-0.86\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 0.51\boldsymbol{a}_{\text{y}})e^{-j4.2z}$ ، $292\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $-90\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $266\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 10.3: خلاء میں مستوی موج $\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{E}_0 e^{-j6z}$ دی گئی ہے۔ الف) موج کی تعدد ω حاصل کریں۔ ب) برقی میدان کا حیطہ بالترتیب $\boldsymbol{E}_0 = 50\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ ، $\boldsymbol{E}_0 = (5 + j10)\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ ، $\boldsymbol{E}_0 = 50\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 80\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور $\boldsymbol{E}_0 = (30\underline{/45^\circ})\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ ہونے کی صورت میں لمحہ $t = 0$ پر نقطہ $N(0,0,0)$ پہ $|\boldsymbol{E}|$ حاصل کریں۔

جوابات: $1.8\,\frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ ، $50\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $11.18\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $94.3\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $11.18\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $21.2\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ،

سوال 10.4: خلاء میں $350\,\text{MHz}$ تعدد کی مستوی موج $\boldsymbol{E}_s = (5 + j2)(3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - j4\boldsymbol{a}_{\text{y}})e^{j\beta z}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ λ اور β کی قیمتیں دریافت کریں۔ لمحہ $t = 1.4\,\text{ns}$ پر نقطہ $z = 40\,\text{cm}$ پہ $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ موج کا حیطہ حاصل کریں۔

جواب: $\lambda = \frac{6}{7}\,\mathrm{m}$ ، $\beta = \frac{7\pi}{3}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{E}(z = 40\mathrm{cm}, t = 1.4\,\mathrm{ns}) = 13.96\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 10.84\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $|\boldsymbol{E}|_{\text{بلند تر}} = 26.9\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 10.5: ایسا خطہ جس کے مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 4.4$ اور $\sigma = 0$ ہیں میں بڑھتے x محدد کی جانب حرکت کرتی، $250\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی مستوی برقی موج پائی جاتی ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں ہے۔ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ v_p ، β ، λ ، Z ، $\boldsymbol{E}_s$ ، $\boldsymbol{H}_s$ اور $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ ؛

جوابات: $v_p = 1.429 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $\beta = 10.99\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\lambda = 57.2\,\mathrm{cm}$ ، $Z = 179.6\,\Omega$ ، $\boldsymbol{E}_s = E_0 e^{-j10.99x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}_s = \frac{E_0}{179.6}e^{-j10.99x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{359.2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 10.6: مستوی برقی موج $\boldsymbol{E} = E_0 e^{-\alpha z}\sin(\omega t - \beta z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $Z = |Z_0|\,e^{j\phi}$ دئے گئے ہیں۔ الف) دوری سمتیات $\boldsymbol{E}_s$ اور $\boldsymbol{H}_s$ حاصل کریں۔ ب) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E}_s = E_0 e^{-\alpha z}e^{-j(\beta z + \pi)}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}_s = -\frac{E_0}{|Z_0|}e^{-\alpha z}e^{-j(\beta z + \pi + \phi)}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{2|Z_0|}e^{-2\alpha z}\cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 10.7: خلاء میں $\boldsymbol{E} = (30\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 22\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\cos(\omega t - 60x)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) λ اور ω حاصل کریں۔ ب) دوری سمتیات $\boldsymbol{E}_s$ اور $\boldsymbol{H}_s$ لکھیں۔ پ) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\lambda = \frac{\pi}{30}\,\mathrm{m}$ ، $\omega = 1.8 \times 10^{10}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ ، $\boldsymbol{E}_s = (30\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 22\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})e^{-j60x}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{120\pi}(-22\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 30\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})e^{-j60x}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{173}{30\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 10.8: مستوی مقناطیسی موج کا دوری سمتیہ $\boldsymbol{H}_s = (5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + j4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})e^{j20y}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور تعدد $200\,\mathrm{MHz}$ ہے۔ برقی موج کا زیادہ سے زیادہ حیطہ $1200\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، Z ، v_p ، ϵ_R ، μ_R اور $\boldsymbol{H}(x, y, z, t)$ ؛

جوابات: $\beta = 20\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\lambda = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{m}$ ، $Z = 187.4\,\Omega$ ، $v_p = 6.28 \times 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $\epsilon_R = 9.6$ ، $\mu_R = 2.4$ ، $\boldsymbol{H} = 5\cos(2\pi \times 200 \times 10^6 t + 20y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 4\sin(2\pi \times 200 \times 10^6 t + 20y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$

سوال 10.9: میدان $\boldsymbol{E}(y, t) = 700\cos(2.5 \times 10^7 t - \beta y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\boldsymbol{H}(y, t) = 1.5\cos(2.5 \times 10^7 t - \beta y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ مستوی موج کو ظاہر کرتے ہیں۔ یہ موج $1.7 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، Z ، ϵ_R اور μ_R ؛

جوابات: $\beta = 0.147\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = 42.7\,\text{m}$ ، $Z = 467\,\Omega$ ، $\epsilon_R = 1.4$ ، $\mu_R = 2.2$

سوال 10.10: بے ضیاع خطے کے مستقل $\mu_R = 1.2$ اور $\epsilon_R = 5.4$ ہیں۔ لمحہ $t = 10\,\text{ns}$ پر نقطہ $N(2, 0.5, 1.5)$ پہ $15\,\text{MHz}$ تعدد اور $E_x = 350\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $E_y = 0$ ، $E_z = 0$ کی خطی قطبی موج $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، v_p ، Z ، E_0 ، $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$ ؛

جوابات: $v_p = 1.18 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $\lambda = 7.85\,\text{m}$ ، $\beta = 0.25\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $Z = 178\,\Omega$ ، $E_0 = 408.6\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = 408.6\cos(3\pi \times 10^7 t - 0.25\pi y)\boldsymbol{a}_{\text{X}}$

سوال 10.11: خطی قطبی موج $\boldsymbol{E}_s = (E_{y0}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + E_{z0}\boldsymbol{a}_{\text{Z}})e^{\alpha x}e^{j\beta x}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ایسے ضیاع کار خطے میں پائی جاتی ہے جہاں $Z = |Z_0|\,e^{j\phi}$ ہے۔ $\boldsymbol{H}_s$ ، $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$ ، $\boldsymbol{H}(x, y, z, t)$ اور $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ کے مساوات لکھیں۔

جوابات: $\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{|Z_0|}(E_{z0}\boldsymbol{a}_{\text{y}} - E_{y0}\boldsymbol{a}_{\text{Z}})e^{\alpha x}e^{j(\beta x - \phi)}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = (E_{y0}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + E_{z0}\boldsymbol{a}_{\text{Z}})e^{\alpha x}\cos(\omega t + \beta x)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{H}(x, y, z, t) = \frac{1}{|Z_0|}(E_{z0}\boldsymbol{a}_{\text{y}} - E_{y0}\boldsymbol{a}_{\text{Z}})e^{\alpha x}\cos(\omega t + \beta x - \phi)\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2|Z_0|}(E_{y0}^2 + E_{z0}^2)e^{2\alpha x}\cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\text{X}}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

سوال 10.12: کامل موصل سے بنی $\rho = 5\,\text{mm}$ اور $\rho = 12\,\text{mm}$ رداس کے نلکیوں کا محور z محدد ہے۔ دو نلکیوں کے درمیان ذو برق کے مستقل $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 3.2$ ہیں۔ اس ذو برق میں میدان $\boldsymbol{E} = \frac{1200}{\rho}\cos(\omega t - 5z)\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) میکس ویل کی مساوات استعمال کرتے ہوئے ω حاصل کریں۔ ب) $\boldsymbol{H}$ کی مساوات حاصل کریں۔ پ) $\mathscr{P}$ اور $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ ت) دونوں نلکیوں کے درمیانی خطے میں $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ جانب کتنی طاقت منتقل ہو رہی ہے۔

جوابات: $\omega = 8.38 \times 10^8\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ، $\boldsymbol{H} = \frac{5.7}{\rho}\cos(8.38 \times 10^8 t - 5z)\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\mathscr{P} = \frac{6837}{\rho^2}\cos^2(8.38 \times 10^8 t - 5z)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{3418.6}{\rho^2}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $2.5\,\text{MW}$

سوال 10.13: کروی محدد میں $\boldsymbol{E}_s = \frac{60}{r}\sin\theta e^{-j2r}\boldsymbol{a}_\theta\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور $\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{4\pi r}\sin\theta e^{-j2r}\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ دیے گئے ہیں۔ الف) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ ب) رداس $r = 5\,\text{cm}$ پر سطح $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ ، $0 < \phi < 2\pi$ سے خارج طاقت حاصل کریں۔

جوابات: $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{15\sin^2\theta}{2\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\text{r}}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $3.13\,\text{W}$

سوال 10.14: 12 GHz تعدد پر فیرائٹ کے مستقل $\mu_R = 5$ ، $\epsilon_R = 8$ اور $\sigma = 15 \, \frac{\text{mS}}{\text{m}}$ ہیں۔ آپ سے گزارش ہے کہ α ، β ، v ، λ اور Z حاصل کریں۔

جوابات: $\alpha = 2.23 \, \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ یا $19.4 \, \frac{\text{dB}}{\text{m}}$ ، $\beta = 1590 \, \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $v = 4.74 \times 10^7 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $\lambda = 3.95 \, \text{mm}$ ، $Z = 297.83 + j0.418 \, \Omega$

سوال 10.15: ایسے خطے کے مستقل μ_R ، ϵ_R اور σ حاصل کریں جس میں 100 MHz تعدد پر طول موج 1 m ، قدرتی رکاوٹ کی مطلق قیمت $200 \, \Omega$ اور تضعیفی مستقل $2 \, \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ہو۔

جوابات: $\mu_R = 1.67$ ، $\epsilon_R = 4.84$ ، $\sigma = 19.06 \, \frac{\text{mS}}{\text{m}}$

سوال 10.16: 330 MHz تعدد کی مستوی موج ایسے غیر مقناطیسی خطے میں حرکت کر رہی ہے جس کے مستقل $\epsilon_R = 2.8$ اور $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 3.6 \times 10^{-4}$ ہیں۔ الف) اس خطے کی σ حاصل کریں۔ ب) α ، β اور λ حاصل کریں۔ پ) موج کی چوٹی کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھی رہ جائے گی؟ ت) موج کی طاقت کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھا رہ جائے گا؟ ٹ) کتنے فاصلے پر موج کے زاویے میں $30°$ تبدیلی رونما ہو گی؟

جوابات: $\sigma = 1.85 \times 10^{-5} \, \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ، $\alpha = 0.04 \, \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، $\beta = 11.57 \, \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = 0.54 \, \text{m}$ ، 17.1 m ، 8.55 m ، 4.52 cm

سوال 10.17: برق گیر (کپیسٹر) C میں طاقت کے ضیاع کو برق گیر (کپیسٹر) کے متوازی مزاحمت R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسے متوازی دور کی برقی رکاوٹ Z ہے۔ برقی رکاوٹ کے زاویہ θ کا کوسائن، یعنی $\cos\theta$ ، جزو ضربی طاقت کہلاتا ہے جبکہ برق گیر (کپیسٹر) کی خاصیت Q سے مراد ωRC ہے۔ متوازی چادر برق گیر (کپیسٹر) جس کے مستقل σ ، ϵ اور μ ہیں کے جزو ضربی طاقت اور Q کے مساوات کو مماس ضیاع $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔

جوابات: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-2}}}$ ، $Q = \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-1}$

سوال 10.18: تانبے کی ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس 5 mm اور بیرونی تار کا اندرونی رداس 8 mm ہیں۔ دونوں تار گہرائی جلد δ سے بہت زیادہ موٹائی رکھتے ہیں جبکہ ذو برق بے ضیاع ہے۔ 550 MHz تعدد پر فی میٹر اندرونی تار، فی میٹر بیرونی تار اور فی میٹر مکمل ترسیلی تار کی مزاحمت دریافت کریں۔ تانبے کے مستقل کتاب کے آخر میں صفحہ 829 پر دیے ضمیمے سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

جوابات: $195\,\frac{\mathrm{m\Omega}}{\mathrm{m}}$ ، $122\,\frac{\mathrm{m\Omega}}{\mathrm{m}}$ ، $316\,\frac{\mathrm{m\Omega}}{\mathrm{m}}$

سوال 10.19: المونیم سے نلکی نما تار بنائی جاتی ہے جس کا اندرونی رداس $5\,\mathrm{mm}$ اور بیرونی رداس $6\,\mathrm{mm}$ ہیں۔ایک کلو میٹر تار کی مزاحمت مندرجہ ذیل تعدد پر حاصل کریں۔ الف) یک سمت رو۔ ب) $30\,\mathrm{MHz}$ پ) $1.2\,\mathrm{GHz}$

جوابات: $758\,\mathrm{m\Omega}$ ، $46.7\,\Omega$ ، $295\,\Omega$

سوال 10.20: کھانا جلد گرم کرنے کی خاطر عموماً برقی خرد موج چولہا[97] (مائیکرو ویو تندور) استعمال کیا جاتا ہے جو عموماً $2.45\,\mathrm{GHz}$ کے تعدد پر کام کرتا ہے۔اس چولھے کے دیوار سٹینلس سٹیل کے بنے ہوتے ہیں۔ سٹینلس سٹیل کے مستقل $\sigma = 1.1 \times 10^6\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 1$ لیتے ہوئے گہرائی جلد δ حاصل کریں۔ سٹینلس سٹیل چادر کی سطح پر $E_s = 64\underline{/0^\circ}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ لیتے ہوئے چادر کے اندر میدان کی مساوات لکھیں۔

جوابات: $\delta = 9.69\,\mathrm{\mu m}$ ، $E_s(z) = 64e^{-1.03\times10^{-7}z(1+j)}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 10.21: ایک غیر مقناطیسی موصل میں رفتار موج $4.5 \times 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ اور طول موج $0.25\,\mathrm{mm}$ ہے۔تعدد f ، گہرائی جلد δ اور موصل کی موصلیت σ حاصل کریں۔

جوابات: $f = 1.8\,\mathrm{GHz}$ ، $\delta = 39.8\,\mathrm{\mu m}$ ، $\sigma = 8.89 \times 10^4\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

سوال 10.22: برقی موج $\boldsymbol{E} = \frac{270}{r}\sin\theta\cos[\omega(t-\frac{r}{c})]\boldsymbol{a}_\theta\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ دی گئی ہے۔ رداس r کے کرہ سے کتنی طاقت خارج ہو رہی ہے۔

جواب: $810\,\mathrm{W}$

سوال 10.23: برقی موج $\boldsymbol{E}_s = 3\boldsymbol{a}_\mathrm{X} - 5\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ اور مقناطیسی موج $\boldsymbol{H}_s = 14\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 13\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - 16\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ الف) حرکت موج کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ ب) موج کی اوسط کثافت طاقت حاصل کریں۔ پ) $\mu_R = 1$ کی صورت میں ϵ_R حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{a} = 0.38\boldsymbol{a}_\mathrm{X}0.53\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 0.76\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ ، $71.7\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}$ ، $\epsilon_R = 2.32$

[97] micro wave oven

سوال 10.24: ضیاع کار خطہ $x<0$ کے مستقل $\mu_R=1$ ، $\epsilon_R=1$ اور $\sigma=1500\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں جبکہ $x>0$ خلاء ہے۔ خلاء میں نقطہ $N(0^+,0,0)$ پر مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}=300\cos 5\times10^8 t\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) نقطہ $(0^-,0,0)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔ ب) خلاء میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ $(0^+,0,0,)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ خطہ $z<0$ میں $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ جانب حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ $(0^-,0,0)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{H}=300\cos 5\times10^8 t\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{E}=113\cos 5\times10^8 t\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{E}=238\cos(5\times 10^8 t-45^\circ)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 10.25: آمدی مستوی موج جس کی تعدد $\omega=4.2\times10^8\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ ہے خطہ-ا، $z<0$ ، $\sigma_1=0$ ، $\mu_{R1}=1$ ، $\epsilon_{R1}=3.2$ سے خطہ-2، $z>0$ ، $\sigma_2=0$ ، $\mu_{R2}=2.6$ ، $\epsilon_{R2}=12$ میں داخل ہوتی ہے۔ آمدی برقی موج کا حیطہ $z=0$ ، $t=0$ پر $5.6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ الف) Z_1 ، Z_2 ، β_1 اور β_2 حاصل کریں۔ ب) Γ اور τ حاصل کریں۔ پ) $E_1(t)$ اور $E_2(t)$ حاصل کریں۔ ت) $H_1(t)$ حاصل کریں۔ ٹ) لمحہ $t=4\,\mathrm{ns}$ پر نقطہ $(0,0,-1.5)$ پہ H_1 حاصل کریں۔

جوابات: $Z_1=211\,\Omega$ ، $Z_2=175\,\Omega$ ، $\beta_1=2.5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\beta_2=7.8\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\Gamma=-0.0913$ ، $\tau=0.9087$ ، $E_1=5.6\cos(4.2\times10^8 t-2.5z)-0.511\cos(4.2\times10^8 t+2.5z)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $E_2=5.09\cos(4.2\times10^8 t-7.8z)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $H_1=26.59\cos(4.2\times10^8 t-2.5z)+2.43\cos(4.2\times10^8 t+2.5z)\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$ ، $H_1=16.49\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$

سوال 10.26: تھیلا بنانے والے پلاسٹک میں $14\,\mathrm{GHz}$ تعدد کی مستوی موج $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں حرکت کرتے ہوئے $x=0.3\,\mathrm{cm}$ پر پائے جانے والے کامل موصل سطح سے انعکاس پذیر ہوتی ہے۔ الف) وہ سطحیں دریافت کریں جن پر $\boldsymbol{E}=0$ ہو گا۔ ب) اس پلاسٹک میں بلند تر برقی چوٹی اور بلند تر مقناطیسی چوٹی کی شرح حاصل کریں۔

جوابات: $x=0.3-0.71n\,\mathrm{cm}$ جہاں $n=0,1,2,\cdots$ ہے، $Z=251\,\Omega$

سوال 10.27: خطہ $z<0$ بے ضیاع خلاء ہے جبکہ ضیاع کار خطہ $z>0$ کے مستقل $\epsilon=30\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}}$ ، $\mu=4.2\,\frac{\mathrm{\mu H}}{\mathrm{m}}$ اور $\sigma=4.6\,\frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ خلاء سے سرحد پر آمدی موج کی مساوات $E_{x1}^+=340e^{-\alpha_1 z}\cos(2\times10^8 t-\beta_1 z)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ الف) α_1 اور β_1 حاصل کریں۔ ب) انعکاسی مستقل حاصل کریں۔ پ) انعکاسی موج E_{x1}^- کی مساوات حاصل کریں۔ ت) ترسیلی موج E_{x2}^+ کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\alpha_1 = 0$ ، $\beta_1 = 0.667\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\Gamma = 0.176\angle 111^\circ$ ، $E_{x1}^- = 59.8\cos(2\times 10^8 t + 0.667z + 111^\circ)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $E_{x2}^+ = 324e^{-0.81z}\cos(2\times 10^8 t - 2.39z + 9.9^\circ)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 10.28: المونیم کی سطح $y = 0$ پر خلاء سے عمودی آمدی موج $E_{x1}^+ = E_{x10}^+\cos(4\times 10^8 t - \beta y)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔آمدی طاقت کا کتنا فی صد سطح سے انعکاس پذیر ہوتا ہے۔

جواب: 99.997 %

سوال 10.29: مستوی موج خطہ-1 سے خطہ-2 پر عمودی پڑتی ہے۔ان خطوں کے مستقل $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ، $\epsilon_{R1} = \mu_{R1}^3$ ، اور $\epsilon_{R2} = \mu_{R2}^3$ ہیں۔آمدی طاقت کا 40 % سرحد سے واپس لوٹتا ہے۔ $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}} = 0.225$ اور $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}} = 4.442$

سوال 10.30: خلاء سے مستوی موج ضیاع کار خطہ $\sigma = 0.002\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ ، $\epsilon_R = 8.2$ اور $\mu_R = 1.8$ پر عمودی پڑتی ہے۔آمد موج کی تعدد 100 MHz اور کثافت طاقت $12\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ہے۔الف) ابتدائی ترسیلی کثافت طاقت حاصل کریں۔ ب) ضیاع کار خطے میں کی قیمت حاصل کریں۔ پ) دوسرے خطے میں کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد ترسیلی کثافت طاقت $0.2\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ رہ جائے گی۔

جوابات: $10.42\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $\alpha_2 = 0.1765\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، 11.2 m

سوال 10.31: خلاء $z < 0$ میں برقی موج $\boldsymbol{E}_s = 100e^{-j15z}\boldsymbol{a}_y + 28\angle 30^\circ e^{j15z}\boldsymbol{a}_y\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ الف) موج کی تعدد حاصل کریں۔ ب) خطہ $z > 0$ کی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں ۔ پ) دو خطوں کی سرحد کے قریب کس مقام پر برقی موج کی چوٹی پائی جاتی ہے؟

جوابات: 715.7 MHz ، $Z = 585 + j178\,\Omega$ ، $z = -1.75$ cm

سوال 10.32: بے ضیاع خطہ $z < 0$ کے مستقل $\sigma_1 = 0$ ، $\mu_1 = 30\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ اور $\epsilon_1 = 120\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں جبکہ ضیاع کار خطہ $z > 0$ کے مستقل $\sigma_1 = 0.02\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ ، $\mu_1 = 50\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ اور $\epsilon_1 = 260\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔آمدی موج $\boldsymbol{E}_s = 10e^{-\alpha_1 z}\cos(9\times 10^8 t - \beta_1 z)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ الف) α_1 اور β_1 حاصل کریں۔ ب) $\mathscr{P}^+_{1\text{اوسط}}$ اور $\mathscr{P}^-_{1\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ پ) $\mathscr{P}^+_{2\text{اوسط}}$ کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\alpha_1 = 0\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، $\beta_1 = 54\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\mathscr{P}^{+}_{1\text{اوسط}} = 100\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$ ، $\mathscr{P}^{-}_{1\text{اوسط}} = -0.486\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$ ، $\mathscr{P}^{+}_{2\text{اوسط}} = 99.514e^{-8.76z}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$

سوال 10.33: خطہ $0 < z < 1.5\,\text{m}$ میں بے ضیاع ذو برق پایا جاتا ہے جس کے مستقل $\sigma_2 = 0$ ، $\mu_{R2} = 1$ اور $\epsilon_{R2} = 6$ ہیں۔اس خطے کو دونوں جانب خلاء پائی جاتی ہے۔مستوی موج جس کی تعدد $\omega = 6 \times 10^8\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہے سرحد $z = 0$ کی جانب $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ الف) ذو برق میں β_2 حاصل کرتے ہوئے سرحد $z = 0$ پر $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔ ب) خطہ $z < 0$ میں Γ_1 اور s_1 حاصل کریں۔ پ) ذو برقی میں $z = 1.5\,\text{m}$ پر سرحد سے منعکس موج کو استعمال کرتے ہوئے Γ_2 اور s_2 حاصل کریں۔ ت) خطہ $z > 1.5\,\text{m}$ میں s_3 حاصل کریں۔ ٹ) خطہ $z < 0$ میں سرحد کے قریب ترین ایسا نقطہ حاصل کریں جہاں بلند تر برقی میدان پایا جاتا ہے۔

جوابات: $\beta_2 = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $Z_{\text{داخلی}} = 77.69 - j66.76\,\Omega$ ، $\Gamma_1 = -0.623 - j0.238 = 0.667e^{-j2.776}$ ، $s_1 = 5$ ، $\Gamma_2 = 0.42$ ، $s_2 = 2.45$ ، $s_3 = 1$ ، $z = -0.924\,\text{m}$

سوال 10.34: ضیاع کار خطہ جہاں $\alpha = 0.4\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ہو میں موج $100\,\text{m}$ چلنے کے بعد سرحد سے منعکس ہو کر واپس اسی ابتدائی نقطے تک پہنچتی ہے۔انعکاسی مستقل $\Gamma = 0.4 - j0.5$ ہے۔واپس آتی موج اور ابتدائی موج کی طاقت کی شرح حاصل کریں۔

جواب: 1.33×10^{-70}

سوال 10.35: خطہ $z < 0$ اور خطہ $z > 0$ کامل ذو برق پر مشتمل ہیں جہاں $\sigma = 0$ اور $\mu_R = 1$ ہیں۔تعدد $2 \times 10^{10}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ کی موج $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ سمت میں حرکت کرتے ہوئے دونوں خطوں سے گزرتی ہے۔ان خطوں میں طول موج بالترتیب $8\,\text{cm}$ اور $6\,\text{cm}$ ہیں۔الف) Γ حاصل کریں۔ ب) کتنی فی صد طاقت منعکس پذیر ہوتی ہے۔ پ) کتنی فی صد طاقت ترسیل ہوتی ہے۔ ت) شرح ساکن موج s حاصل کریں۔

جوابات: $\Gamma = 0.143e^{j\pi}$ ، $2.04\,\%$ ، $97.96\,\%$ ، $s = 1.333$

سوال 10.36: کامل ذو برقی $\sigma = 0$ سے خلاء میں موج داخل ہوتی ہے۔مندرجہ ذیل صورتوں میں ذو برق کی جزوی برقی مستقل ϵ_R حاصل کریں۔ الف) منعکس موج کی چوٹی آمدی موج کے چوٹی کی آدھی ہے۔

ب) منعکس موج کی طاقت آمدی موج کی طاقت کا نصف ہے۔ پ) ذو برقی میں $|E|_{\text{کمتر}}$ کی قیمت $|E|_{\text{بلند تر}}$ کی آدھی ہے۔

جوابات: $\epsilon_R = 9$ ، $\epsilon_R = 34$ ، $\epsilon_R = 4$

سوال 10.37: ایک ایسا خطہ جس کے مستقل ہمیں معلوم نہیں ہیں پر خلاء سے $330\,\text{MHz}$ تعدد کی موج پڑتی ہے۔ خلاء میں سرحد کے قریب $s = 3$ حاصل ہوتا ہے جبکہ موج کی پہلی کمتر قیمت سرحد سے 0.3λ فاصلے پر پائی جاتی ہے۔ انعکاسی مستقل کا زاویہ ϕ اور اس کی مطلق قیمت $|\Gamma|$ حاصل کرتے ہوئے خطے کی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔

جوابات: $\phi = 0.2\pi$ ، $|\Gamma| = 0.5$ ، $Z = 641 + j501\,\Omega$

سوال 10.38: سمندری پانی کے مستقل $\sigma = 5\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ اور $\epsilon_R = 78$ ہیں۔ خلاء سے اس پر $100\,\text{MHz}$ تعدد کی موج پڑتی ہے۔ آمدی طاقت کا کتنا حصہ واپس خلاء میں لوٹتا ہے۔

جواب: $90.7\,\%$

سوال 10.39: خلاء میں $242\,\Omega$ قدرتی رکاوٹ کی $\frac{\lambda}{8}$ موٹی تہہ پائی جاتی ہے۔ آمدی طاقت کا کتنا حصہ اس تہہ سے گزر پاتا ہے؟

جوابات: $Z_{\text{داخلی}} = 220 - j101\,\Omega$ ، $\Gamma = 0.308\underline{/-2.4\,\text{rad}}$ ، $91\,\%$

سوال 10.40: آمدی موج کی تعدد تبدیل کئے بغیر سوال 10.39 کو مندرجہ ذیل صورتوں میں دوبارہ حل کریں۔ الف) تہہ کی موٹائی دگنی کر دی جاتی ہے۔ ب) تہہ کی موٹائی آدھی کر دی جاتی ہے۔ پ) تہہ کی موٹائی چار گنا کر دی جاتی ہے۔

جوابات: $82.7\,\%$ ، $97\,\%$ ، $100\,\%$

سوال 10.41: مستوی موج کا برقی جزو $\boldsymbol{E}_s = 10e^{-j\beta x}\boldsymbol{a}_\text{z} + 15e^{-j\beta x}\boldsymbol{a}_\text{y}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ الف) اس موج کی قطبیت دریافت کریں ب) $\boldsymbol{H}_s$ حاصل کریں۔ پ) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: الف) موج خطی قطبی ہے۔ یہ موج yz سطح میں رہتے ہوئے y محدد کے ساتھ $33.7°$ زاویہ بناتی ہے۔
ب) $\boldsymbol{H}_s = -26.5e^{-j\beta x}\boldsymbol{a}_\text{y} + 39.8e^{-j\beta x}\boldsymbol{a}_\text{z}\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$ ؛ پ) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = 0.43\boldsymbol{a}_\text{x}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

سوال 10.42: بائیں قطبی $\boldsymbol{E}_s = E_0(\boldsymbol{a}_{\text{X}} + j\boldsymbol{a}_{\text{y}})e^{-j\beta z}$ دی گئی ہے۔ الف) $\boldsymbol{H}_s$ دریافت کریں۔ ب) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{H}_s = \frac{E_0}{Z_0}(\boldsymbol{a}_{\text{y}} - j\boldsymbol{a}_{\text{X}})e^{-j\beta z}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{Z_0}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

سوال 10.43: مستوی برقی موج $\boldsymbol{E}_s = 10(\boldsymbol{a}_{\text{Z}} + j\boldsymbol{a}_{\text{X}})e^{-j50y}$ ہے۔ الف) تعدد حاصل کریں۔ ب) مقناطیسی موج حاصل کریں۔ پ) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ ت) موج کی قطبیت دریافت کریں

جوابات: $2.39\,\text{GHz}$ ، $\boldsymbol{H}_s = \frac{10}{377}(\boldsymbol{a}_{\text{X}} - j\boldsymbol{a}_{\text{Z}})e^{-j50y}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = 0.27\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، بائیں قطبی

سوال 10.44: برقی موج $\boldsymbol{E}_s = 15e^{-j\beta z}\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 18e^{-j\beta z}\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ایسے خطے سے گزرتی ہے جس کی قدرتی رکاوٹ Z مخلوط عدد ہے۔ الف) $\boldsymbol{H}_s$ حاصل کریں۔ ب) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{Z}(-18e^{j\phi}\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 15\boldsymbol{a}_{\text{y}})e^{-j\beta z}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{275}{Z^*}\Big|_{\text{حقیقی}}$

سوال 10.45: شیشے کی چادر کے بائیں سطح پر موج عمودی آمد ہے۔ شیشے کی انعطافی مستقل $n = 1.45$ ہے جبکہ اس کی دائیں سطح کامل موصل کے ساتھ جڑی ہے۔ شیشے کی موٹائی $\frac{\lambda}{2}$ ، $\frac{\lambda}{4}$ اور $\frac{\lambda}{8}$ ہونے کی صورت میں بائیں سطح پر انعکاسی موج کے زاویے میں فرق دریافت کریں۔

جوابات: 0° ، 71° ، -69.2°

سوال 10.46: برقی موج کی دوری سمتی مساوات $\boldsymbol{E}_s = (5\boldsymbol{a}_{\text{X}} + j20\boldsymbol{a}_{\text{y}})e^{j\beta z}$ ہے۔اس کی قطبیت، شرح رداس اور جھکاو دریافت کریں۔

جواب: دایاں بیضوی قطبی موج۔ شرح رداس 4 ہے۔ جھکاو 90° ہے۔

سوال 10.47: برقی موج $\boldsymbol{E} = (3\underline{/-15^\circ}\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 4\underline{/30^\circ}\boldsymbol{a}_{\text{y}})e^{j\beta z}$ کی حقیقی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی قطبیت دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{a}_{\text{X}}\cos(\omega t + \beta z - 15^\circ) - 4\boldsymbol{a}_{\text{y}}\cos(\omega t + \beta z + 30^\circ)$ ، دایاں بیضوی قطبی

سوال 10.48: مثال 10.12 کے طرز پر بائیں دائری قطبی موج کی مساوات حاصل کریں جسے مساوات 10.142 میں پیش کیا گیا ہے۔

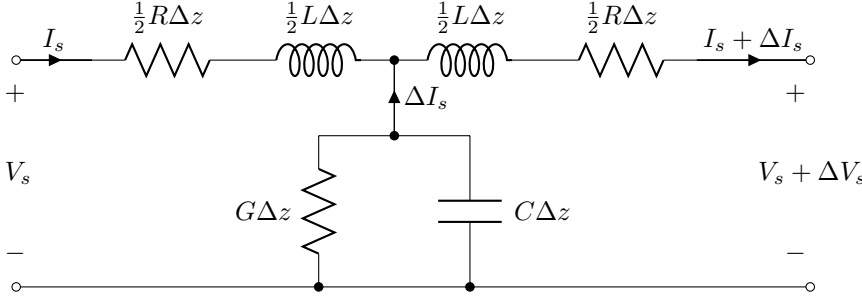
باب 11

ترسیلی تار

ترسیلی تار ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک توانائی اور اشارات منتقل کرتی ہیں۔ بالکل سادہ صورت میں ترسیلی تار منبع طاقت کو برقی بوجھ کے ساتھ منسلک کرتی ہے۔ یہ مرسل (ٹرانسمٹر)[1] اور اینٹینا[2] یا پھر ڈیم میں نسب جنریٹر اور اس سے دور کسی شہر کا برقی بوجھ ہو سکتے ہیں۔

مستوی برقناطیسی امواج عرضی امواج ہیں۔ ترسیلی تار پر بھی عرضی امواج ہی پائی جاتی ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ اس مشابہت کی بنا پر برقناطیسی امواج کے لئے حاصل کردہ مساوات ترسیلی تار کے لئے بھی قابل استعمال ہوں گے البتہ ترسیلی نظام میں برقی اور مقناطیسی میدان کے بجائے عموماً برقی دباو اور برقی رو کی استعمال کی جاتی ہیں۔ اسی طرح کثافت طاقت کی جگہ طاقت کی بات کی جاتی ہے۔

اس باب میں ترسیمی تجزیے پر خاص زور دیا جائے گا جو عرضی برقناطیسی مستوی امواج کے لئے بھی قابل استعمال ہو گی۔

[1] transmitter
[2] antenna

شکل 11.1: یکساں ترسیلی تار کا چھوٹا حصہ۔ متغیرات R، L، C اور G تار کی شکل اور مادوں پر منحصر ہیں۔

11.1 ترسیلی تار کی مساوات

ہم ترسیلی تار کی عمومی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم محوری تار کو ذہن میں رکھ کر آگے چلتے ہیں۔ یہ تار z محدد پر پڑی ہے۔ ہم محوری تار کے اندرونی اور بیرونی موصل تار بہتر موصلیت σ_c رکھتے ہیں۔ ان تاروں کے درمیان مادے کے مستقل ϵ، μ (عموماً μ_0) اور σ ہیں۔ ہم محوری تار کی جسامت اور اشارات کی تعدد جانتے ہوئے ہم اکائی لمبائی تار کے مستقل R، L، C اور G حاصل کر سکتے ہیں۔

یہاں بھی ہم موج کی حرکت a_{z} جانب تصور کرتے ہیں۔ یوں تار کی چھوٹی لمبائی Δz کی مزاحمت $R\Delta z$، امالہ $L\Delta z$، برقی گنجائش $C\Delta z$ اور ایصالیت $G\Delta z$ ہوں گے۔ شکل 11.1 میں ترسیلی تار کی اس چھوٹی لمبائی کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ تار کا یہ چھوٹا ٹکڑا دونوں اطراف سے بالکل ایک جیسا معلوم ہوتا ہے لہٰذا اس کے سلسلہ وار اجزاء کو آدھے آدھے ٹکڑوں میں کرتے ہوئے متوازی اجزاء کے دونوں طرف دکھایا گیا ہے۔ ہم متوازی اجزاء کو دو برابر ٹکڑوں میں کرتے ہوئے سلسلہ وار اجزاء کے دونوں جانب بھی جوڑ سکتے تھے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ شکل 11.1 میں بائیں طرف برقی دباو

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi)$$

پایا جاتا ہے۔ یہ حرکت کرتی موج کی عمومی مساوات ہے۔ یولر مماثل استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو

$$V = \left[V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)} \right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھی جا سکتی ہے۔اس مساوات میں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں $_{\text{حقیقی}}$ کو پوشیدہ رکھتے ہوئے دوری سمتیہ کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-\beta z}$$

جہاں مساوات کے بائیں ہاتھ V_s لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں ہے۔

شکل 11.1 کے گرد گھومتے ہوئے کرخوف کے برقی دباو کے قانون سے

$$V_s = \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L \Delta z}{2}\right) I_s + \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L \Delta z}{2}\right)(I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

یا

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = -\left(R + j\omega L\right) I_s - \frac{1}{2}\left(R + j\omega L\right) \Delta I_s$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر Δz کو صفر کے قریب تر کیا جائے تب ΔI_s بھی صفر کے قریب تر ہو گا۔یوں $\Delta z \to 0$ کی صورت میں اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔یوں اسے

$$\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}z} = -\left(R + j\omega L\right) I_s \tag{11.1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

متوازی اجزاء پر برقی دباو

$$V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L \Delta z}{2}\right) I_s$$

ہے جسے استعمال کرتے ہوئے شکل کو دیکھ کر متوازی اجزاء میں تفرقی رو کے لئے

$$-\Delta I_s = \left[V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L \Delta z}{2}\right) I_s\right]\left(G\Delta z + j\omega C \Delta z\right)$$

یا

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} = -\left(G + j\omega C\right) V_s + \frac{1}{2}\left(R + j\omega L\right)\left(G + j\omega C\right) I_s \Delta z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $\Delta z \to 0$ کیا جائے تب اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور یوں

$$\frac{\mathrm{d}I_s}{\mathrm{d}z} = -\left(G + j\omega C\right) V_s \tag{11.2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں رک کر ذرا برقناطیسی امواج کی مساوات کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔ میکس ویل کی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

میں $\boldsymbol{E}_s = E_{xs}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{H}_{ys} = H_{ys}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}E_{xs}}{\mathrm{d}z} = -j\omega\mu H_{ys} \tag{11.3}$$

ملتا ہے اور اسی طرح

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = \left(\sigma + j\omega\epsilon\right) \boldsymbol{E}_s$$

سے

$$\frac{\mathrm{d}H_{ys}}{\mathrm{d}z} = -\left(\sigma + j\omega\epsilon\right) E_{xs} \tag{11.4}$$

ملتا ہے۔

مساوات 11.2 کا مساوات 11.4 کے ساتھ موازنہ کریں۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ پہلی مساوات میں I_s کی جگہ H_{ys} لکھنے اور اسی طرح G کی جگہ σ، C کی جگہ ϵ اور V_s کی جگہ E_{xs} لکھتے ہوئے دوسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ دونوں مساوات بہت قریبی مشابہت رکھتی ہیں۔

اسی طرح مساوات 11.1 اور مساوات 11.3 کو دیکھتے ہوئے یہی جوڑے یہاں بھی پائے جاتے ہیں، البتہ یہاں L اور μ کی جوڑی بھی پائی جاتی ہے۔ ہاں ظاہری طور پر R کی جوڑی موجود نہیں ہے۔ یوں ہم $j\omega\mu$ کی جوڑی $R + j\omega L$ لے سکتے ہیں۔

لامحدود یکساں مستوی امواج اور لامحدود لمبائی کی یکساں ترسیلی تار کی سرحدی شرائط ایک جیسی ہیں۔ دونوں میں سرحد پائی ہی نہیں جاتا لہٰذا ہم گزشتہ باب میں حاصل حل

$$E_{xs} = E_{x0}e^{-\gamma z}$$

کی طرز پر اب

$$V_s = V_0 e^{-\gamma z} \tag{11.5}$$

بطور ترسیلی تار کی مساوات کا حل لکھ سکتے ہیں۔یہ برقی دباو کی موج کی مساوات ہے۔یہ موج مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے اور $z = 0$ پر اس کا حیطہ V_0 ہے۔مساوات 10.12 میں دیا گیا حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

ترسیلی تار کے لئے

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{11.6}$$

لکھا جائے گا۔طول موج اب بھی

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{11.7}$$

ہو گی۔موج کی رفتار اب بھی

$$v = \frac{\omega}{\beta} \tag{11.8}$$

ہے۔

کامل ترسیلی تار طاقت ضائع نہیں کرتی۔ایسی تار کے مستقل $R = G = 0$ ہوتے ہیں لہٰذا

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

اور

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{11.9}$$

ہوں گے۔

اسی طرح مقناطیسی موج

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

سے

$$I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z} \tag{11.10}$$

لکھا جا سکتی ہے۔ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ Z_0 کو مستوی موج کی قدرتی رکاوٹ یعنی مساوات 10.31

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

سے

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \tag{11.11}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

خطہ-1 میں آمدی موج جب خطہ-2 کی سرحد سے ٹکراتی ہے تو اس کا کچھ حصہ بطور انعکاسی موج خطہ-1 میں واپس ہو جاتا ہے۔اس انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح کو شرح انعکاس کہتے ہیں۔مستوی موج کی شرح انعکاس مساوات 10.83

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^-}{E_{x0}^+} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

دیتی ہے۔اسی طرح اگر Z_{01} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار پر آمد موج Z_{02} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار میں داخل ہونا چاہے تو ان کی سرحد سے انعکاسی موج واپس ہو گی۔ایسی انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \tag{11.12}$$

ہو گی۔انعکاسی شرح جانتے ہوئے شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{11.13}$$

لکھی جا سکتی ہے۔آخر میں اگر $z > 0$ پر $Z = Z_2$ ہو تب $z = -l$ پر E_{xs} اور H_{ys} کی شرح

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_1 \frac{Z_2 + jZ_1 \tan \beta_1 l}{Z_1 + jZ_2 \tan \beta_1 l}$$

کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے ہیں۔اس سے $z > 0$ پر Z_{02} کی صورت میں ترسیلی تار کے لئے $z = -l$ پر V_s اور I_s کی شرح، یعنی اس کی داخلی قدرتی رکاوٹ کو

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l} \tag{11.14}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہاں سے ہم غیر ضروری علامت لکھنے سے گریز کرتے ہوئے Z_{01} کو عموماً Z_1 اور Z_{02} کو عموماً Z_2 لکھیں گے۔

محدود لمبائی کی ترسیلی تار میں لمحہ $t = 0$ پر داخلی سرے سے اختتامی سرے کی جانب امواج روانہ ہوتی ہیں۔ان امواج کا کچھ حصہ اختتامی سرے پر نسب برقی بوجھ سے انعکاس پذیر ہو کر واپس لوٹے گا۔ اب تار میں آمدی موج کے ساتھ ساتھ انعکاسی امواج بھی پائی جائیں گی۔انعکاسی موج ترسیلی تار کے داخلی سرے پر پہنچ کر یہاں سے منعکس ہوں گی۔یوں تار میں اب اصل آمدی موج کے ساتھ ساتھ دو مرتبہ انعکاس پذیر امواج بھی اختتامی جانب رواں ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جلد ہی ترسیلی تار کے دونوں سروں سے بار بار منعکس، لامحدود تعداد کی امواج تار میں پائی جائیں گی۔بجائے یہ کہ ہم تار میں ہر موج پر نظر رکھیں، ہم داخلی جانب سے اختتامی جانب رواں تمام امواج کے مجموعے کو آمدی موج تصور کرتے ہیں۔اسی طرح اختتامی جانب سے داخلی جانب تمام امواج کے مجموعے کو انعکاسی موج تصور کیا جاتا ہے۔ایسا ہی تصور کرتے ہوئے مساوات 11.14 حاصل کیا گیا ہے۔

مشق 11.1: ایک ترسیلی تار کے مستقل $R = 0.15\,\frac{\Omega}{\text{m}}$، $L = 0.25\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$، $G = 8\,\frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ اور $C = 80\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔ تعدد $\omega = 5 \times 10^8\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ پر α، β، λ، v اور Z_0 حاصل کریں۔

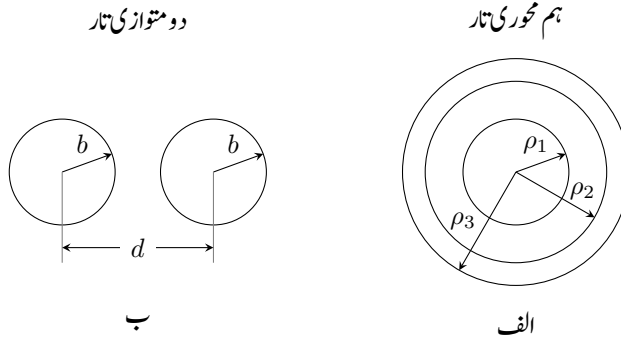
جوابات: $1.57\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$، $2.236\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$، $2.81\,\text{m}$، $2.23 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ اور $55.9\underline{/-0.029^\circ}\,\Omega$

11.2 ترسیلی تار کے مستقل

اس حصے میں مختلف اشکال کی ترسیلی تار کے مستقل یکجا کرتے ہیں۔ان میں سے عموماً مستقل کو ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں، بس انہیں ایک جگہ لکھنا باقی ہو گا۔سب سے پہلے ہم محوری تار کے مستقل اکٹھے کرتے ہیں۔

دو متوازی تار　　　ہم محوری تار

b　b　d　ρ_1　ρ_2　ρ_3

ب　　　الف

شکل 11.2: ہم محوری ترسیلی تار اور دو متوازی ترسیلی تار۔

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل

شکل 11.2-الف میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے جس میں اندرونی تار کا رداس ρ_1 ہے۔ بیرونی تار کا اندرونی رداس ρ_2 اور اس کا بیرونی رداس ρ_3 ہیں۔ تاروں کے درمیان ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔ صفحہ 216 پر مساوات میں تار کی لمبائی $L = 1\,\mathrm{m}$ پر کرنے سے اس کی فی میٹر برقی گنجائش

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{11.15}$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ فی میٹر امالہ صفحہ 383 پر مساوات 8.67 دیتی ہے۔

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{11.16}$$

یہ تار کی بیرونی امالہ ہے۔ بلند تعدد پر تار میں برقی رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہٰذا ایسی صورت میں تار کے اندر نہایت کم مقناطیسی بہاو پایا جاتا ہے اور یوں اس کی اندرونی امالہ قابل نظرانداز ہوتی ہے۔ کسی بھی ترسیلی تار کے لئے

$$L_{\text{بیرونی}} C = \mu\epsilon \tag{11.17}$$

درست ثابت ہوتا ہے۔ یوں دونوں ہم محوری تاروں کے درمیان میں بھری ذو برق کا ϵ اور فی میٹر تار کی برقی گنجائش جانتے ہوئے اندرونی امالہ اس مساوات سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

کم تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کو نظرانداز نہیں کیا جا سکتا۔ایسی صورت میں مساوات 8.71

$$L=\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{\mu}{8\pi}+\frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left(\rho_3^4\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}-\frac{\rho_2^4}{4}-\frac{3\rho_3^4}{4}+\rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{11.18}$$

میں دی گئی فی میٹر تار کی امالہ استعمال کی جائے گی۔یاد رہے کہ یہ امالہ حاصل کرتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ برقی رو یکساں موصل تار میں گزرتی ہے۔اب ہم جانتے ہیں کہ بلند تعدد پر رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہٰذا کم تعدد پر ہی اس امالہ کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔

آئیں ایسی تعدد پر بھی صورت حال دیکھیں جب اندرونی امالہ کی قیمت قابل نظرانداز نہ ہو لیکن گہرائی جلد کے اثر کو بھی نظرانداز نہیں کیا جا سکتا۔ گہرائی جلد کے اثر کی وجہ سے مساوات 11.18 قابل قبول نہیں ہو گی۔اب فرض کرتے ہیں کہ گہرائی جلد δ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے بہت کم ہے۔یوں اندرونی تار کے بیرونی باریک تہہ میں برقی رو پائی جائے گی۔ برقی رو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سمت میں ہے اور چونکہ $\boldsymbol{J}_s=\sigma_c\boldsymbol{E}_s$ ہوتا ہے لہٰذا تار کی سطح پر $\boldsymbol{E}_s$ کا مماثل جزو بھی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں ہو گا۔موصل تار کی موصلیت کو یہاں σ_c لکھا گیا ہے۔ مقناطیسی میدان کی شدت تار کی سطح پر

$$H_{\phi s}=\frac{I_s}{2\pi\rho_1} \tag{11.19}$$

ہو گی۔اب تار کی سطح پر E_{zs} اور H_{ys} کی شرح، مستوی برقناطیسی موج کی قدرتی رکاوٹ ہو گی۔اگرچہ ہم نلکی اشکال کی بات کر رہے ہیں لیکن $\rho_1\gg\delta$ کی بنا پر برقی رو گزارتے باریک تہہ کو δ موٹائی اور $2\pi\rho_1$ چوڑائی کا موصل تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں صفحہ 476 پر مساوات 10.69 سے

$$\left.\frac{E_{zs}}{H_{ys}}\right|_{\rho_1}=\frac{1+j}{\sigma_c\delta}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 11.19 پر کرنے سے

$$\left.\frac{E_{zs}}{I_s}\right|_{\rho_1}=\frac{1+j}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ E_{zs} دراصل فی میٹر برقی دباو ہے لہٰذا مندرجہ بالا شرح فی میٹر قدرتی رکاوٹ

$$Z=\left.\frac{E_{zs}}{I_s}\right|_{\rho_1}=R+j\omega L=\frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c}+j\frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} \tag{11.20}$$

کے برابر ہے۔یہ امالہ تار کی اندرونی امالہ ہے جو تار کی موصلیت σ_c پر منحصر ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کامل موصل کی صورت میں قدرتی رکاوٹ صفر ہو گی۔یوں اندرونی تار کی اندرونی امالہ

$$L_{\rho_1,\text{اندرونی}} = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c\omega}$$

ہو گی۔صفحہ 474 پر مساوات 10.66 کو $\sigma_c = \frac{1}{\pi f \mu \delta^2}$ لکھتے ہوئے اس میں پر کرنے سے

$$L_{\rho_1,\text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_1} \quad (\delta \ll \rho_1) \tag{11.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طریقہ کار سے بیرونی تار کے لئے

$$L_{\rho_2,\text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_2} \quad (\delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.22}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں بلند تعدد پر ہم محوری تار کی کل امالہ

$$L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{2\pi}\left[\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\sigma_c}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\right] \quad (\delta \ll \rho_1,\, \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.23}$$

ہو گی۔مساوات 11.20 بلند تعدد پر قدرتی رکاوٹ کا مزاحمتی حصہ یعنی فی میٹر مزاحمت بھی دیتا ہے جس سے اندرونی اور بیرونی تاروں کا سلسلہ وار مجموعہ

$$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \quad (\delta \ll \rho_1,\, \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.24}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مزاحمت کے ساتھ شعاعی اخراج سے پیدا مزاحمتی جزو بھی شامل کیا جا سکتا ہے۔بے پردہ[3] تار یا ہم محوری تار کے کھلے سر سے شعاعی اخراج ہوتا ہے۔

ایسی تعدد جس پر گہرائی جلد کی قیمت رداس سے بہت کم نہ ہو حل کرتے ہوئے **بیسل تفاعل**[4] استعمال ہوتے ہیں۔یہاں انہیں حل نہیں کیا جائے گا۔

قدرتی رکاوٹ کو عموماً بیرونی امالہ اور برقی گنجائش کی صورت میں

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{بیرونی}}}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{11.25}$$

[3] unshielded
[4] Bessel functions

لکھا جاتا ہے۔

اندرونی اور بیرونی تار کے مابین ذو برق میں سے گزرتی یک سمت برقی رو $I = GV$ سے حاصل ہوتی ہے۔اندرونی تار پر ρ_L اور بیرونی تار پر $-\rho_L$ کثافت لکیری بار تصور کرتے ہوئے تاروں کے مابین برقی دباو صفحہ 144 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

دیتی ہے۔تاروں کے درمیان ذو برق میں میدان مساوات 4.17

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

دیتی ہے۔ ذو برق کی موصلیت σ لکھتے ہوئے، صفحہ 184 پر اوہم کے قانون کی نقطہ شکل یعنی مساوات 5.11 کی مدد سے یوں رداس ρ پر کثافت برقی رو

$$J_\rho = \sigma E_\rho = \frac{\sigma\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

لکھی جائے گی۔اندرونی تار کے گرد رداس ρ پر L لمبائی کی نلکی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہو گا۔ایسی اکائی لمبائی کی سطح کے رقبہ $2\pi\rho$ سے کل

$$I = J_\rho 2\pi\rho = \frac{\sigma\rho_L}{\epsilon}$$

برقی رو گزرے گی۔یوں

$$G = \frac{I}{V} = \frac{2\pi\sigma}{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{11.26}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں G کی قیمت C کی قیمت سے حاصل کرنا دیکھتے ہیں۔ایک تار سے دوسرے تار تک $\boldsymbol{E}$ کی لکیری تکمل سے برقی دباو V حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 191 پر مساوات 5.18 کے تحت کسی بھی موصل پر سطحی کثافت بار، سطح کے عمودی برقی بہاو کے برابر ہوتی ہے، یعنی $\rho_S = D_{\text{عمودی}}$۔یوں تار پر کل بار

$$Q = \int_S \rho_S \,\mathrm{d}S = \epsilon \int_S E_{\text{عمودی}} \,\mathrm{d}S$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں S تار کا سطحی رقبہ ہے اور $D = \epsilon E$ لکھا گیا گا۔یوں

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon \int_S E_{\text{عمودی}} \, \mathrm{d}S}{V} \tag{11.27}$$

ہو گا۔اب موصل کی سطح پر $E_{\text{عمودی}}$ جانتے ہوئے یہاں کثافت برقی رو $J = \sigma E_{\text{عمودی}}$ لکھی جا سکتی ہے لہٰذا تار کے سطح سے خارج کل برقی رو

$$I = \sigma \int_S E_{\text{عمودی}} \, \mathrm{d}S$$

ہو گی۔یوں دو تاروں کے مابین ایصالیت

$$G = \frac{I}{V} = \frac{\sigma \int_S E_{\text{عمودی}} \, \mathrm{d}S}{V} \tag{11.28}$$

ہو گی۔مساوات 11.27 اور مساوات 11.28 کو دیکھ کر

$$G = \frac{\sigma}{\epsilon} C \tag{11.29}$$

لکھا جا سکتا ہے جو کسی بھی ترسیلی تار کے لئے درست ہے

مشق 11.2: ایک ہم محوری تار جس کے $\rho_1 = 1\,\mathrm{mm}$، $\rho_2 = 3.49\,\mathrm{mm}$ اور $\sigma_c = 3.82 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں کے ذو برق کے مستقل $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 2.25$ اور $\sigma = 10\,\frac{\mathrm{\mu S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔اس کی فی میٹر برقی گنجائش، بیرونی اور اندرونی امالہ حاصل کریں۔ترسیلی تار کے α، β اور Z_0 بھی حاصل کریں۔

جوابات: $0.1\,\frac{\mathrm{nF}}{\mathrm{m}}$، $0.25\,\frac{\mathrm{\mu H}}{\mathrm{m}}$، $1.29\,\frac{\mathrm{nH}}{\mathrm{m}}$، $0.014\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$، $15.1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ اور $50\underline{/0.055^\circ}\,\Omega$

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل

شکل 11.2-ب میں دو متوازی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے۔تار کا رداس b، تاروں کے مابین فاصلہ d جبکہ تار کی موصلیت σ_c ہے۔تاروں کے گرد ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔ اس تار کی برقی گنجائش صفحہ 224 پر مساوات 5.75 کی نصف ہو گی۔اس کی وجہ وہیں پر مساوات کے نیچے سمجھائی گئی ہے۔یوں فی میٹر تار کی برقی گنجائش

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\frac{d}{2b}} \tag{11.30}$$

ہو گی۔اگر $d \gg b$ ہو تب مساوات 5.76 سے

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln\frac{d}{b}} \quad (b \ll d)$$

لکھی جا سکتا ہے۔مساوات 11.17 سے تار کی فی میٹر بیرونی امالہ

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\frac{d}{2b}$$

یا

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{d}{b} \quad (b \ll d)$$

لکھی جا سکتی ہے جبکہ بلند تعدد پر فی میٹر کل امالہ

$$L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{\pi}\left(\frac{\delta}{2b} + \cosh^{-1}\frac{d}{2b}\right) \quad (\delta \ll b) \tag{11.31}$$

ہے۔تار کی بیرونی δ تہہ برقی رو گزارتی ہے۔اس تہہ کا رقبہ عمودی تراش $S = 2\pi b\delta$ ہے لہٰذا فی میٹر مزاحمت

$$R = \frac{l}{\sigma_c S} = \frac{1}{\pi b\delta\sigma_c} \tag{11.32}$$

ہو گی جہاں دونوں تاروں کی مزاحمت سلسلہ وار جڑے ہیں۔مساوات 11.29 سے فی میٹر تار کی ایصالیت

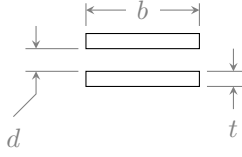
$$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}\frac{d}{2b}} \tag{11.33}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیرونی امالہ اور برقی گنجائش استعمال کرتے ہوئے قدرتی مزاحمت

$$Z_0 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\cosh^{-1}\frac{d}{2b} \tag{11.34}$$

حاصل ہوتی ہے۔

b d t

شکل 11.3: سطح مستوی ترسیلی تار۔

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار

شکل 11.3 میں سطح مستوی ترسیلی تار[5] دکھائی گئی ہے جس میں b چوڑائی اور t موٹائی کے دو متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں جن کے مابین فاصلہ d ہے۔موصل چادر کی موصلیت σ_c جبکہ ارد گرد کے ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔

اگر $b \gg d$ ہو تب ان چادروں کی فی میٹر برقی گنجائش

$$C = \frac{\epsilon\,\text{رقبہ}}{\text{فاصلہ}} = \frac{\epsilon b}{d} \tag{11.35}$$

ہو گی۔یوں مساوات 11.17 سے فی میٹر بیرونی امالہ

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu\epsilon}{C} = \frac{\mu d}{b} \tag{11.36}$$

ہو گی۔امید کی جاتی ہے کہ آپ گہرائی جلد استعمال کرتے ہوئے اندرونی امالہ حاصل کر سکتے ہیں۔یوں کل امالہ

$$L = \frac{\mu d}{b} + \frac{2}{\sigma_c \delta b w} = \frac{\mu}{b}(d+\delta) \quad (\delta \ll t) \tag{11.37}$$

ہو گی جہاں گہرائی جلد کو چادر کی موٹائی سے بہت کم تصور کیا گیا ہے۔

بلند تعدد پر برقی رو چادروں کے آمنے سامنے سطحوں پر گہرائی جلد تک محدود ہو گی۔یوں برقی رو رقبہ $b\delta$ سے گزرے گی جس سے ایک تار کی اکائی لمبائی کی مزاحمت $\frac{1}{\sigma_c b\delta}$ حاصل ہوتی ہے۔یوں اکائی لمبی تار کے دونوں حصوں کی سلسلہ وار جڑی کل مزاحمت

$$R = \frac{2}{\sigma_c b\delta} \quad (\delta \ll t) \tag{11.38}$$

[5] stripline

ہو گی۔

مساوات 11.29 سے

$$G=\frac{\sigma b}{d} \tag{11.39}$$

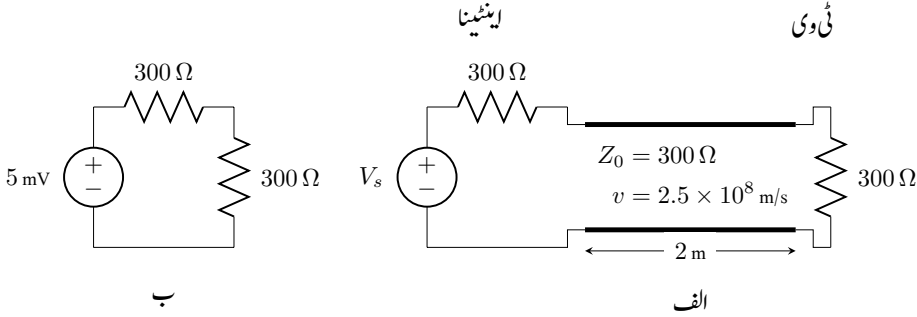
لکھی جا سکتی ہے۔

ان معلومات سے سطح مستوی ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_0=\sqrt{\frac{L_{\text{بیرونی}}}{C}}=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{d}{b} \tag{11.40}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

مشق 11.3: مندرجہ بالا تینوں اقسام کے ترسیلی تار 400 MHz پر کام کر رہے ہیں۔ان میں طاقت کے ضیاع کو نظرانداز کرتے ہوئے تمام کے لئے λ اور Γ حاصل کریں۔ہم محوری تار کا $\rho_1=0.5\,\text{mm}$، $\rho_2=2.8\,\text{mm}$، $\mu_R=1$ اور $\epsilon_R=3.1$ ہیں۔ متوازی تار کے $b=0.5\,\text{mm}$، $d=9\,\text{mm}$، $\mu_R=1$ اور $\epsilon_R=5$ ہیں۔ مستوی سطح کے $d=0.2\,\text{mm}$، $b=5\,\text{mm}$، $\mu_R=1$ اور $\epsilon_R=2.2$ ہیں۔

جوابات: 42.6 cm، 0.26، 33.5 cm، −0.215، 50.6 cm، 0.816

شکل 11.4: ترسیلی تار اینٹینا کو ٹی وی سے جوڑ رہی ہے۔

11.3 ترسیلی تار کی چند مثال

اس حصے میں گزشتہ حصوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے چند مثال کرتے ہیں۔ یہاں تمام ترسیلی تاروں کو بے ضیاع تار تصور کیا جائے گا۔

شروع دو متوازی ترسیلی تار سے کرتے ہیں جس کی قدرتی رکاوٹ $300\,\Omega$ ہے۔ ایسی تار ٹی وی[6] کے اینٹینا اور ٹی وی کے مابین لگائی جاتی ہے۔ شکل 11.4-الف میں اس طرح جڑے ترسیلی نظام کو دکھایا گیا ہے۔ اینٹینا کا تھونن[7] مساوی دور استعمال کیا گیا ہے جو ایک عدد منبع برقی دباو V_s اور اس کے ساتھ سلسلہ وار جڑی $300\,\Omega$ کی مزاحمت پر مشتمل ہے۔ ترسیلی تار ٹی وی کے برقیاتی دور کے بالکل شروع میں نسب ابتدائی ایمپلی فائر سے جڑتی ہے جس کی داخلی مزاحمت $300\,\Omega$ ہے۔ ٹی وی کو اسی مزاحمت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس مثال میں ٹی وی بطور برقی بوجھ کردار ادا کرتا ہے۔ ٹی وی اسٹیشن سے خارج $100\,\text{MHz}$ کے برقناطیسی امواج اس اینٹینا میں $5\,\text{mV}$ کا اشارہ پیدا کرتی ہیں۔ ترسیلی تار کے مستقل ایسے ہیں کہ اس میں اشارات کی رفتار $2.5 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔

چونکہ برقی بوجھ کی مزاحمت اور ترسیلی تار کی قدرتی مزاحمت برابر ہیں لہٰذا ترسیلی تار اور برقی بوجھ ہمہ رکاوٹ ہیں۔ یوں برقی بوجھ پر انعکاس نہیں پایا جائے گا لہٰذا شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{300 - 300}{300 + 300} = 0$$

---

[6] TV, television
[7] Thevenin

صفر اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

ایک کے برابر ہوں گے۔اشارے کے تعدد پر ترسیلی تار میں طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2.5 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 2.5\,\mathrm{m}$$

اور زاویائی مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2.5} = 0.8\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

ہیں۔ترسیلی تار کی برقی لمبائی

$$\beta l = 0.8\pi \times 2 = 1.6\pi\,\mathrm{rad}$$

یا $288°$ ہے جسے 0.8 طول موج بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 11.4-ب میں داخلی جانب کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔داخلی جانب چونکہ اینٹینا کی مزاحمت $300\,\Omega$ ہے اور ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ بھی $300\,\Omega$ ہے لہٰذا اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں۔اینٹینا میں پیدا $5\,\mathrm{mV}$ کا اشارہ ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ پر

$$\frac{5 \times 10^{-3} \times 300}{300 + 300} = 2.5\,\mathrm{mV}$$

پیدا کرے گا۔اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں لہٰذا منبع طاقت V_s ترسیلی تار میں زیادہ سے زیادہ طاقت بھیجے گا۔ترسیلی تار کے داخلی جانب پیدا $2.5\,\mathrm{mV}$ کا اشارہ تار میں سے گزرتے ہوئے برقی بوجھ تک پہنچے گا البتہ یہ داخلی اشارے سے 1.6π ریڈیئن پیچھے ہو گا۔یوں اگر ترسیلی تار کا داخلی اشارہ

$$V_{\text{داخلی}} = 2.5 \cos 2\pi 10^8 t \quad \mathrm{mV}$$

ہو تب برقی بوجھ پر اشارہ

$$V_{\text{بار}} = 2.5 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \mathrm{mV}$$

ہو گا۔داخلی برقی رو

$$I_{\text{داخلی}}=\frac{V_{\text{داخلی}}}{300}=8.33\cos 2\pi 10^8 t \quad \mu\text{A}$$

اور برقی بوجھ پر برقی رو

$$I_{\text{بار}}=\frac{V_{\text{داخلی}}}{300}=8.33\cos(2\pi 10^8 t-1.6\pi) \quad \mu\text{A}$$

ہوں گے۔چونکہ ترسیلی تار بے ضیاع تار ہے لہٰذا جو طاقت اسے داخلی جانب فراہم کی جاتی ہے وہی طاقت خارجی جانب برقی بوجھ کو مہیا کر دی جاتی ہے۔

$$P_{\text{داخلی}}=P_{\text{بار}}=V_{\text{موثر}}I_{\text{موثر}}=\frac{2.5\times 10^{-3}}{\sqrt{2}}\times\frac{8.33\times 10^{-6}}{\sqrt{2}}=10.41\,\text{nW}$$

مزاحمتی بوجھ کی طاقت کا حساب لگاتے وقت یاد رہے کہ $P=VI$ میں برقی دباو اور برقی رو کے موثر[8] قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔سائن نما موج کی موثر قیمت موج کی چوٹی تقسیم $\sqrt{2}$ کے برابر ہوتی ہے۔

اب پہلے ٹی وی کے متوازی دوسرا ٹی وی نسب کرنے کے اثرات پر غور کرتے ہیں۔دوسرے ٹی وی کی داخلی مزاحمت بھی $300\,\Omega$ ہے۔یوں اب ترسیلی تار کے خارجی جانب کل $150\,\Omega$ کا بوجھ پایا جاتا ہے۔اس طرح شرح انعکاس

$$\Gamma=\frac{150-300}{150=300}=-\frac{1}{3}$$

یا

$$\Gamma=\frac{1}{3}\underline{/\pi} \tag{11.41}$$

حاصل ہوتی ہے اور شرح ساکن موج

$$s=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$$

ہوں گے۔ترسیلی تار کی داخلی مزاحمت اب $300\,\Omega$ کی بجائے

$$\begin{aligned}Z_{\text{داخلی}}&=Z_0\frac{Z_L+jZ_0\tan\beta l}{Z_0+jZ_L\tan\beta l}=300\frac{150+j300\tan 288^\circ}{300+j150\tan 288^\circ}\\&=509.7\underline{/-23.79^\circ}=466.39-j205.6\quad\Omega\end{aligned}$$

---

[8] RMS, effective

ہو گی جو برق گیر (کپیسٹر) کی خاصیت رکھتی ہے۔ برق گیر (کپیسٹر) کی خاصیت کا مطلب یہ ہے کہ ترسیلی تار کے برقی میدان میں مقناطیسی میدان سے زیادہ توانائی ذخیرہ ہے۔ داخلی رو

$$\begin{aligned}I_{s,\text{داخلی}} &= \frac{0.005}{300+466.39-j205.6}\\ &= 6.3013\underline{/15.017^\circ} \quad \mu\text{A}\end{aligned}$$

ہے اور یوں ترسیلی تار کو داخلی جانب

$$\begin{aligned}P_{\text{داخلی}} &= \frac{1}{2}\left(6.3013\times10^{-6}\right)^2\times466.39\\ &= 9.2593\,\text{nW}\end{aligned}$$

طاقت فراہم کی جا رہی ہے۔ بے ضیاع تار تمام کی تمام طاقت خارجی جانب منتقل کرے گی لہٰذا $150\,\Omega$ کے برقی بوجھ کو $9.2593\,\text{nW}$ حاصل ہو گا جو گزشتہ جواب یعنی $10.41\,\text{nW}$ سے قدر کم ہے۔ یہ کمی انعکاس کی وجہ سے پیدا ہوئی۔ کہانی یہاں ختم نہیں ہوتی۔ یہ طاقت دونوں ٹی وی میں برابر تقسیم ہو گی لہٰذا ہر ٹی وی کو صرف $4.6297\,\text{nW}$ طاقت مہیا ہو گا۔ چونکہ ایک ٹی وی $300\,\Omega$ مزاحمت رکھتا ہے لہٰذا ٹی وی پر پیدا برقی دباو

$$4.6297\times10^{-9} = \frac{\left|V_{s,\text{بار}}\right|^2}{2\times300}$$

یعنی

$$\left|V_{s,\text{بار}}\right| = 1.666\,67\,\text{mV}$$

ہو گا۔ یہ قیمت $2.5\,\text{mV}$ سے بہت کم ہے جو اکیلے ٹی وی پر پیدا ہوتی ہے۔

آئیں ترسیلی تار پر برقی دباو کی چوٹی، نشیب اور ان کے مقامات کے علاوہ دیگر معلومات بھی حاصل کریں۔ اگر ہم برقی دباو کی معلومات حاصل کر سکیں تو ظاہر ہے کہ برقی رو کی معلومات بھی حاصل کر پائیں گے۔ گزشتہ باب میں مستوی امواج کے لئے یہی معلومات حاصل کی گئیں تھیں۔ وہاں استعمال کی گئی ترکیب یہاں بھی کارآمد ثابت ہوں گی۔ برقی دباو موج کے چوٹی کے مقامات مساوات 10.91

$$-\beta_1 z_{\text{بلندتر}} = \frac{\phi}{2}+n\pi \quad (n=0,\mp1,\mp2,\cdots)$$

دیتی ہے۔اس میں $\beta = 0.8\pi$ اور $\phi = \pi$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned} z_{\text{بلند تر}} &= \frac{1}{-0.8\pi}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) \\ &= -1.25\left(\frac{1}{2}+n\right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $n = 0$ اور $n = 1$ پر کرنے سے

$$z_{\text{بلند تر}} = -0.625\,\text{m} \quad \text{اور} \quad -1.875\,\text{m}$$

حاصل ہوتے ہیں جو درست جوابات ہیں۔اگر $n = 2$ پر کیا جائے تو $z_{\text{بلند تر}} = -3.125\,\text{m}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ تار کی کل لمبائی صرف دو میٹر ہے لہٰذا اس جواب کو رد کیا جاتا ہے۔اسی طرح $n = -1$ پر کرنے سے $z_{\text{بلند تر}} = 0.625\,\text{m}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ تار منفی z محدد پر پائی جاتی ہے لہٰذا اس جواب کو بھی رد کیا جاتا ہے۔

موج کی چوٹی سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر نشیب پائے جاتے ہیں، لہٰذا ان کے مقامات

$$z_{\text{کمتر}} = 0\,\text{m} \quad \text{اور} \quad -1.25\,\text{m}$$

ہوں گے۔آپ نے دیکھا کہ سرحد پر برقی دباو کا نشیب پایا جاتا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_0 اور Z_L کی صورت میں اگر $Z_L < Z_0$ ہو تب سرحد پر موج کا نشیب ہی پایا جاتا ہے۔

چونکہ سرحد پر موج کا نشیب ہے اور ہم جانتے ہیں کہ ٹی وی پر $1.66\,\text{mV}$ ہے لہٰذا دباو کی کمتر قیمت یہی ہے اور $s = 2$ سے دباو کی چوٹی اس کے دگنی یعنی $3.32\,\text{mV}$ حاصل ہوتی ہے۔ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباو

$$\begin{aligned} V_{s,\text{داخلی}} &= I_{s,\text{داخلی}} Z_{\text{داخلی}} \\ &= \left(6.3013\times 10^{-6}\underline{/15.017^\circ}\right)\left(509.7\underline{/-23.79^\circ}\right) \\ &= 0.00321175\underline{/-8.77^\circ} \end{aligned}$$

ہو گا جو تقریباً موج کے چوٹی کی برابر ہے۔ایسا اس لئے ہے کہ سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر چوٹی پائی جاتی ہے جس سے ہر 0.5λ فاصلے پر چوٹی ہو گی لہٰذا سرحد سے $\frac{3\lambda}{4}$ فاصلے پر بھی چوٹی متوقع ہے جو تار کے داخلی سرے کے بہت قریب نقطہ ہے۔آپ ترسیلی تار کی داخلی برقی دباو یوں

$$V_{s,\text{داخلی}} = \frac{Z_{\text{داخلی}} V_s}{Z_{\text{داخلی}}+300} = \frac{(466.39-j205.6)\times 0.005}{466.39-j205.6+300} = 0.00321175\underline{/-8.77^\circ}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

آخر میں داخلی برقی دباو اور برقی بوجھ پر برقی دباو کا زاویائی تعلق دیکھتے ہیں۔اگرچہ ہم دونوں برقی دباو کی قیمتیں حاصل کر چکے ہیں، ان کی زاویائی معلومات ابھی تک نہیں حاصل کی گئیں۔مساوات 10.90 کی مدد سے تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباو

$$V_s = \left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right) V_0^+$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ ہمیں تار کے داخلی سرے پر دباو معلوم ہے لہٰذا اس میں $z = -l$ پر کرنے سے

$$V_{s,\text{داخلی}} = \left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\right) V_0^+$$

حاصل ہوتا ہے جسے V_0^+ کے لئے حل کرتے ہیں

$$V_0^+ = \frac{V_{s,\text{داخلی}}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{0.00321175\underline{/-8.77^\circ}}{e^{j1.6\pi} - \frac{1}{3}e^{-j1.6\pi}} = 0.0025\underline{/-72^\circ}$$

اور یوں برقی بوجھ یعنی $z = 0$ پر برقی دباو اب حاصل کی جا سکتی ہے

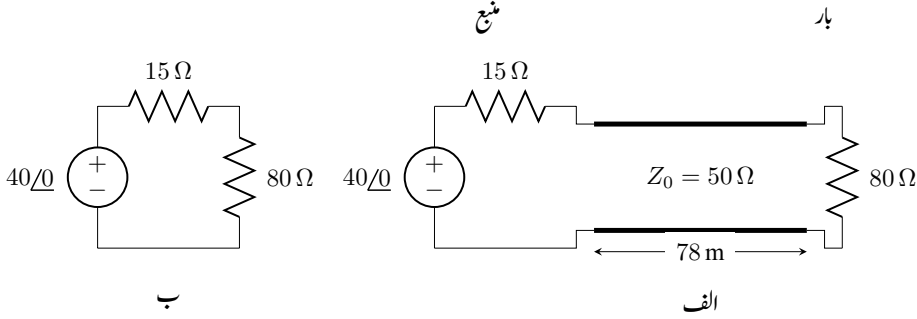
$$V_{s,\text{بار}} = (1 + \Gamma)\, V_0^+ = 0.001666\underline{/-72^\circ} = 0.001666\underline{/-288^\circ}$$

یہاں حاصل جواب کی مطلق قیمت اور کچھ دیر پہلے حاصل کی گئی برقی بوجھ پر برقی دباو کی مطلق قیمت برابر ہیں۔تار کے داخلی سرے پر دباو کا زاویہ -8.77° جبکہ تار کے خارجی سرے پر دباو کا زاویہ 72° ہے۔یوں ان کے مابین فرق 80.77° یعنی -279.23° ہے۔انعکاسی موج کی عدم موجودگی میں یہ فرق -288° یعنی تار کی زاویائی لمبائی جتنی ہوتی ہے۔

آخری مثال کے طور پر ہم اس ترسیلی تار کے خارجی سرے پر صرف برق گیر (کپیسٹر) $Z_L = -j300\,\Omega$ نسب کر کے دیکھتے ہیں۔برق گیر (کپیسٹر) میں توانائی ضائع نہیں ہوتی۔یہ حقیقت شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j = 1\underline{/-90^\circ}$$

سے صاف ظاہر ہے جو انعکاسی موج کا حیطہ آمدی موج کے برابر دیتا ہے۔شرح ساکن موج یوں

$$s = \frac{1 + |-j|}{1 - |-j|} = \infty$$

شکل 11.5: ترسیلی تار اور برقی بوجھ۔

ہو گا جس سے موج کا نشیب عین صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}} = 300\frac{-j300 + j300\tan 288^\circ}{300 + j(-j300)\tan 288^\circ} = j589$$

ہو گی جو خیالی عدد ہے لہٰذا اسے اوسط طاقت فراہم نہیں کی جا سکتی۔

ترسیلی تار کے مسائل ترسیمی طریقے سے نہایت خوش اسلوبی سے حل ہوتے ہیں۔ ان میں سمتھ نقشہ[9] زیادہ اہم ہے۔ اگلے حصے میں اسی پر غور کیا جائے گا۔

مثال 11.1: شکل 11.5-الف میں 78 m لمبی بے ضیاع ترسیلی تار دکھائی گئی ہے جو $Z_L = 80\,\Omega$ برقی بوجھ کو طاقت فراہم کر رہی ہے۔ ترسیلی تار کو منبع $40\underline{/0}$ برقی دباو فراہم کر رہی ہے۔ منبع کی خارجی مزاحمت $15\,\Omega$ ہے جبکہ ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 50\,\Omega$ اور اس میں موج کی رفتار $2\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ مندرجہ ذیل صورتوں میں برقی بوجھ پر برقی دباو V_L حاصل کریں۔ الف) منبع کی تعدد $500\,\text{kHz}$ ہے۔ ب) منبع کی تعدد $50\,\text{Hz}$ ہے۔

---

[9] Smith chart

حل: الف) ترسیلی تار میں $500\,\mathrm{kHz}$ تعدد پر طول موج اور β مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \times 10^8}{500000} = 400\,\mathrm{m}$$
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{400} = \frac{\pi}{200}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

اس تعدد پر ترسیلی تار کی لمبائی، طول موج کے $19.5\,\%$ ہے۔ ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}} = 50\frac{80 + j50\tan(\frac{\pi}{200} \times 78)}{50 + j80\tan(\frac{\pi}{200} \times 78)} = 33.599 - j10.441$$

ہے۔ ترسیلی تار کے داخلی سرے پر $80\,\Omega$ کا برقی بوجھ $Z_{\text{داخلی}}$ نظر آتا ہے۔ یوں ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباو

$$V_{\text{داخلی}} = \frac{40 \times (33.599 - j10.441)}{15 + 33.599 - j10.441} = 28.2 - j2.54$$

ہو گا۔ برقی بوجھ کو $z = 0$ پر تصور کرنے سے ترسیلی تار کا داخلی سرا $z = -78\,\mathrm{m}$ پر ہو گا۔ ترسیلی تار کے داخلی برقی دباو کو ترسیلی تار میں موجود آمدی موج $V^+ = V_0^+ e^{-j\beta z}$ اور انعکاسی موج $V^- = V_0^- e^{j\beta z}$ کا نقطہ $z = -78\,\mathrm{m}$ پر مجموعہ

$$V_{\text{داخلی}} = V_0^+ e^{-j\frac{\pi}{200}(-78)} + V_0^- e^{j\frac{\pi}{200}(78)} = V_0^+ e^{j1.22522} + V_0^- e^{-j1.22522}$$

تصور کیا جا سکتا ہے جس میں

$$V_0^- = \Gamma V_0^+ = \left(\frac{80 - 50}{80 + 50}\right) V_0^+ = \frac{3}{13} V_0^+$$

پر کرنے سے

$$28.2 - j2.54 = V_0^+ e^{j1.22522} + \frac{3}{13} V_0^+ e^{-j1.22522}$$

یا

$$V_0^+ = \frac{28.2 - j2.54}{e^{j1.22522} + \frac{3}{13} e^{-j1.22522}} = 33.9 e^{-j1.138}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں برقی بوجھ پر برقی دباو

$$V_L = V_0^+(1+\Gamma) = 33.9e^{-j1.138}\left(1+\frac{3}{13}\right) = 41.7e^{-j1.138} = 41.7\underline{/-65.2^\circ}$$

ہو گا۔

آئیں برقی بوجھ کو منتقل طاقت بھی حاصل کریں۔ برقی بوجھ پر برقی دباو کے استعمال سے اوسط طاقت

$$P_L = \frac{1}{2}\frac{|V_L|^2}{R_L} = \frac{1}{2}\frac{41.7^2}{80} = 10.88\,\text{W}$$

حاصل ہوتی ہے۔

ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی رو

$$I_{\text{داخلی}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{Z_{\text{داخلی}}} = \frac{28.2 - j2.54}{33.599 - j10.441} = 0.787 + j0.169$$

ہو گی۔ یوں ترسیلی تار کو داخلی سرے پر

$$P_{\text{داخلی}} = \frac{1}{2}\left. V_{\text{داخلی}} I^*_{\text{داخلی}} \right|_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2}(28.2 - j2.54)(0.787 - j0.169) = 10.88\,\text{W}$$

طاقت منتقل ہو رہی ہے۔ترسیلی تار بے ضیاع ہے لہٰذا یہی طاقت برقی بوجھ کو منتقل ہو گی۔

ب) ترسیلی تار میں $50\,\text{Hz}$ تعدد پر طول موج اور β مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\times10^8}{50} = 4\times10^6\,\text{m}$$
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4\times10^6} = 5\pi\times10^{-7}\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

اس تعدد پر ترسیلی تار کی لمبائی، طول موج سے نہایت کم $78\,\text{m} \ll \lambda$ ہے۔ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0\frac{Z_L + jZ_0\tan\beta l}{Z_0 + jZ_L\tan\beta l} = 50\frac{80 + j50\tan(5\pi\times10^{-7}\times78)}{50 + j80\tan(5\pi\times10^{-7}\times78)} \\ &= 50\frac{80 + j0.0061}{50 + j0.0098} = 79.999998697\underline{/-0.00684^\circ} \\ &\approx 80\,\Omega \end{aligned}$$

ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\beta l \ll 1$ کی صورت میں $\tan \beta l \to 0$ ہوتا ہے جس سے ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ تقریباً برقی بوجھ کے برابر ہی حاصل ہوتی ہے۔آپ نے دیکھا کہ $\lambda \gg l$ کی صورت میں ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی بوجھ جوں کا توں نظر آتا ہے لٰہذا ترسیلی تار کا ہونا یا نہ ہونا یک برابر ہے۔ایسی صورت میں ترسیلی تار کی موجودگی رد کرتے ہوئے دور کو کرخوف کے قوانین سے حل کیا جاتا ہے۔ایسا کرنے سے ہمیں شکل 11.5-ب حاصل ہوتی ہے جسے کرخوف کے قوانین کی مدد سے حل کرتے ہوئے برقی بوجھ پر

$$V_L = \frac{40 \times 80}{15 + 80} = 33.7\,\mathrm{V}$$

برقی دباو حاصل ہوتی ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ کسی بھی برقی دور میں تار کی لمبائی l طول موج λ سے بہت کم $\lambda \gg l$ ہونے کی صورت میں، ترسیلی تار کو رد کرتے ہوئے، دور کو کرخوف کے قوانین سے حل کیا جاتا ہے۔البتہ جب بھی تار کی لمبائی، طول موج کے ساتھ مطابقت رکھے، ایسی صورت میں کرخوف کے قوانین غیر کار آمد ہوتے ہیں اور میکس ویل کی مساوات سے ہی درست جوابات حاصل ہوتے ہیں۔

پاکستان میں $50\,\mathrm{Hz}$ اور $220\,\mathrm{V}$ کی برقی طاقت مہیا کی جاتی ہے۔تار پر موج کی رفتار $3 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ لیتے ہوئے $\lambda = 6000\,\mathrm{km}$ حاصل ہوتی ہے۔گھر کے اندر فاصلے λ سے بہت کم ہوتے ہیں[10] لٰہذا گھر میں $484\,\Omega$ بلب کی برقی رو دریافت کرتے ہوئے تار کی لمبائی رد کرتے ہوئے $\frac{220}{484} = 0.45\,\mathrm{A}$ حاصل ہوتی ہے۔اس کے برعکس تربیلا ڈیم سے کراچی شہر کا فاصلہ تقریباً $1500\,\mathrm{km}$ ہے جو λ سے مناسبت رکھتا ہے، لٰہذا تربیلا ڈیم سے کراچی شہر کو برقی طاقت کے منتقلی کے مسائل حل کرتے ہوئے میکس ویل کی مساوات استعمال کرنا لازم ہو گا۔

مثال 11.2: قدرتی رکاوٹ $50\,\Omega$ کے ترسیلی تار کے اختتام پر $Z_1 = 50 - j100\,\Omega$ جڑا ہے جبکہ اختتام سے 0.2λ فاصلے پر $Z_2 = 100\,\Omega$ جڑا ہے۔ترسیلی تار کے دونوں حصوں میں شرح ساکن موج s حاصل کریں۔

---

[10] مجھے اپنا گھر بہت چھوٹا لگنے لگا ہے۔

حل: محدود لمبائی کی ترسیلی تار میں متعدد انعکاسی امواج پائی جاتی ہیں۔ تمام آگے جانب حرکت امواج کو ایک عدد آمدی بڑھتی موج تصور کرتے ہوئے اور اسی طرح تمام واپسی جانب حرکت کرتے ہوئے تمام امواج کو ایک عدد انعکاسی موج تصور کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

ترسیلی تار کے اختتامی حصے پر

$$\Gamma = \frac{50 - j100 - 50}{50 - j100 + 50} = 0.5 - j0.5$$

ہو گا جس سے $|\Gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ حاصل ہوتا ہے۔اس قیمت کو استعمال کرتے ہوئے

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = 5.83$$

حاصل ہوتا ہے۔

جس نقطے پر $100\,\Omega$ مزاحمت جڑی ہے اس مقام پر $50 - j100$ سے اختتام پذیر 0.2λ لمبی تار کی داخلی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= 50\frac{(50 - j100) + j50\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times 0.2\lambda\right)}{50 + j(50 - j100)\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times 0.2\lambda\right)} \\ &= 8.63 + j3.82 \end{aligned}$$

ہے۔ اب $Z_{\text{داخلی}}$ اور $100\,\Omega$ متوازی جڑے ہیں جن کا مجموعہ

$$\frac{100 \times (8.63 + j3.82)}{100 + 8.63 + j3.82} = 8.06 + j3.23$$

ہو گا۔داخلی جانب سے دیکھتے ہوئے ترسیلی تار کو $100\,\Omega$ کی بجائے $8.06 + j3.23$ برقی بوجھ نظر آئے گا۔یوں ترسیلی تار کے داخلی حصے پر

$$\Gamma = \frac{8.06 + j3.23 - 50}{8.06 + j3.23 + 50} = -0.717 + j0.096 = 0.723\underline{/171.9^\circ}$$

اور

$$s = \frac{1 + 0.723}{1 - 0.723} = 6.22$$

ہوں گے۔

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ

سمتھ نقشہ[11] بنیادی طور پر شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

کی مساوات پر منحصر ہے۔اس نقشے میں برقی بوجھ بمطابق Z_0 یعنی $\frac{Z_L}{Z_0}$ استعمال کی جاتی ہے جسے

$$z = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں z کارتیسی محدد کا متغیرہ نہیں بلکہ Z_0 کے مطابقت سے برقی بوجھ کو ظاہر کرتا ہے۔یوں

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1}$$

اور

$$z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{11.42}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔شرح انعکاس کو حقیقی اور خیالی اجزاء

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے

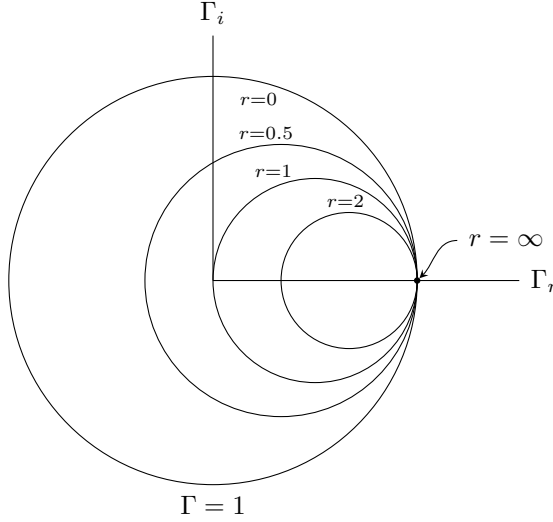
$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i}$$

کے حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1-\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \tag{11.43}$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \tag{11.44}$$

---

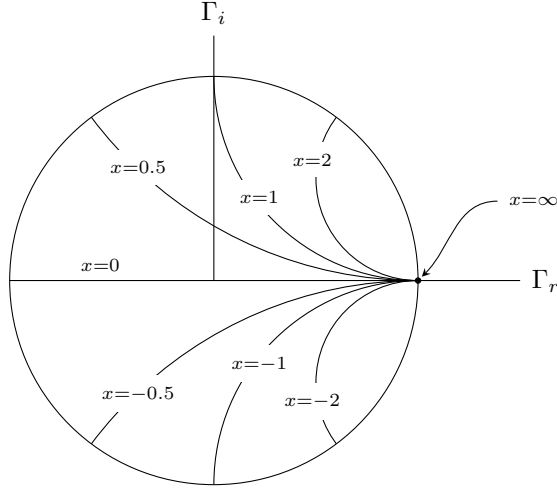
[11] Smith chart

شکل 11.6: کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i ہیں جبکہ دائرے کا رداس $\frac{1}{r+1}$ ہے۔

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں کچھ الجبرا کے بعد

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \tag{11.45}$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{11.46}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i رکھے جائیں تو مندرجہ بالا دونوں مساوات گول دائروں کی مساوات ہوں گی۔

مساوات 11.45 کے دائروں پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگر $r = 0$ ہو تب یہ مساوات اکائی رداس کا دائرہ دیتی ہے جس کا وسط محدد کے مبدا $(0, 0)$ پر ہے۔ خیالی برقی بوجھ کی صورت میں شرح انعکاس کی مطلق قیمت ایک ہی ہوتی ہے۔ اسی طرح $r = \infty$ کی صورت میں دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا وسط $(1, 0)$ پر ہے۔ یوں یہ دائرہ صرف اسی نقطے یعنی $\Gamma = 1$ تک محدود ہے۔ اب $r = \infty$ سے مراد $Z_L - \infty$ ہے جس سے شرح انعکاس $\Gamma = 1$ ہی حاصل ہوتی ہے۔ ایک آخری مثال $r = 1$ کی لیتے ہیں جس سے 0.5 رداس کا دائرہ حاصل ہوتا ہے جس کا وسط $(0.5, 0)$ ہے۔ شکل 11.6 میں ان دائروں کے علاوہ $r = 0.5$ اور $r = 2$ سے حاصل دائرے بھی دکھایا گیا ہے۔

شکل 11.7: کارتیسی محدد پر $\frac{1}{x}$ رداس کے دائروں کے وہ حصے دکھائے گئے ہیں جو اکائی دائرے کے اندر پائے جاتے ہیں۔

مساوات 11.46 بھی دائرے دیتی ہے البتہ ان دائروں کا رداس $\frac{1}{x}$ اور مراکز $(1, \frac{1}{x})$ ہیں۔لامحدود x کی صورت میں دوبارہ $Z = \infty$ اور $\Gamma = 1 + j0$ ہوں گے۔مساوات 11.46 کے مطابق اس دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا وسط $(1, 0)$ ہے لہٰذا یہ $\Gamma = 1$ کو ہی ظاہر کرتا ہے۔اگر $x = 1$ ہو تب دائرے کا رداس اکائی جبکہ اس کا وسط $(1, 1)$ ہوں گے۔جیسا شکل 11.7 میں دکھایا گیا ہے، اس دائرے کا چوتھائی حصہ $|\Gamma| = 1$ دائرے کے اندر پایا جاتا ہے۔اسی طرح $x = -1$ کی صورت میں دائرے کا چوتھائی حصہ Γ_r محدد کے نیچے پایا جاتا ہے۔شکل میں $x = 0.5$، $x = -0.5$، $x = 2$ اور $x = -2$ کے دائرے بھی دکھائے گئے ہیں۔شکل میں $x = 0$ سے پیدا سیدھی لکیر، یعنی Γ_r محدد بھی دکھایا گیا ہے۔

ان دونوں دائروں کو ایک ہی جگہ شکل 11.8 کے سمتھ نقشے میں دکھایا گیا ہے۔یوں کسی بھی Z_L کی صورت میں $\frac{Z_L}{Z_0}$ کی شرح لیتے ہوئے z یعنی r اور x حاصل کر کے سمتھ نقشے میں ان کے دائروں کی نشاندہی کریں۔اگر نقشے پر درکار r اور (یا) x کے دائرے نہ پائے جائیں تب ان کے قریبی قیمتوں کے دائروں سے مطلوبہ دائرے کا مقام اخذ کریں۔جہاں یہ دائرے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں وہاں سے Γ پڑھیں۔نقشے کے مبدا $(0, 0)$ سے اس نقطے تک فاصلہ $|\Gamma|$ کے برابر ہو گا جبکہ افقی محدد یعنی Γ_r سے گھڑی کے الٹ سمت زاویہ Γ کا زاویہ ہو گا۔اس زاویے کو اکائی رداس کے دائرے کے باہر دکھایا گیا ہے۔یوں محدد کے مبدا سے درکار نقطے تک سیدھی لکیر کو اکائی رداس کے دائرے تک بڑھا کر زاویہ ناپا جاتا ہے۔سمتھ نقشے میں $|\Gamma|$ ناپنے کی غرض سے محدد کے مبدا $(0, 0)$ پر مختلف رداس کے دائرے کھینچے جا سکتے تھے، لیکن ایسا نہیں کیا جاتا۔آپ کو یہ فاصلہ نقشے میں دئے فیتے کی مدد سے ناپنا ہو گا۔اب مثال کے طور

شکل 11.8: سمتھ نقشے پر اکائی دائرے میں r اور x سے حاصل دائرے دکھائے جاتے ہیں۔

پر $Z_0 = 50\,\Omega$ کی ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j50\,\Omega$ کا برقی بوجھ $z = 0.5 + j1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔اس نقطے کو شکل میں بطور نقطہ N دکھایا گیا ہے جو $r = 0.5$ اور $x = 1$ کے دائروں کے نقطہ ملاپ سے حاصل ہوتا ہے۔شرح انعکاس تقریباً $0.62\underline{/83^\circ}$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشہ مکمل کرنے کی خاطر اکائی دائرے کے محیط کے باہر دوسرا فیتہ شامل کیا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار پر فاصلہ ناپا جاتا ہے۔اس فیتے پر فاصلہ طول موج λ کی صورت میں ناپا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ اس فیتے سے کس طرح فاصلہ حاصل کیا جاتا ہے۔ترسیلی تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباو

$$V_s = V_0^+ \left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z} \right)$$

کو برقی رو

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} \left(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z} \right)$$

سے تقسیم کرتے ہوئے Z_0 کے مطابقت سے داخلی قدرتی رکاوٹ

$$z_{\text{داخلی}} = \frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = \frac{V_s}{Z_0 I_s} = \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}}$$

حاصل کی جا سکتی ہے جس میں $z = -l$ پر کرتے ہوئے

$$z_{\text{داخلی}} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{j2\beta l}} \tag{11.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $l = 0$ پر کرنے سے

$$z_{\text{داخلی}}\Big|_{l=0} = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = z \tag{11.48}$$

حاصل ہوتا ہے جو عین برقی بوجھ پر شرح انعکاس ہے جسے مساوات 11.42 میں پیش کیا گیا ہے۔

یہاں رک کر اس حقیقت پر غور کریں کہ Γ کو $e^{-j2\beta l}$ سے ضرب دینے سے

$$\Gamma e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j\phi} e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی مطلق قیمت اب بھی $|\Gamma|$ ہی ہے لیکن نیا زاویہ $(\phi - 2\beta l)$ ہے۔یوں سمتھ نقشے میں نقطہ z یعنی

$$z = r + jx = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \tag{11.49}$$

کی نشاندہی کرتے ہوئے $|\Gamma| \underline{/\phi}$ ناپیں۔اب $|\Gamma|$ تبدیل کئے بغیر زاویہ تبدیل کرتے ہوئے $(\phi - 2\beta l)$ تک پہنچیں اور یہاں سے $z_{\text{داخلی}}$ ناپیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 11.49 میں Γ کی جگہ $\Gamma e^{-j2\beta l}$ پر کرنے سے مساوات 11.47 ہی حاصل ہوتا ہے جو برقی بوجھ سے l فاصلے پر بمطابق Z_0 داخلی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یوں برقی بوجھ z سے دور $z_{\text{داخلی}}$ کی طرف چلتے ہوئے، ہم منبع طاقت یعنی جنریٹر کی طرف چلتے ہیں جبکہ سمتھ نقشے پر ایسا کرنے سے زاویہ ϕ سے کم ہو کر $\phi - 2\beta l$ ہوتا ہے لہٰذا نقشے پر ہم گھڑی کی سمت چلتے ہیں۔یوں $\beta l = \pi$ فاصلہ، یعنی آدھی طول موج، طے کرنے سے نقشے کے گرد ایک چکر مکمل ہو گا۔اس طرح $\frac{\lambda}{2}$ لمبی بے ضیاع ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ عین برقی بوجھ کے رکاوٹ برابر ہو گی۔

یوں سمتھ نقشے کے حیطے پر ایک مکمل چکر کو 0.5λ دکھایا جاتا ہے۔جیسے شکل 11.9 میں دکھایا گیا ہے، استعمال میں آسانی کی غرض سے ایک کے بجائے دو ایسے فیتے بنائے جاتے ہیں۔ایک فیتہ گھڑی کی سمت میں بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے نقشے میں "منجانب جنریٹر" سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ دوسرا فیتہ گھڑی کی الٹ سمت بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے "منجانب بار" لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ان فیتوں کے ابتدائی نقطے کوئی اہمیت نہیں رکھتے البتہ انہیں نقشے کے بائیں ہاتھ پر رکھا جاتا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_L اور Z_0 کی صورت میں اگر $Z_L < Z_0$ ہو تب برقی دباو کا نشیب اسی نقطے پر ہو گا۔

سمتھ نقشے کا استعمال مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔یوں $50\,\Omega$ کی ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j50\,\Omega$ کے برقی بوجھ پر دوبارہ غور کرتے ہیں۔شکل 11.10 میں $z = 0.5 + j1$ کو نقطہ A ظاہر کرتا ہے جہاں سے $\Gamma = 0.62e^{j1.45} = 0.62\underline{/83^\circ}$ حاصل ہوتا ہے۔مبدا سے A تک لکیر کو اکائی دائرے کے حیطے تک بڑھا کر 0.135λ پڑھا جاتا ہے۔اگر تار کی لمبائی $60\,\mathrm{cm}$ ہو اور اشارے کی تعدد اتنی ہو کہ ترسیلی تار پر طول موج $2\,\mathrm{m}$ ہو، تب $\frac{l}{\lambda} = 0.3$ ہو گا لہٰذا تار 0.3λ لمبی ہو گی۔یوں بیرونی دائرے پر $0.135\lambda + 0.3\lambda = 0.435\lambda$ سے مبدا تک لکیر اور $|\Gamma|$ رداس کے دائرے کے ملاپ، یعنی نقطہ B، سے $z_{\text{داخلی}} = 0.28 - j0.4$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $Z_{\text{داخلی}} = 14 - j20$ ہو گا۔تحلیلی طور پر زیادہ درست جواب $Z_{\text{داخلی}} = 13.7 - j20.2$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشے سے موج کی چوٹی یا نشیب کے مقام باآسانی حاصل کئے جاتے ہیں۔کسی بھی $\Gamma = |\Gamma|\underline{/\phi}$ کے لئے $z = -l$ پر آمدی اور انعکاسی امواج کے مجموعے

$$
\begin{aligned}
V_s &= V_0^+\left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\right)\\
&= V_0^+ e^{j\beta l}\left[1 + |\Gamma|\, e^{j(\phi - 2\beta l)}\right]
\end{aligned}
$$

کی مطلق قیمت

$$
\begin{aligned}
|V_s| &= V_0^+\left|e^{j\beta l}\right|\left[\left|1 + |\Gamma|\, e^{j(\phi - 2\beta l)}\right|\right]\\
&= V_0^+\left|1 + |\Gamma|\, e^{j(\phi - 2\beta l)}\right|
\end{aligned}
$$

ہے جہاں $\left|e^{j\beta l}\right| = 1$ کے برابر[12] ہے۔اس کی کم سے کم قیمت $V_0^+\,(1 - |\Gamma|)$ ہے جو $\phi - \beta l = (2n+1)\pi$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ہے۔عین برقی بوجھ پر $l = 0$ ہے اور ایسی صورت میں اس

[12] $\left|e^{j\beta l}\right| = \left|\cos\beta l + j\sin\beta l\right| = \sqrt{\cos^2\beta l + \sin^2\beta l} = 1$

شکل 11.9: مکمل سمتھ نقشہ۔

شکل 11.10: سمتھ نقشے سے متغیرات کا حصول۔

شرط کو $\phi = \pi$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح $|V_s|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $V_0^+ \left(1 + |\Gamma|\right)$ ہے جو $\phi - \beta l = 2n\pi$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے۔عین برقی بوجھ پر $l = 0$ ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو $\phi = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\phi = \pi$ کی صورت میں برقی بوجھ پر V_s کی کم سے کم قیمت ہو گی جبکہ $\phi = 0$ کی صورت میں برقی بوجھ پر V_s کی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔آئیں دیکھیں کہ ان شرائط کا مطلب کیا ہے۔

مزاحمتی برقی بوجھ R_L اور حقیقی Z_0 کی صورت میں اگر $R_L < Z_0$ ہو تب Γ منفی حقیقی عدد ہو گا جسے $\Gamma = |\Gamma| \underline{/\pi}$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ $R_L > Z_0$ کی صورت میں Γ مثبت حقیقی عدد ہو گا جسے $\Gamma = |\Gamma| \underline{/0^\circ}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $R_L < Z_0$ یعنی $\Gamma = |\Gamma| \underline{/0}$ کی صورت میں برقی بوجھ پر کمتر V_s ہو گا جبکہ $R_L > Z_0$ یعنی $\Gamma = |\Gamma| \underline{/\pi}$ کی صورت میں برقی بوجھ پر بلند تر V_s ہو گا۔سمتھ نقشے پر افقی محدد حقیقی Γ دیتا ہے۔منفی افقی محدد پر $\Gamma = |\Gamma| \underline{/\pi}$ ہوتا ہے لہٰذا برقی بوجھ پر کمتر V_s ہر صورت سمتھ نقشے میں منفی افقی محدد پر پایا جائے گا۔اسی طرح مثبت افقی محدد پر $\Gamma = |\Gamma| \underline{/0}$ ہوتا ہے لہٰذا برقی بوجھ پر بلند تر V_s ہر صورت سمتھ نقشے میں مثبت افقی محدد پر پایا جائے گا۔

ان نتائج کو آگے بڑھاتے ہیں۔کسی بھی مخلوط برقی بوجھ $Z_L = R_L + jX_L$ کی صورت میں سمتھ نقشے میں $z = r + jx$ سے شروع کر کے فاصلہ l بڑھانے سے زاویہ $\phi - 2\beta l$ گھٹتا ہے جو سمتھ نقشے پر گھڑی کی سمت گھومنے

کے مترادف ہے۔جس فاصلے پر $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ ہو وہاں برقی موج کی چوٹی پائی جائے گی اور جس فاصلے پر $\phi - 2\beta l = (2n+1)\pi$ ہو وہاں موج کا نشیب پایا جائے گا۔اب $2n\pi$ سے مراد سمتھ نقشے کے افقی محدد کا مثبت حصہ جبکہ $(2n+1)\pi$ سے مراد افقی محدد کا منفی حصہ ہے۔ یوں شکل 11.10 میں نقطہ A سے گھڑی کی سمت 0.115λ گھومتے ہوئے ترسیلی تار پر پہلی چوٹی پائی جائے گی۔یوں برقی بوجھ سے پہلی چوٹی 0.115λ یعنی $0.115 \times 200 = 23\,\text{cm}$ فاصلے پر ہے۔ اگر ترسیلی تار زیادہ لمبی ہوتی تب برقی بوجھ سے 0.365λ دور پہلا نشیب پایا جاتا۔چونکہ تار کی لمبائی اس سے کم ہے لہٰذا تار پر کہیں پر بھی نشیب نہیں پایا جاتا۔

برقی رو کی چوٹی اس نقطے پر پائی جاتی ہے جہاں $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ کا شرط پورا ہو۔برقی رو

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0}\left(e^{j\beta l} - \Gamma e^{j\beta l}\right)$$

کی کمتر قیمت اس نقطے پر پائی جاتی ہے۔اسی طرح جس نقطے پر برقی دباو کی کمتر قیمت پائی جائے، اس نقطے پر برقی رو کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یوں سمتھ نقشے کے افقی محدد کے مثبت حصے پر برقی رو کا نشیب جبکہ اس کے منفی حصے پر برقی رو کی چوٹی پائی جائے گی۔

مزاحمتی برقی بوجھ R_L اور بے ضیاع ترسیلی تار کی صورت میں $\Gamma = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہو گا۔اگر $R_L > R_0$ ہو تب $|\Gamma| = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہو گا جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں $|\Gamma| = \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}$ ہو گا۔یوں $R_L > R_0$ کی صورت میں

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}}{1 - \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}} = \frac{R_L}{R_0} = r \quad (R_L > R_0)$$

جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}}{1 - \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}} = \frac{R_0}{R_L} \quad (R_L < R_0)$$

ہو گا۔یاد رہے کہ $s > 1$ ہوتا ہے لہٰذا $\frac{R_L}{R_0}$ اور $\frac{R_0}{R_L}$ میں جو بھی اکائی سے زیادہ قیمت رکھتا ہو یہی s ہو گا۔یوں $|\Gamma|$ رداس کے دائرے اور مثبت افقی محدد سے r پڑھ کر s کی قیمت بھی یہی تصور کریں۔شکل 11.10 میں نقطہ C سے $r = 4.2$ پڑھا جائے گا لہٰذا $s = 4.2$ ہے۔مثبت افقی محدد پر $r > 1$ ہوتا ہے لہٰذا محدد کے اسی حصے سے s کی قیمت پڑھی جاتی ہے۔ آپ تسلی کر لیں کہ $\frac{R_0}{R_L} > 1$ کی صورت میں بھی اسی طریقہ کار سے درست s حاصل ہوتا ہے۔

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ

اس حصے کو $\frac{\lambda}{4}$ لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کے حصول سے شروع کرتے ہیں۔اتنی لمبائی کے تار کا $\beta l = 90^\circ$ ہو گا۔ داخلی قدرتی رکاوٹ کی مساوات

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

میں $Z_{\text{داخلی}}$ کو Z_0 سے تقسیم کرتے اور $\beta l = 90^\circ$ پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = \frac{Z_L + jZ_0 \tan 90^\circ}{Z_0 + jZ_L \tan 90^\circ} = \frac{Z_0}{Z_L}$$

یعنی

$$z_{\substack{\text{داخلی} \\ 0.25\lambda}} = \frac{1}{z} \tag{11.50}$$

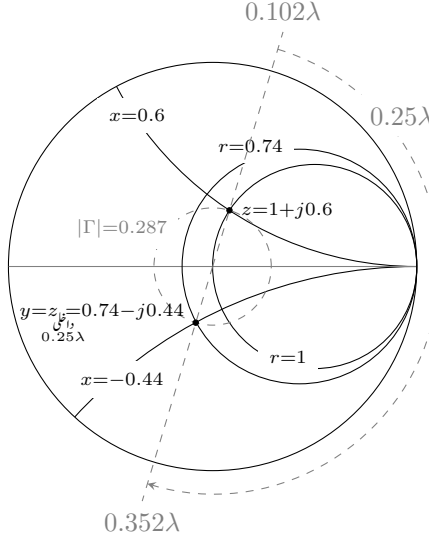
حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = z_{\substack{\text{داخلی} \\ 0.25\lambda}}$$
$$\frac{Z_L}{Z_0} = z$$

لکھے گئے ہیں۔مساوات 11.50 کے تحت برقی بوجھ سے 0.25λ فاصلے پر داخلی قدرتی رکاوٹ $\frac{1}{z}$ کے برابر ہے لیکن $y = \frac{1}{z}$ ہوتا ہے لہٰذا اسی مساوات کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$y = \frac{1}{z} = z_{\substack{\text{منجانب جنریٹر} \\ 0.25\lambda}} \tag{11.51}$$

جہاں 0.25λ تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کی جگہ منجانب جنریٹر 0.25λ گھومنے کا ذکر کیا گیا ہے۔مساوات 11.51 کہتی ہے کہ سمتھ نقشے میں z سے منجانب جنریٹر 0.25λ گھوم کر $|\Gamma|$رداس کے دائرے سے y حاصل ہو گا۔

شکل 11.11 میں $z = 1 + j0.6$ دکھایا گیا ہے جو منجانب جنریٹر 0.102λ زاویے پر پایا جاتا ہے۔یہ رکاوٹ $\Gamma = 0.287\underline{/73.7^\circ}$ دیتا ہے۔چوتھائی طول لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کرنے کی خاطر منجانب جنریٹر 0.25λ

شکل 11.11: چوتھائی طول تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ اسی تار کی برقی فراوانی کے برابر ہے۔

چلتے ہوئے 0.352λ سے مبدا تک لکیر اور 0.287 رداس کے دائرے کے ملاپ سے $z_{\text{داخلی}} = 0.74 - j0.44$ حاصل ہوتا ہے جو $\frac{1}{z}$ یعنی y کے عین برابر ہے۔

آئیں قصر دور اور کھلے دور تار کے ٹکڑوں کا داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ قصر دور تار کی صورت میں $Z_L = 0$ ہو گا لہٰذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{0 + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j0 \tan \beta l} \\ &= jZ_0 \tan \beta l \end{aligned} \tag{11.52}$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔ چوتھائی طول لمبی قصر دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$Z_{\substack{\text{داخلی} \\ 0.25\lambda}} = jZ_0 \tan 90^\circ = \infty \qquad (\text{قصر دور}) \tag{11.53}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کسے دور تار بطور کھلے دور کردار ادا کرتی ہے۔

کھلے دور تار کی صورت میں $Z_L = \infty$ ہو گا لہٰذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_0 \frac{\infty + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j\infty \tan \beta l} = -j \frac{Z_0}{\tan \beta l} \tag{11.54}$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$Z_{\substack{\text{داخلی}\\0.25\lambda}} = -j \frac{Z_0}{\tan 90^\circ} = 0 \qquad (\text{کھلے دور}) \tag{11.55}$$

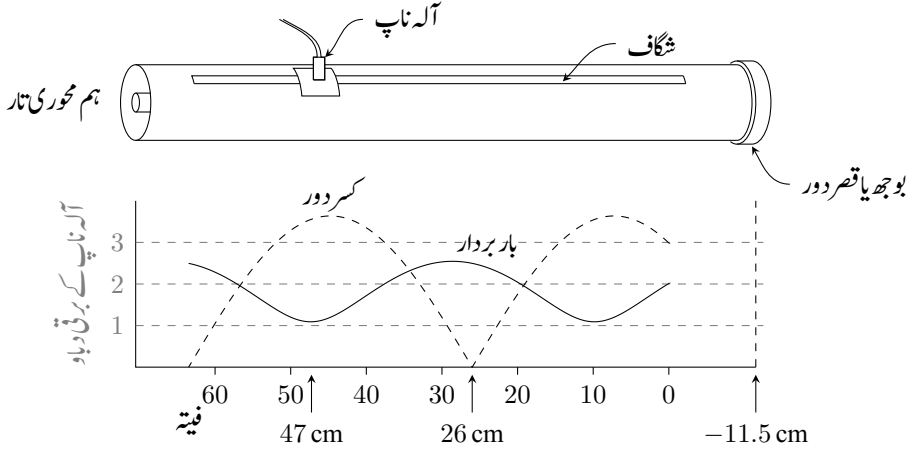
حاصل ہوتی ہے۔یہ بھی تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار بطور قصر دور کردار ادا کرتی ہے۔

سمتھ مزاحمتی نقشے[13] کا متبادل سمتھ فراوانی[14] نقشہ بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ان میں $y = \frac{Y_L}{Y_0} = g + jb$ لیا جاتا ہے جہاں $Y_L = \frac{1}{R_L}$ اور $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ کے برابر ہیں۔اس طرح y برقی فراوانی بمطابق Y_0 کہلائے گی۔یوں r سے حاصل دائرے اب g کے دائرے کہلاتے ہیں جبکہ x کے دائرے b کے دائرے کہلاتے ہیں۔اس نقشے میں $g > 1$ اور $b = 0$ کی صورت میں برقی دباو کی کمتر قیمت حاصل ہو گی۔ ایصالی سمتھ نقشے سے حاصل Γ کا زاویہ 180° بڑھانا ہو گا۔

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

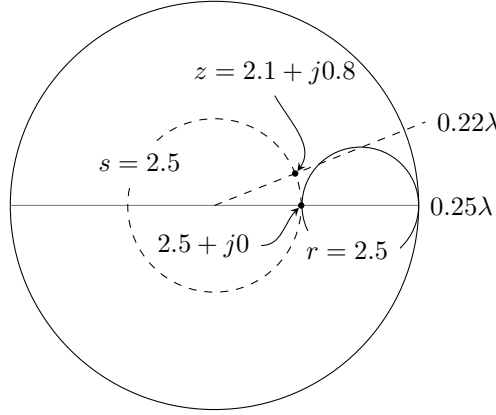
اس حصے میں دو مثالوں پر غور کیا جائے گا۔پہلی مثال میں تجرباتی نتائج سے برقی بوجھ کی رکاوٹ حاصل کی جائے گی جبکہ دوسری مثال میں برقی بوجھ کو تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دکھائی جائے گی۔

ہم محوری ترسیلی تار کے بیرونی تار میں لمبائی کی سمت میں شگاف ڈال کر اس میں مختلف مقامات پر برقی دباو کے نمونے لے کر $s = 2.5$ حاصل کیا گیا ہے۔شکل 11.12 میں ایسی شگاف دار تار[15] دکھائی گئی ہے۔شگاف کے ساتھ فیتہ رکھ کر بلند تر اور کم تر نمونوں کے مقامات بھی درج کئے گئے۔ایسے نتائج حاصل کرتے وقت فیتے کا صفر کہیں پر بھی رکھا جا سکتا ہے لہٰذا اسے برقی بوجھ کا مقام تصور نہیں کریں۔کمتر برقی دباو فیتے پر 47 cm کے نشان کے ساتھ پایا جاتا ہے۔سائن نما اشارے کی صورت میں سمت کار کے خارجی اشارہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

[13] Smith impedance chart
[14] Smith admittance chart
[15] slotted line

شکل 11.12: ہم محوری تار میں شگاف ڈال کر اس میں آلہ ناپ کی مدد سے مختلف مقامات پر برقی دباو کے نمونے لئے جا سکتے ہیں۔

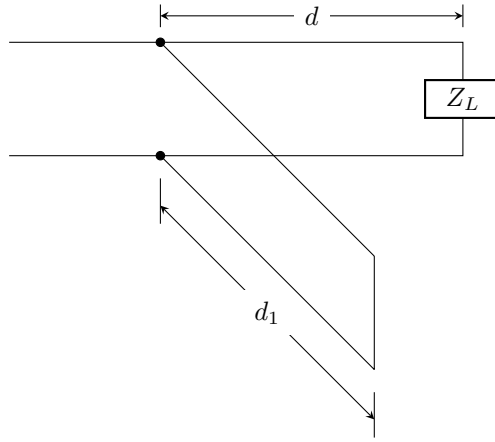
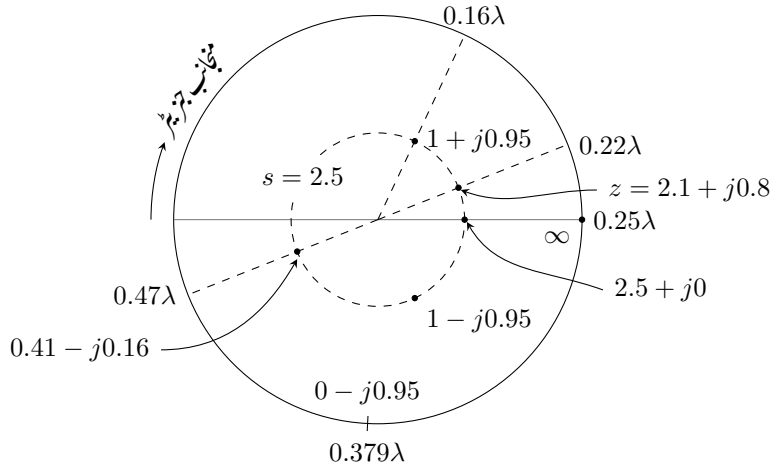
اشارے کے کمتر قیمت کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا زیادہ آسان ہے۔اشارے کی چوٹی نوک دار نہیں ہوتی لہٰذا اس کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا قدر مشکل ہوتا ہے۔اسی وجہ سے عموماً موج کی کمتر قیمت کے مقامات حاصل کرتے ہوئے مطلوبہ معلومات دریافت کی جاتی ہیں۔ہم محوری تار کی قدرتی رکاوٹ $50\,\Omega$ ہے اور تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال کی گئی ہے۔اشارے کی تعدد $400\,\mathrm{MHz}$ ہے لہٰذا طول موج $75\,\mathrm{cm}$ ہے۔برقی بوجھ کا مقام تعین کرنے کی خاطر برقی بوجھ کو ہٹا کر تار کے ان سروں کو قصر دور کیا جاتا ہے۔قصر دور تار پر کمتر دباو فیتے پر $26\,\mathrm{cm}$ کے نشان کے سامنے پایا جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ قصر دور نقطے سے کمتر دباو کا فاصلہ $\frac{n\lambda}{2}$ ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ کمتر دباو قصر دور نقطے سے آدھے طول موج کے فاصلے پر ہے۔ایسی صورت میں قصر دور کا مقام فیتے پر $26-37.5=-11.5\,\mathrm{cm}$ نشان کے ساتھ ہو گا۔چونکہ برقی بوجھ کے مقام پر ہی قصر دور پیدا کیا گیا تھا لہٰذا برقی بوجھ بھی فیتے پر $-11.5\,\mathrm{cm}$ کے نشان کے ساتھ ہو گا۔یوں حاصل نتائج کے تحت برقی بوجھ سے کم تر دباو کا نقطہ $47-(-11.5)=58.5\,\mathrm{cm}$ فاصلے پر ہے جس سے آدھی طول موج منفی کرتے ہوئے برقی بوجھ سے کمتر دباو کا فاصلہ $21\,\mathrm{cm}$ حاصل ہوتا ہے۔بلند تر دباو کا برقی بوجھ سے فاصلہ یوں $21-\frac{37.5}{2}=2.25\,\mathrm{cm}$ ہو گا جو $\frac{2.25}{75}=0.03$ طول موج کے برابر ہے۔

ان معلومات کے ساتھ اب شکل 11.13 کے سمتھ نقشے کا سہارا لیتے ہیں۔بلند تر برقی دباو کے نقطے پر داخلی قدرتی رکاوٹ حقیقی عدد ہوتا ہے جس کی قیمت sR_0 کے برابر ہوتی ہے، لہٰذا ایسے نقطے پر $z_{\text{داخلی}}=2.5$ ہو گا۔ہم یوں سمتھ نقشے پر $z_{\text{داخلی}}=2.5$ نقطے پر داخل ہوتے ہیں جہاں سے منجانب جنریٹر فاصلہ 0.25λ پڑھا جاتا ہے۔اس سے 0.03λ

شکل 11.13: اگر 0.03λ لمبی تار پر $z_{\text{داخلی}} = 2.5 + j0$ ہو تب $z = 2.1 + j0.8$ ہو گا۔

منفی کرتے ہوئے برقی بوجھ تک پہنچتے ہیں، لہٰذا 0.22λ سے مبدا تک لکیر اور $s = 2.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.429$ رداس کے دائرے کے ملاپ سے $z = 2.1 + j0.8$ پڑھا جاتا ہے۔یوں $Z_L = 105 + j40\,\Omega$ حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے برقی بوجھ کو فیتے پر $-11.5\,\text{cm}$ یا اس نقطے سے $\frac{n\lambda}{2}$ فاصلے پر تصور کیا ہے۔چونکہ برقی بوجھ کا مقام اب بھی مکمل طور پر معلوم نہیں ہے لہٰذا بہتر یہ ہوتا ہے کہ تجرباتی نتائج سے حاصل Z_L کی بات کرتے ہوئے برقی بوجھ کا فرض کردہ مقام بھی ساتھ بتلایا جائے۔

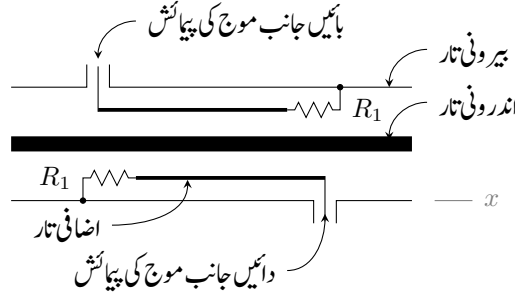
آخر میں آئیں اس برقی بوجھ کو $50\,\Omega$ ترسیلی تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دیکھیں۔ایسا d_1 لمبائی کے قصر دور تار کے ٹکڑے کو برقی بوجھ سے d فاصلے پر نسب کرنے سے ممکن بنایا جاتا ہے۔ایسا شکل 11.14 میں دکھایا گیا ہے۔برقی بوجھ سے d فاصلے پر z کے متوازی d_1 لمبی قصر دور ٹکڑا نسب کرنے سے کل رکاوٹ $z = 1 + j0$ حاصل کرنے مقصد ہے۔یہاں d_1 اور d مطلوب ہیں۔قصر دور ٹکڑے کی قدرتی رکاوٹ ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $50\,\Omega$ کے برابر ہے۔

برقی بوجھ اور قصر دور تار کا ٹکڑا متوازی جڑے ہیں۔متوازی جڑی رکاوٹوں کی بجائے متوازی جڑی برقی فراوانی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے لہٰذا ہم ایسا ہی کرتے ہیں۔برقی فراوانی کی زبان میں موجودہ مسئلہ کچھ یوں ہے۔ہم d اتنا رکھنا چاہتے ہیں کہ داخلی فراوانی $y_{\text{داخلی}} = 1 + jb$ ہو۔اب اگر $y_{\text{داخلی}}$ کے متوازی $-jb$ برقی تاثریت جوڑی جائے تو حاصل کل برقی فراوانی $1 + j0$ ہو گی جو ہمارا مقصد ہے۔یوں d_1 لمبی قصر دور تار کے ٹکڑے کی برقی تاثریت $-jb$ درکار ہے۔ان حقائق کو لے کر سمتھ نقشے کی مدد سے d اور d_1 کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

شکل 11.14: برقی بوجھ سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کے قصر دور تار کا ٹکڑا جوڑنے سے برقی بوجھ اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ بنائے جاتے ہیں۔

شکل 11.15: برقی بوجھ $z = 2.1 + j0.8$ سے 0.19λ فاصلے پر 0.129λ لمبائی کا قصر دور ٹکڑا جوڑنے سے نظام ہمہ رکاوٹ ہو جاتا ہے۔

سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ پر داخلی ہو کر مساوات 11.51 کے تحت منجانب جنریٹر 0.25λ گھومنے سے $y = \frac{1}{z}$ حاصل ہوتا ہے۔شکل 11.15 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ منجانب جنریٹر 0.22λ زاویے پر پایا جاتا ہے۔یہاں سے منجانب جنریٹر 0.25λ گھومتے ہوئے 0.47λ تک پہنچا جاتا ہے جہاں $|\Gamma|$ رداس کے دائرے سے $y = 0.41 - j0.16$ ملتا ہے۔اب ہم چاہتے ہیں کہ یہاں سے منجانب جنریٹر گھومتے ہوئے داخلی قدرتی فراوانی $1 + jb$ حاصل ہو۔جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، ایسا 0.16λ اور 0.34λ زاویوں پر ممکن ہے جہاں سے بالترتیب $y_1 = 1 + j0.95$ اور $y_2 = 1 - j0.95$ حاصل ہوتے ہیں۔پہلے نقطے تک پہنچنے کے لئے کم لمبائی کی تار درکار ہے لہٰذا اسی کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔برقی بوجھ سے اس نقطے تک $(0.5\lambda - 0.47\lambda) + 0.16\lambda = 0.19\lambda$ تار درکار ہو گی لہٰذا $d = 0.19\lambda$ یعنی 14.25 cm بنتا ہے۔

اب $1 + j0.95$ کے متوازی $y_{\text{ٹکڑا}} = -j0.95$ برقی تاثریت جوڑ کر $1 + j0$ حاصل ہو گا۔مساوات 11.54 کے تحت قصر دور ٹکڑے کی داخلی رکاوٹ یا داخلی فراوانی خیالی عدد ہوتا ہے لہٰذا سمتھ نقشے پر ایسے ٹکڑے کا $g = 0$ ہی رہے گا جو نقشے کی بیرونی دائرے کو ظاہر کرتی ہے۔عین قصر دور پر $y = \infty$ حاصل ہوتا ہے جو منجانب جنریٹر 0.25λ پر پایا جاتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $y_{\text{داخلی}} = -j0.95$ نقشے پر منجانب جنریٹر 0.379λ پر حاصل ہوتا ہے۔یوں کسے دور ٹکڑے کی لمبائی $0.379\lambda - 0.25\lambda = 0.129\lambda$ یعنی 9.67 cm حاصل ہوتا ہے۔

مشق 11.4: بے ضیاع $50\,\Omega$ ترسیلی تار کو قصر دور کرنے سے برقی دباو کے دو آپس میں قریبی نشیب 12 cm اور 27 cm پر پائے جاتے ہیں۔ قصر دور ختم کرتے ہوئے یہاں برقی بوجھ نسب کرنے سے 0.4 V حیطے کے نشیب اور 0.72 V حیطے کی چوٹیاں حاصل ہوتی ہیں۔ ایک عدد نشیب 9 cm پر حاصل ہوتا ہے۔ترسیلی تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال ہوئی ہے۔مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ λ، f، s، Γ اور Z_L

جوابات: 0.3 m، 1 GHz، 1.8، $0.286\underline{/108^\circ}$ اور $36.5 + j21.6\,\Omega$

شکل 11.16: پیپا شرح ساکن موج

مشق 11.5: بے ضیاع $50\,\Omega$ کے ساتھ $Z_L = 100 + j100\,\Omega$ کا برقی بوجھ نسب ہے۔برقی بوجھ سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کا قصر دور ٹکڑا جوڑتے ہوئے نظام کو ہمہ رکاوٹ بنایا جاتا ہے۔اگر تار پر $v = \frac{2}{3}c$ ہو جبکہ اشارے کی تعدد $10\,\mathrm{MHz}$ ہو تب مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ λ، چھوٹے سے چھوٹا d_1 اور ایسی صورت میں d

جوابات: $20\,\mathrm{m}$، $1.8\,\mathrm{m}$ اور $4.4\,\mathrm{m}$

11.6 پیپا شرح ساکن موج

شرح ساکن موج ناپنے کے لئے شگاف دار تار استعمال کرنا شکل 11.12 میں دکھایا گیا۔شرح ساکن موج ناپنے کے لئے مخصوص آلہ شکل 11.16 میں دکھایا گیا ہے جسے ہم **پیپا شرح ساکن موج**[16] کہیں گے۔اس شکل میں x محدد پر پڑی، ہم محوری تار کے اندر دو عدد اضافی موصل تار رکھے گئے ہیں۔بالائی اضافی تار کے دائیں سرے کو مزاحمت R_1 کے ذریعہ بیرونی تار کے ساتھ جوڑا گیا ہے جبکہ اس کا بایاں سرا بیرونی تار میں سوراخ سے باہر نکالا گیا ہے۔اس اضافی تار کی لمبائی l جبکہ اس کی قدرتی رکاوٹ R_1 ہے۔نچلی اضافی تار کے بائیں سرے کو مزاحمت R_1 کے ذریعہ بیرونی تار کے ساتھ جوڑا گیا ہے جبکہ اس کا دایاں سرا بیرونی تار میں سوراخ سے باہر نکالا گیا ہے۔اس اضافی تار کی لمبائی بھی l اور اس کی قدرتی رکاوٹ R_1 ہے۔

پیپا کو منبع طاقت اور برقی بوجھ کے درمیان ترسیلی تاروں کے ذریعہ نسب کیا جاتا ہے۔تصور کریں کہ منبع طاقت بائیں جانب جڑی ہے جبکہ برقی بوجھ دائیں جانب جڑا ہے۔یوں ہم محوری تار میں منبع سے برقی بوجھ کی جانب آمدی موج

[16] directional coupler

حرکت کرے گی جبکہ برقی بوجھ سے منبع کی جانب انعکاسی موج حرکت کرے گی۔آمدی موج دونوں اضافی تاروں میں بھی برقی بوجھ کی جانب حرکت کرتی موج پیدا کرے گی۔بالائی تار میں یہ موج مزاحمت R_1 پر اختتام پذیر ہو گی۔چونکہ اضافی تار کی قدرتی رکاوٹ بھی R_1 ہے لہٰذا تار کے دائیں سرے پر انعکاس نہیں ہو پائے گا۔نچلی اضافی تار میں دائیں جانب حرکت کرتا میدان برقی دباو $v_i = E_{xi}l$ پیدا کرے گا جو تار کے باہر نکالے گئے سرے پر پایا جائے گا۔یوں آمدی موج صرف نچلی تار میں برقی دباو پیدا کرتی ہے۔اسی طرح انعکاسی موج بھی دونوں اضافی تاروں میں حرکت کرتی موج پیدا کرتی ہے۔نچلی اضافی تار میں ایسی موج R_1 پر اختتام پذیر ہوتی ہے جبکہ بالائی اضافی تار میں یہ $v_r = E_{xr}l$ برقی دباو پیدا کرتی ہے جسے تار کے باہر نکالے گئے سرے پر ناپا جا سکتا ہے۔اگر اضافی تاروں کی لمبائی اور موٹائی بالکل برابر ہو اور انہیں ہم محوری تار کے اندر بالکل یکساں جگہوں پر رکھا جائے تب دونوں اضافی تاروں میں پیدا برقی دباو آمدی اور انعکاسی امواج کے مماثل ہو گی۔یوں شرح انعکاس کو

$$|\Gamma| = \frac{v_r}{v_i} \tag{11.56}$$

اور شرح ساکن موج کو

$$s = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{11.57}$$

سے ناپا جا سکتا ہے۔

پیما کے استعمال سے تبدیلی مزاحمت کے شرح ساکن موج پر اثرات کو دیکھا جاتا ہے۔اسی طرح ایسی منبع طاقت جو تعددی پٹی پر طاقت پیدا کر سکتی ہو کے استعمال سے تعدد بالمقابل s دیکھا جاتا ہے۔

11.7 تجزیہ عارضی حال

اب تک ہم ترسیلی تار میں کسی ایک تعدد پر، **برقرار یکساں حال**[17] سائن نما امواج کی بات کرتے رہے ہیں۔اس حصے میں غیر سائن نما امواج کی بات کرتے ہیں۔آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی غیر سائن نما موج کو فوریئر تسلسل کی مدد سے متعدد اجزاء کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے جہاں ہر جزو کی تعدد مختلف ہوتی ہے۔کسی بھی ترسیلی تار کے مستقل R ، L ، G اور C از خود تعدد پر منحصر ہوتے ہیں۔اس کی مثال، ہم محوری تار کی مزاحمت ہے جو موٹائی جلد پر منحصر ہے جہاں موٹائی جلد کا دارومدار از خود تعدد پر ہے۔ ترسیلی تار میں موج کی رفتار ان مستقل پر منحصر ہے لہٰذا مختلف تعدد کی امواج تار میں مختلف رفتار سے حرکت کریں گی۔یوں غیر سائن نما موج کے فوریئر اجزاء مختلف رفتار سے حرکت کریں گے جس سے موج کی صورت برقرار نہیں رہ پائے گی۔حرکت کے دوران موج کی صورت بگڑنے کو **انتشار**[18]

[17] steady state
[18] dispersion

کہا جاتا ہے۔ فوریئر تسلسل کے انفرادی رفتار v_p کو **دوری رفتار**[19] کہا جاتا ہے جبکہ منتشر ہوتے موج کی رفتار v_g کو **مجموعی رفتار**[20] کہا جاتا ہے۔ اس کتاب میں اثر انتشار سے آزاد امواج پر غور کیا جائے گا۔ یوں دوری رفتار اور مجموعی رفتار برابر ہوں گے۔اس رفتار کو v لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ وقت t میں ایسی موج vt فاصلہ طے کرے گی۔

غیر سائن نما امواج میں مستطیل موج نہایت اہمیت کی حامل ہے۔**عددی**[21] اشارات یعنی صفر اور ایک کو عددی ادوار میں $0\,\text{V}$ اور $5\,\text{V}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔عددی صفر سے عددی ایک یا عددی ایک سے عددی صفر کو سیڑھی نما تفاعل ظاہر کرتی ہے جبکہ صفر سے ایک اور واپس صفر کو مستطیل تفاعل ظاہر کرتی ہے۔یہ مستطیل یا سیڑھی نما اشارات، ترسیلی تاروں کے ذریعہ ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل ہوتے ہیں۔ یہ اشارات عموماً بلا ترتیب ہوتے ہیں۔آئیں ایسی ہی ایک عدد سیڑھی نما اشارے کی ترسیل پر غور کریں۔ اس طرز کے تجزیے کو **عارضی رد عمل**[22] کہا جاتا ہے۔

شکل 11.17 میں Z_0 قدرتی رکاوٹ کا ترسیلی تار Z_0 برقی بوجھ کو طاقت فراہم کرنے کے لئے استعمال کیا جا رہا ہے۔ منبع طاقت کی اندرونی رکاوٹ صفر کے برابر ہے۔لمحہ $t = 0$ پر سوئچ کو چالو حالت میں کرتے ہوئے منبع کو ترسیلی تار کے ساتھ جوڑا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار کا داخلی سرا V_0 برقی دباو پر پہنچ جاتا ہے۔ترسیلی تار کا بقایا حصہ اور برقی بوجھ فی الحال $0\,\text{V}$ پر ہی رہتے ہیں۔سوئچ کو چالو حالت میں ہی رکھا جاتا ہے۔ تار کے داخلی سرے پر لاگو برقی دباو رفتار v سے اختتامی جانب حرکت کرے گی۔یوں لمحہ t پر یہ موج vt فاصلہ طے کر چکی ہو گی لہٰذا منبع سے فاصلہ vt تک ترسیلی تار پر اب برقی دباو V_0 ہو گا جبکہ بقایا تار اب بھی صفر برقی دباو پر ہو گی۔ شکل 11.17 میں لمحہ t پر منبع کے ساتھ ترسیلی تار کی vt لمبائی حصے کو موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ بقایا تار کو پتلی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔نقطہ دار لکیر اس مقام کو ظاہر کر رہی ہے جہاں برقی دباو کی موج V^+ پہنچ پائی ہے۔موج کے حیطے کی قیمت $V^+ = V_0$ ہو گی۔تار پر برقی دباو کی صورت **سیڑھی نما تفاعل**[23] ہے۔ترسیلی تار کی لمبائی l ہونے کی صورت میں برقی دباو کی موج، برقی بوجھ تک $\frac{l}{v}$ دورانیے میں پہنچے گی جہاں v موج کی مجموعی رفتار ہے۔اس دورانیے میں **عارضی صورت حال**[24] پائی جاتی ہے۔چونکہ برقی بوجھ کی قیمت عین ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ کے برابر ہے لہٰذا $\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0$ ہو گا۔یوں تار کے اختتامی سرے پر انعکاسی موج پیدا نہیں ہو گی۔اس طرح سوئچ چالو حالت میں کرنے کے ٹھیک $\frac{l}{v}$ دیر بعد برقی بوجھ پر منبع کی برقی دباو V_0 پائی جائے گی۔ برقی بوجھ پر اس کے بعد برقی دباو برقرار V_0 قیمت پر رہتا ہے۔

---

[19] phase velocity
[20] group velocity
[21] digital
[22] transient response
[23] step function
[24] transient state

برقی دباو کی موج کے ساتھ ساتھ برقی رو کی موج بھی پائی جاتی ہے۔یوں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو حالت میں کرتے ہی ترسیلی تار کے داخلی سرے پر I^+ برقی رو کی موج پیدا ہو گی جہاں $I^+ = \frac{V^+}{Z_0}$ کے برابر ہے۔اگرچہ موصل تار میں برقی رو، منفی بار کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے، روایتی برقی رو[25] کو مثبت بار کی حرکت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ شکل 11.17 میں روایتی برقی رو ہی دکھائی گئی ہے۔یوں مثبت تار میں برقی رو کی سمت منبع سے برقی بوجھ کی جانب ہے جبکہ منفی تار میں اس کی سمت برقی بوجھ سے منبع کی جانب ہے۔دھیان رہے کہ برقی رو صرف اور صرف نقطہ دار لکیر کے اس طرف پائی جاتی ہے جس طرف منبع نسب ہے۔یوں اس شکل میں مثبت تار میں منبع سے لے کر نقطہ دار لکیر تک مثبت برقی رو پائی جائے گی جبکہ نقطہ دار لکیر کے دوسری جانب برقی رو صفر کے برابر ہو گی۔تار کے اس حصے کو موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے جس میں برقی رو پائی جاتی ہے۔سوئچ چالو کرنے کے ٹھیک $\frac{l}{v}$ دیر بعد برقی بوجھ میں برقرار $\frac{V_0}{Z_0}$ برقی رو پائی جائے گی۔

شکل 11.17 میں نقطہ دار لکیر کے دائیں جانب برقی دباو صفر کے برابر ہے۔اس جانب ترسیلی تار کو برق گیر (کپیسٹر) تصور کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کا یہ حصہ بے بار ہے۔اس کے برعکس نقطہ دار لکیر کے بائیں جانب برقی دباو V_0 ہے۔یوں تار کا یہ حصہ بار بردار ہے۔مثبت تار پر برقی رو، مثبت بار کو نقطہ دار لکیر کے دائیں جانب منتقل کر رہی ہے۔اسی طرح منفی تار پر برقی رو، نقطہ دار لکیر کے دائیں جانب حصے سے مثبت بار نکال رہی ہے۔اس طرح نقطہ دار لکیر کے قریب دائیں جانب تار بار بردار ہو رہا ہے جس کی وجہ سے اس حصے کی برقی دباو بڑھتی ہے۔یہی برقی موج ہے۔

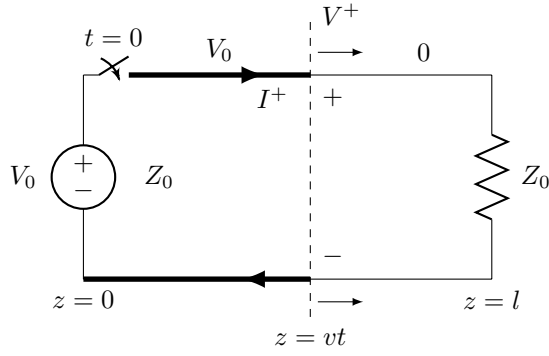
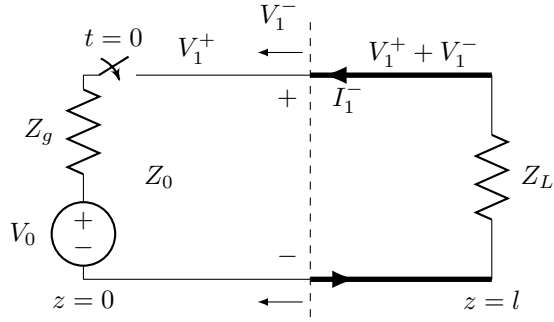
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سوئچ چالو کرنے سے $\frac{l}{v}$ تک کے عارضی دورانیے کے دوران کرخوف[26] کے قوانین کار آمد نہیں ہیں۔عارضی دورانیہ گزرنے کے بعد برقرار یکساں صورت حال پائی جاتی ہے لہٰذا کرخوف کے قوانین اب قابل استعمال ہوں گے۔کرخوف کے قانون کے تحت دور میں یک سمت برقی رو $\frac{V_0}{Z_0}$ پائی جائے گی۔

آئیں اب برقی بوجھ کی قیمت اور ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ برابر نہ رکھتے ہوئے مسئلے پر دوبارہ غور کریں۔ شکل 11.18 میں ایسا ہی دور دکھایا گیا ہے جس میں منبع کی داخلی رکاوٹ بھی شامل کی گئی ہے۔لمحہ $t = 0$ پر سوئچ کو چالو حالت کر دیا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار کے داخلی سرے پر $V_1 = \frac{Z_0 V_0}{Z_0 + R_g}$ برقی دباو نمودار ہو گا۔یہ برقی دباو بطور موج V_1^+

$$V_1^+ = \frac{Z_0 V_0}{Z_0 + Z_g} \tag{11.58}$$

برقی بوجھ کی جانب حرکت کرے گی۔

---

[25] conventional current
[26] Kirchoff's laws

شکل 11.17: ترسیلی تار میں ابتدائی موج۔

شکل 11.18: عمومی برقی بوجھ سے لدے ترسیلی تار میں ابتدائی موج۔

تار کے اختتام پر $Z_0 \neq Z_L$ کی وجہ سے انعکاسی موج V_1^- پیدا ہو گی جہاں

$$\frac{V_1^-}{V_1^+} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

کے برابر ہے۔انعکاسی موج برقی بوجھ سے منبع کی جانب حرکت کرتی ہے۔اس موج سے منبع کی جانب V_1^+ برقی دباو پایا جاتا ہے جبکہ دوسری جانب $V_1^+ + V_1^-$ برقی دباو ہو گا۔انعکاسی موج V_1^- منبع پر پہنچ کر دورتی منعکس موج V_2^+ پیدا کرے گی جہاں

$$\frac{V_2^+}{V_1^-} = \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$$

کے برابر ہے۔اس کو

$$V_2^+ = \Gamma_g V_1^- = \Gamma_g \Gamma_L V_1^+$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب V_2^+ موج جب برقی بوجھ تک پہنچے گی تو یہ V_2^-

$$V_2^- = \Gamma_L V_2^+$$

پیدا کرے گی۔

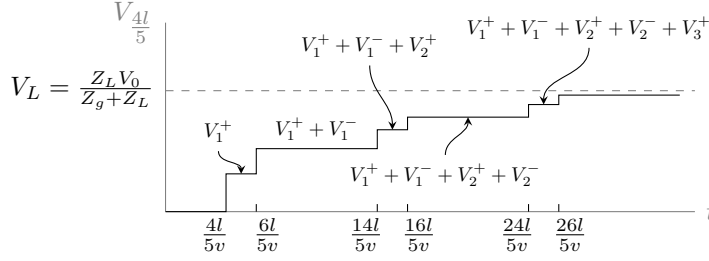
اسی ترتیب کو بار بار استعمال کرتے ہوئے کسی بھی لمحے پر عارضی صورت حال دریافت کیا جا سکتا ہے۔متعدد انعکاس کے بعد برقی بوجھ پر برقی دباو

$$\begin{aligned} V_L &= V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + \cdots \\ &= V_1^+(1 + \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L^2 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^3 \cdots) \end{aligned}$$

ہو گا جسے

$$V_L = V_1^+(1 + \Gamma_L)(1 + \Gamma_g \Gamma_L + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 + \cdots)$$

لکھا جا سکتا ہے۔آپ جانتے ہیں کہ $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$ کے برابر ہے۔یہی کلیہ مندرجہ بالا مساوات کے آخری قوسین پر لاگو کرتے ہوئے لامحدود انعکاس کے بعد

$$V_L|_{t\to\infty} = V_1^+ \left(\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_g \Gamma_L} \right)$$

شکل 11.19: عارضی دورانیے کی برقی دباو بالمقابل برقی دباو۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبا دورانیہ $t \to \infty$ کی صورت میں $n \to \infty$ اور $\Gamma_g^n \Gamma_L^n \to 0$ ہوں گے۔اس مساوات میں $\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$ اور $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ پر کرتے ہوئے مساوات 11.58 کے استعمال سے

$$V_L|_{t\to\infty} = \frac{Z_L V_0}{Z_g + Z_L}$$

حاصل ہوتا ہے جو برقرار یکساں حالت کی صورت میں برقی بوجھ پر برقی دباو ہے۔یہی جواب کرخوف کے قانون سے بھی حاصل ہوتا ہے جس میں ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ کا کوئی کردار نہیں پایا جاتا۔

آئیں اب شکل 11.18 میں عارضی دورانیے کے دوران ترسیلی تار پر $z = \frac{4l}{5}$ کے مقام پر برقی دباو بالمقابل وقت کا خط کھینچتے ہیں۔اس شکل میں Z_g ، Z_L اور Z_0 کو حقیقی اعداد تصور کرتے ہیں۔اس کے ساتھ ساتھ $Z_g > Z_0$ اور $Z_L > Z_0$ تصور کیا گیا ہے۔یوں $\Gamma_g > 0$ اور $\Gamma > 0$ حاصل ہوتے ہیں۔شکل 11.19 کو دیکھ کر آگے پڑھیں۔

سوئچ کو لمحہ $t = 0$ پر چالو حالت کیا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار میں V_1^+ موج پیدا ہوتی ہے۔یہ موج نقطہ دار لکیر سے ظاہر کردہ مقام تک $\frac{4l}{5v}$ دورانیے میں پہنچتی ہے۔یوں $t = 0$ تا $t = \frac{4l}{5v}$ اس نقطے پر صفر برقی دباو رہتا ہے جبکہ ٹھیک $t = \frac{4l}{5v}$ پر یہاں کی برقی دباو V_1^+ ہو جاتی ہے۔شکل 11.19 میں ایسا ہوتا دکھایا گیا ہے۔موج V_1^+ نقطہ دار لکیر سے برقی بوجھ تک $\frac{l}{5v}$ دورانیے میں پہنچ کر انعکاس پذیر ہوتی ہے۔انعکاسی موج کو برقی بوجھ سے نقطہ دار لکیر تک پہنچنے کی خاطر $\frac{l}{5v}$ دورانیہ درکار ہے۔یوں V_1^- موج نقطہ دار لکیر پر لمحہ $\frac{4l}{5v} + \frac{l}{5v} + \frac{l}{5v} = \frac{6l}{5v}$ پہ پہنچتی ہے۔یوں سوئچ چالو حال کرنے کے $\frac{6l}{5v}$ دیر بعد نقطہ دار لکیر پر برقی دباو $V_1^+ + V_1^-$ ہو جاتی ہے۔امید کی جاتی ہے کہ آپ شکل 11.19 میں دکھائے گئے تمام صورت حال کو سمجھ پائے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ترسیلی تار کے دونوں سروں پر موج بار بار انعکاس پذیر ہوتی ہے۔ہر انعکاس کے بعد برقی دباو برقرار حال قیمت کے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔

ترسیلی تار پر کسی بھی مقام پر برقی رو کی قیمت بھی اسی طرح حاصل کی جاتی ہے۔ برقی دباو کی صورت میں اس تار کو مثبت برقی دباو پر تصور کیا جاتا ہے جس پر مثبت بار پایا جاتا ہو۔یوں شکل 11.18 میں V_1^+ اور V_1^- امواج میں بالائی تار مثبت برقی دباو پر ہیں۔اسی شکل میں گھڑی کی سمت میں گھومتی برقی رو کو مثبت تصور کیا جاتا ہے جبکہ گھڑی کے الٹ سمت گھومتی برقی رو کو منفی تصور کیا جاتا ہے۔یوں I_1^+ مثبت جبکہ I_1^- منفی برقی رو ہے۔یوں ترسیلی تار میں دونوں جانب حرکت کرتی برقی دباو کی موج کو مثبت تصور کیا جاتا ہے جبکہ برقی رو کے امواج مثبت یا منفی ممکن ہیں۔ برقی رو اور برقی دباو کا عمومی تعلق

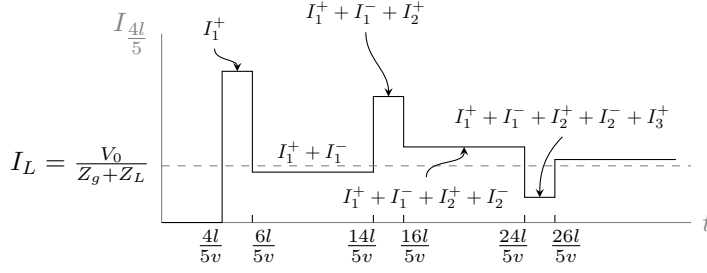
$$
\begin{aligned}
I_1^+ &= \frac{V_1^+}{Z_0} \\
I_1^- &= -\frac{V_1^-}{Z_0}
\end{aligned}
$$

ہے۔اس طرح

$$
\begin{aligned}
I_1^+ &= \frac{V_1^+}{Z_0}, \qquad & I_1^- &= -\frac{V_1^-}{Z_0} \\
I_2^+ &= \frac{V_2^+}{Z_0}, \qquad & I_2^- &= -\frac{V_2^-}{Z_0} \\
I_3^+ &= \frac{V_3^+}{Z_0}, \qquad & I_3^- &= -\frac{V_3^-}{Z_0}
\end{aligned}
$$

لکھے جائیں گے۔

شکل 11.19 کو دیکھتے ہوئے شکل 11.20 حاصل کیا گیا ہے۔اس شکل میں یہ دلچسپ حقیقت سامنے آتی ہے کہ سوئچ چالو کرنے کے لمحے پر برقی رو برقرار حالت یکساں برقی رو سے زیادہ ہے۔دراصل Z_g ، Z_L اور Z_0 کی ایسی قیمتیں چنی جا سکتی ہیں کہ ابتدائی برقی دباو یا ابتدائی برقی رو کی قیمت برقرار حالت قیمتوں سے زیادہ یا کم ہو۔

مثال 11.3: شکل 11.18 میں $l = 240\,\text{m}$ ، $v = 0.8c$ ، $V_0 = 5\,\text{V}$ ، $Z_L = 100\,\Omega$ ، $Z_g = 50\,\Omega$ اور $Z_0 = 50\,\Omega$ ہیں۔سوئچ کو $t = 0$ پر چالو حالت میں کر دیا جاتا ہے۔عارضی دورانیے میں برقی بوجھ اور منبع پر برقی دباو بالمقابل وقت اور برقی رو بالمقابل وقت کے خط کھینچیں۔

شکل 11.20: عارضی دورانیے کی برقی رو بالمقابل برقی دباو۔

حل: ان قیمتوں سے شرح انعکاس

$$\Gamma_g = \frac{50-50}{50+50} = 0$$
$$\Gamma_L = \frac{100-50}{100+50} = \frac{1}{3}$$

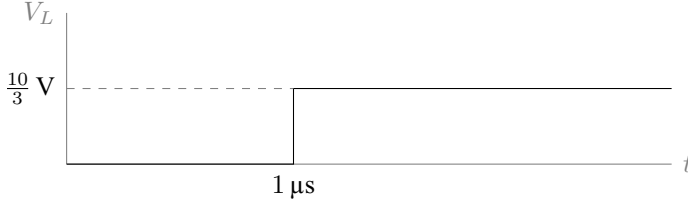
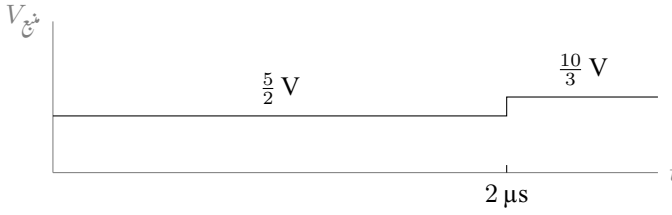
حاصل ہوتے ہیں۔ لمحہ $t=0$ پر سوئچ چالو کرنے سے منبع کو Z_0 نظر آتا ہے لہٰذا

$$V_1^+ = \frac{Z_0 V_0}{Z_g + Z_0} = \frac{50 \times 5}{50+50} = \frac{5}{2}\,\mathrm{V}$$
$$I_1^+ = \frac{V_0}{Z_g + Z_0} = \frac{5}{50+50} = \frac{1}{20}\,\mathrm{A}$$

ہوں گے۔ ترسیلی تار میں رفتار موج $v = 0.8 \times 3 \times 10^8 = 2.4 \times 10^8 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے لہٰذا یہ امواج

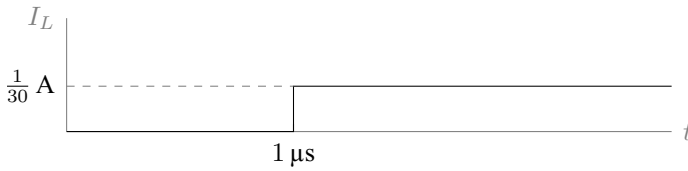
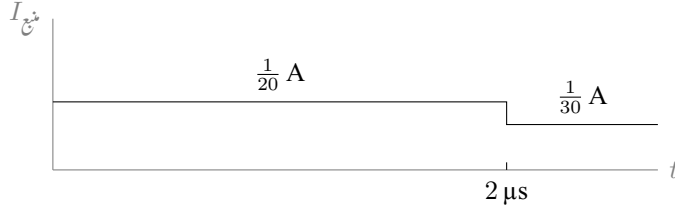
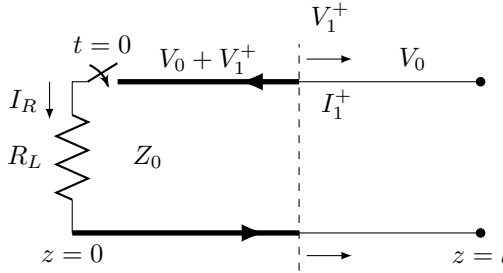
$$t = \frac{l}{v} = \frac{240}{2.4 \times 10^8} = 1\,\mathrm{\mu s}$$

دورانیے میں برقی بوجھ تک پہنچیں گی۔ برقی بوجھ سے انعکاس پذیر امواج

$$V_1^- = \Gamma_L V_1^+ = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6}\,\mathrm{V}$$
$$I_1^- = -\frac{V_1^-}{Z_0} = -\frac{1}{60}\,\mathrm{A}$$

شکل 11.21: برقی بوجھ پر برقی دباو۔

شکل 11.22: منبع کے خارجی سروں پر برقی دباو۔

ہیں۔یوں سوئچ چالو کرنے کے $1\,\mu\text{s}$ دیر بعد برقی بوجھ پر کل برقی دباو اور برقی رو

$$V_1^+ + V_1^- = \frac{5}{2} + \frac{5}{6} = \frac{10}{3}\,\text{V}$$
$$I_1^+ + I_1^- = \frac{1}{20} - \frac{1}{60} = \frac{1}{30}\,\text{A}$$

ہوں گے۔سوئچ چالو کرنے کے $2\,\mu\text{s}$ دیر بعد انعکاسی امواج منبع تک واپس پہنچیں گی۔چونکہ $\Gamma_g = 0$ ہے لہٰذا منبع سے کوئی موج انعکاس پذیر نہیں ہو گی۔اس طرح سوئچ چالو کرنے کے $2\,\mu\text{s}$ دیر بعد منبع پر برقی دباو اور برقی رو مندرجہ بالا قیمتیں اختیار کر لیں گے۔اس کے بعد یہی قیمتیں برقرار رہیں گے۔

شکل 11.23: برقی بوجھ کی برقی رو۔

شکل 11.24: منبع کی برقی رو۔

شکل 11.25: ترسیلی تار سے مستطیل پتلا اشارہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

عارضی دورانیے کا ایک اہم مسئلہ شکل 11.25 میں دکھایا گیا ہے جہاں $z=0$ پر برقی بوجھ R_L جوڑا جا سکتا ہے جبکہ $z=l$ پر تار کا سرا کھلا رکھا جاتا ہے۔ بار بردار تار پر V_0 مثبت برقی دباو پایا جاتا ہے جبکہ تار کی قدرتی رکاوٹ Z_0 ہے۔ آئیں اس کی کارکردگی پر غور کریں۔ سوئچ چالو کرتے ہی تار سے بار کا انخلا بہ راستہ R_L شروع ہو جاتا ہے۔ تار میں کثافت بار کی کمی سے تار میں برقی دباو کم ہوتا ہے۔ شکل 11.25 میں سوئچ بند کرنے کے کچھ ہی دیر بعد کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ سوئچ چالو کرنے سے پیدا موج کا مقام نقطہ دار لکیر دکھا رہی ہے۔ اس لکیر کے دائیں جانب برقی دباو V_0 اور بار ساکن ہے جبکہ لکیر کے بائیں جانب بار حرکت میں ہے اور برقی دباو $V_0+V_1^+$ ہے۔ چونکہ نقطہ دار لکیر کے بائیں جانب تار پر کثافت بار کم ہے للذا اس طرف برقی دباو بھی کم ہو گا، جس سے صاف ظاہر ہے کہ V_1^+ کی قیمت منفی ہو گی۔ نقطہ دار لکیر کے دائیں جانب برقی رو صفر کے برابر ہے جبکہ لکیر کے بائیں جانب برقی رو پائی جاتی ہے۔ یہ برقی رو گھڑی کی الٹ سمت ہے للذا تار میں ابتدائی برقی رو کی موج I_1^+ کی قیمت منفی ہو گی۔ برقی دباو کی موج V_1^+ اور برقی رو کی موج I_1^+ ترسیلی تار میں $z=0$ سے

$z = l$ جانب حرکت کرتی ہے۔ترسیلی تار میں برقی دباو اور برقی رو ہر صورت

$$-I_R = I_1^+ = \frac{V_1^+}{Z_0}$$

مساوات پر پورا اترتے ہیں۔مزاحمت R_L پر برقی دباو $V_0 + V_1^+$ ہے جو I_R کی وجہ سے ہے۔یوں برقی بوجھ پر $V_L = I_R R_L$ ہو گا جسے

$$V_L = V_0 + V_1^+ = -I_1^+ R_L = -\frac{V_1^+}{Z_0} R_L$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے

$$V_1^+ = -\frac{Z_0 V_0}{Z_0 + R_L} \tag{11.59}$$

حاصل ہوتا ہے۔برقی دباو کی ابتدائی موج جانتے ہوئے ہم کسی بھی لمحے کسی بھی نقطے پر برقی دباو یا برقی رو حاصل کر سکتے ہیں۔ایسا ہم کئی مرتبہ کر چکے ہیں۔

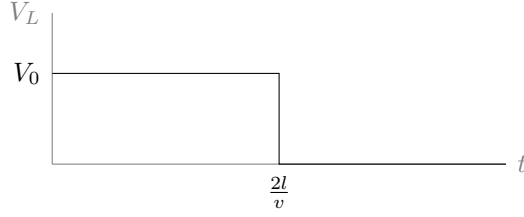
زیادہ دلچسپ صورت حال اس وقت پیدا ہوتی ہے جب $R_L = Z_0$ ہو۔ایسی صورت میں ترسیلی تار کے سروں پر شرح انعکاس

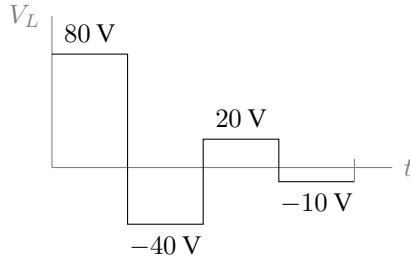
$$\Gamma_{z=0} = 0$$
$$\Gamma_{z=l} = 1$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $z = l$ پر تار کا سرا کھلے دور ہے۔مساوات 11.59 سے

$$V_1^+ = -\frac{V_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں سوئچ چالو کرتے ہی برقی بوجھ پر دباو $V_L = V_0 + V_1^+ = \frac{V_0}{2}$ پیدا ہوتا ہے۔موج V_1^+ کو تار کے دائیں سرے تک پہنچنے کی خاطر $\frac{l}{v}$ وقت درکار ہے جہاں سے یہ انعکاس پذیر ہو گی۔اس طرح سوئچ چالو کرنے کے ٹھیک $\frac{2l}{v}$ دیر بعد منعکس برقی موج برقی بوجھ پہنچ کر اس پر کل برقی دباو کی قیمت $0\,\mathrm{V}$ کر دے گی۔چونکہ $R_L = Z_0$ ہے لہٰذا بوجھ سے موج انعکاس پذیر نہیں ہو گی۔برقی بوجھ پر برقی دباو کو شکل 11.26 میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ برقی بوجھ پر بالکل مستطیل برقی دباو پائی جاتی ہے۔انتہائی کم دورانیے کے مستطیل اشارات ترسیلی تار کی مدد سے پیدا کئے جا سکتے ہیں۔ $R_L \neq Z_0$ کی صورت میں موج کئی مرتبہ انعکاس پذیر ہو گی جس سے اشارہ مستطیل شکل کھو دے گا۔

V_L
V_0
$\frac{2l}{v}$
t

شکل 11.26: ترسیلی تار سے حاصل مستطیل پتلا اشارہ۔

V_L
80 V
20 V
t
−10 V
−40 V

شکل 11.27: بار بار انعکاس پذیر موج سے پیدا برقی دباو۔

مثال 11.4: $300\,\Omega$ کے برقی بوجھ پر $5000\,\mathrm{V}$ اور $100\,\mathrm{ns}$ دورانیے کا مستطیل اشارہ درکار ہے۔اس اشارے کو $300\,\Omega$ کے ہم محوری تار سے حاصل کریں جہاں تار میں موج کی رفتار $0.8c$ ہے۔

حل: اشارے کے دورانیے سے تار کی لمبائی

$$l = \frac{0.8 \times 3 \times 10^8 \times 100 \times 10^{-9}}{2} = 12\,\mathrm{m}$$

حاصل ہوتی ہے۔ہم محوری تار کو $10\,\mathrm{kV}$ برقی دباو پر رکھتے ہوئے درکار اشارہ حاصل ہو گا۔

مثال 11.5: شکل 11.25 میں $V_0 = 320\,\text{V}$ ، $Z_0 = 50\,\Omega$ جبکہ $R_L = \frac{50}{3}\,\Omega$ ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ کو چالو کیا جاتا ہے۔ $0 < t < \frac{8l}{v}$ کے لئے مزاحمت پر برقی دباو حاصل کریں۔

حل: اس دورانیے میں موج ترسیلی تار میں چار چکر کاٹے گی۔ دی گئی معلومات سے

$$\Gamma_{z=0} = \frac{\frac{50}{3} - 50}{\frac{50}{3} + 50} = -\frac{1}{2}$$
$$\Gamma_{z=l} = \frac{\infty - 50}{\infty + 50} = 1$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

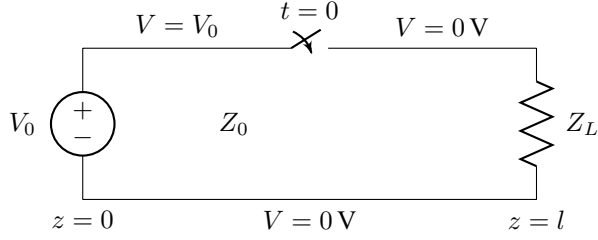
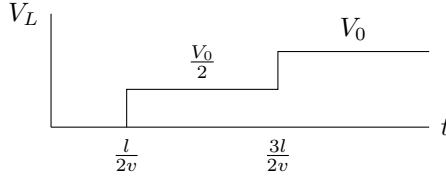
$$V_1^+ = -\frac{50 \times 320}{50 + \frac{50}{3}} = -240\,\text{V}$$
$$V_1^- = \Gamma_{z=l} V_1^+ = -240\,\text{V}$$

ہوں گے۔ اسی طرح

$$V_2^+ = V_2^- = \Gamma_{z=0} V_1^- = 120\,\text{V}$$
$$V_3^+ = V_3^- = \Gamma_{z=0} V_2^- = -60\,\text{V}$$
$$V_4^+ = V_4^- = \Gamma_{z=0} V_3^- = 30\,\text{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
V_L &= V_0 + V_1^+ = 320 - 240 = 80\,\text{V} && (0 < t < \tfrac{2l}{v}) \\
&= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ = -40\,\text{V} && (\tfrac{2l}{v} < t < \tfrac{4l}{v}) \\
&= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ = 20\,\text{V} && (\tfrac{4l}{v} < t < \tfrac{6l}{v}) \\
&= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + V_4^+ = -10\,\text{V} && (\tfrac{6l}{v} < t < \tfrac{8l}{v})
\end{aligned}$$

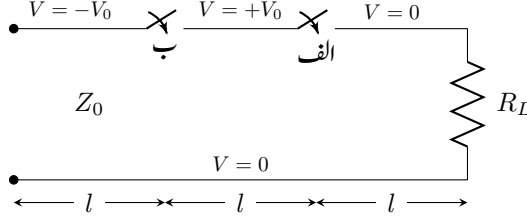
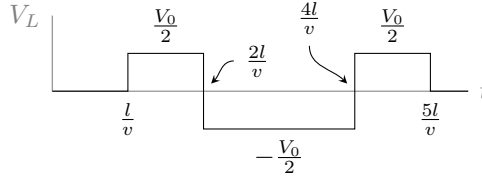
لکھا جا سکتا ہے۔ ان نتائج کو شکل 11.27 میں دکھایا گیا ہے۔

(ا) ترسیلی تار کے عین درمیانے نقطے پر سوئچ کو چالو کیا جاتا ہے۔

(ب) برقی بوجھ پر برقی دباو۔

شکل 11.28: مثال 11.6 کا دور اور اس میں برقی بوجھ پر برقی دباو۔

مثال 11.6: شکل 11.28-الف میں ترسیلی تار کے عین درمیان $z = \frac{l}{2}$ پر سوئچ نسب ہے جسے لمحہ $t = 0$ پر چالو کیا جاتا ہے۔اس دور میں $R_L = Z_0$ ہے جبکہ منبع کی اندرونی مزاحمت $0\,\Omega$ کے برابر ہے۔برقی بوجھ پر برقی دباو کا خط کھینچیں۔

حل: سوئچ سے برقی بوجھ کی جانب ترسیلی تار پر $0\,\text{V}$ برقی دباو ہے جبکہ سوئچ سے منبع کی جانب ترسیلی تار بار بردار ہے جس سے اس جانب کی برقی دباو V_0 ہے۔سوئچ چالو کرنے سے دو برقی موج، سوئچ کے مقام پر، پیدا ہوتی ہیں۔سوئچ سے برقی بوجھ کی جانب موج کا حیطہ $\frac{V_0}{2}$ جبکہ سوئچ سے منبع کی جانب موج کا حیطہ $-\frac{V_0}{2}$ ہو گا۔چونکہ $R_L = Z_0$ ہے لہٰذا برقی بوجھ پر انعکاسی موج پیدا نہیں ہو گی۔اس کے برعکس منبع پر $\Gamma_g = -1$ کی بنا پر یہاں سے انعکاس ہو گا۔ان تمام کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
V_L &= 0 && (0 < t < \tfrac{l}{2v}) \\
&= \frac{V_0}{2} && (\tfrac{l}{2v} < t < \tfrac{3l}{2v}) \\
&= V_0 && (\tfrac{3l}{2v} < t)
\end{aligned}
$$

ان نتائج کو شکل 11.28-ب میں دکھایا گیا ہے۔

(ا) ترسیلی تار میں دو سوئچ بیک وقت چالو کئے جاتے ہیں۔

(ب) برقی بوجھ پر عارضی دورانیے میں برقی دباو کا خط۔

شکل 11.29: مثال 11.7 کا دور اور برقی بوجھ پر برقی دباو۔

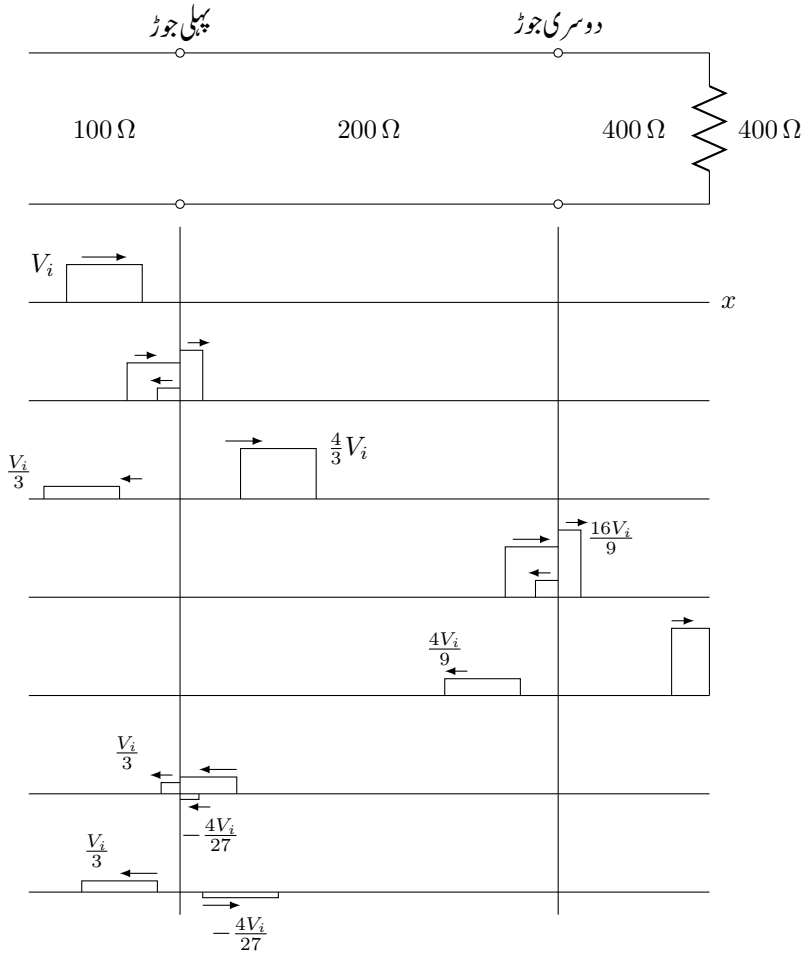
مثال 11.7: شکل 11.29 میں ترسیلی تار میں دو عدد سوئچ نسب ہیں۔دونوں سوئچ کو لمحہ $t=0$ پر بیک وقت چالو کیا جاتا ہے۔ $Z_0=R_L$ کی صورت میں برقی بوجھ پر برقی دباو کا خط کھینچیں۔

حل: برقی بوجھ پر $\Gamma_L=0$ ہے جبکہ ترسیلی تار کے کھلے سر پر $\Gamma=1$ ہے۔دو سوئچ چالو کرنے سے کل چار عدد برقی دباو کی امواج پیدا ہوتی ہیں۔ان میں سے دو عدد موج برقی بوجھ کی جانب حرکت کرتے ہیں جبکہ بقایا دو عدد موج ترسیلی تار کے کھلے سر کی جانب حرکت کرتے ہیں۔کھلے سر پر دونوں امواج انعکاس پذیر ہو کر برقی بوجھ کی جانب لوٹتے ہیں۔برقی بوجھ سے کوئی موج انعکاس پذیر نہیں ہوتی۔

سوئچ-الف سے برقی بوجھ جانب $\frac{V_0}{2}$ وولٹ کی موج جبکہ کھلے سر کی جانب $-\frac{V_0}{2}$ وولٹ کی موج حرکت کرتی ہے۔پہلی موج $t=\frac{l}{v}$ دیر بعد برقی بوجھ تک پہنچتی ہے۔دوسری موج کھلے سر سے انعکاس پذیر ہو کر برقی بوجھ تک $t=\frac{5l}{v}$ دورانیے میں پہنچتی ہے۔

سوئچ-ب سے برقی بوجھ جانب $-V_0$ حیطے کی موج حرکت کرتے ہوئے برقی بوجھ تک $t = \frac{2l}{v}$ دورانیے میں پہنچتی ہے جبکہ دوسری موج کا حیطہ $+V_0$ ہے اور ترسیلی تار کے کھلے سر سے ہوتے ہوئے برقی بوجھ تک $\frac{4l}{v}$ وقت میں پہنچتی ہے۔ان حقائق سے برقی بوجھ پر برقی دباو کا خط حاصل کیا جاتا ہے جسے شکل 11.29 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 11.30 میں تین مختلف قدرتی رکاوٹ کے ترسیلی تاروں کو سلسلہ وار جوڑا گیا ہے جن کے آخر میں $400\,\Omega$ کی مزاحمت جڑی ہے۔بائیں جانب سے ایک عدد مستطیلی اشارہ مزاحمت کی طرف بڑھ رہا ہے۔ میں امید کرتا ہوں کہ آپ شکل میں دئے مختلف لمحات پر صورت حال سمجھ پائیں گے۔

پہلی جوڑ
دوسری جوڑ
$100\,\Omega$
$200\,\Omega$
$400\,\Omega$
$400\,\Omega$
V_i
x
$\frac{V_i}{3}$
$\frac{4}{3}V_i$
$\frac{16V_i}{9}$
$\frac{4V_i}{9}$
$\frac{V_i}{3}$
$-\frac{4V_i}{27}$
$\frac{V_i}{3}$
$-\frac{4V_i}{27}$

شکل 11.30: باریک اشارے کی انعکاس اور ترسیل۔

سوالات

سوال 11.1: ترسیلی تار کے مستقل $R = 20\,\frac{\Omega}{\text{m}}$ ، $L = 4\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ، $G = 80\,\frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ اور $C = 60\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔اس میں $200\,\text{MHz}$ تعدد کی برقی موج حرکت کر رہی ہے۔ الف) γ ، α ، β ، λ اور Z_0 حاصل کریں۔ب) $12\,\text{m}$ فاصلہ طے کرنے کے بعد موج کا حیطہ ابتدائی قیمت کی نسبت سے کتنا ہو گا؟ پ) $1.6\,\text{m}$ فاصلہ طے کرنے کے بعد موج کا زاویائی فرق کتنا ہو گا؟

جوابات: $\gamma = 0.049 + j3.1\,\text{m}^{-1}$ ، $\alpha = 0.049\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، $\beta = 3.1\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = 2.03\,\text{m}$ ، $Z_0 = 258 - j2.37\,\Omega$ ، $55.5\,\%$ ، $284°$

سوال 11.2: ایک ترسیلی تار جس میں موج کی رفتار $3 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 50\,\Omega$ ہے۔ تار کے داخلی سروں پر $20\,\text{MHz}$ کی موج پیدا کی جا رہی ہے جبکہ اس کا دوسرا سرا قصر دور کیا گیا ہے۔ الف) تار کی لمبائی $3.75\,\text{m}$ ہونے کی صورت میں $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔ ب) تار کی لمبائی بالترتیب $7.5\,\text{m}$ ، $1.2\,\text{m}$ اور $9\,\text{m}$ ہونے کی صورت میں $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔

جوابات: ∞ ، $0\,\Omega$ ، $27.5j\,\Omega$ ، $36.3j\,\Omega$

سوال 11.3: بے ضیاع ترسیلی تار کی فی میٹر امالہ $0.25\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ جبکہ اس کی قدرتی رکاوٹ $75\,\Omega$ ہے۔الف) تار کی فی میٹر برقی گنجائش دریافت کریں۔ ب) تار میں موج کی رفتار حاصل کریں۔ پ) موج کی تعدد $50\,\text{MHz}$ ہونے کی صورت میں β حاصل کریں۔ ت) تار کے ساتھ $55\,\Omega$ کا برقی بوجھ منسلک ہے۔ Γ اور s حاصل کریں۔

جوابات: $44.4\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ، $3 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $\beta = 1.05\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\Gamma = -\frac{2}{13}$ ، $s = \frac{15}{11}$

سوال 11.4: ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $300\,\Omega$ ہے۔موج کی تعدد $6 \times 10^8\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ جبکہ اس کی رفتار $2.8 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ الف) تار کی فی میٹر امالہ اور برقی گنجائش حاصل کریں۔ ب) تار پر سلسلہ وار جڑی $150\,\Omega$ اور $0.8\,\mu\text{H}$ کا برقی بوجھ ڈالا جاتا ہے۔ Γ اور s حاصل کریں۔

جوابات: $L = 1.07\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ، $C = 11.9\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ، $\Gamma = 0.38 + j0.67$ ، $s = 7.49$

سوال 11.5: بے ضیاع ترسیلی تار کی $80\,\text{MHz}$ تعدد پر قدرتی رکاوٹ $75\,\Omega$ اور $\beta = 0.25\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہیں۔ الف) تار کی L اور C حاصل کریں۔ ب) تار پر $Z_L = 80 + j100\,\Omega$ برقی بوجھ لادا جاتا ہے۔ برقی بوجھ سے کتنے فاصلے پر تار کی داخلی رکاوٹ $Z_{\text{داخلی}}$ حقیقی یعنی $Z_{\text{داخلی}} = R + j0$ ہو گا۔

جوابات: $L = 117\,\frac{\text{nH}}{\text{m}}$ ، $C = 20.8\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ، $60.34\,\text{cm}$

سوال 11.6: تعدد $1\,\frac{\text{Mrad}}{\text{s}}$ پر ضیاع کار ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 40 + j0\,\Omega$ اور حرکی مستقل $\gamma = 2 + j6\,\text{m}^{-1}$ ہیں۔ الف) G ، C ، R اور L حاصل کریں۔

جوابات: $G = 0.05\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ ، $C = 150\,\frac{\text{nF}}{\text{m}}$ ، $R = 80\,\frac{\Omega}{\text{m}}$ ، $L = 0.24\,\frac{\text{mH}}{\text{m}}$

سوال 11.7: بے ضیاع ترسیلی تار کی $150\,\text{MHz}$ تعدد پر $Z_0 = 80\,\Omega$ اور $\beta = 6\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہیں۔تار پر متوازی جڑے $200\,\Omega$ کی مزاحمت اور $10\,\text{pF}$ کی برق گیر (کپیسٹر) کا برقی بوجھ لادا جاتا ہے۔ الف) L اور C حاصل کریں۔ ب) شرح ساکن موج حاصل کریں۔

جوابات: $L = 0.51\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ، $C = 79.6\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ، $s = 4.07$

سوال 11.8: منبع برقی دباو سلسلہ وار جڑی رکاوٹ $Z = 300 - j300\,\Omega$ اور بے ضیاع ترسیلی تار کے ساتھ منسلک ہے۔ترسیلی تار کا دوسرا سرا کسے دور ہے۔ترسیلی تار میں طول موج λ ہے۔ الف) منبع برقی دباو پر کل $300\,\Omega$ رکاوٹ مہیا کرنے کی خاطر ترسیلی تار کی لمبائی کتنی رکھی جائے گی۔ ب) ترسیلی تار کی لمبائی کے تمام ممکنہ جواب حاصل کریں۔

جوابات: لمبائی $= \frac{\lambda}{8}$ ، لمبائی $= \frac{\lambda}{8} + \frac{m\lambda}{2}$

سوال 11.9: تعدد $50\,\text{MHz}$ کے منبع برقی دباو کے ساتھ رکاوٹ $Z_g = 50 + j50\,\Omega$ اور بے ضیاع ترسیلی تار سلسلہ وار جڑے ہیں۔ ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 100\,\Omega$ ، لمبائی $\frac{\lambda}{4}$ ہے اور یہ برقی بوجھ Z_L کو طاقت فراہم کر رہی ہے۔ الف) برقی بوجھ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر منبع برقی دباو کو کل $100\,\Omega$ رکاوٹ نظر آتی ہے۔ ب) ترسیلی تار کی فی میٹر امالہ $L = 1.5\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ہونے کی صورت میں ترسیلی تار میں موج کی رفتار اور ترسیلی تار کی لمبائی دریافت کریں۔

جوابات: $Z_L = 100 + j100\,\Omega$ ، $6.6737\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $0.333\,\text{m}$

سوال 11.10: تیس میٹر لمبی بے ضیاع ترسیلی تار کے دونوں سرے آزاد رکھنے کی صورت میں اس کی کل برقی گنجائش $C = 1.5\,\text{nF}$ ناپی جاتی ہے۔اس کا ایک سرا قصر دور کرتے ہوئے دوسرے سرے پر نہایت کم دورانیے کا مستطیلی برقی دباو کا جھٹکا دیا جاتا ہے جو قصر دور سرے سے ٹکرا کر واپس لوٹتا ہے۔تار میں دو طرفہ فاصلہ کل $0.4\,\mu\text{s}$ میں طے پاتا ہے۔ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔

جواب: $Z_0 = 133.3\,\Omega$

سوال 11.11: ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 60\,\Omega$ جبکہ اس پر موج کی رفتار $2.8 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔تار پر آمدی موج کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$V_s^+(z,t) = 100\cos(\omega t - \pi z) \qquad \text{V}$$

الف) موج کی زاویائی تعدد حاصل کریں۔ ب) آمدی برقی رو کی موج کی مساوات لکھیں۔ پ) ترسیلی تار کا $z > 0$ حصہ ہٹا کر $z = 0$ پر $Z_L = 60 + j40\,\Omega$ رکاوٹ نسب کرنے کی صورت میں Γ حاصل کریں۔انعکاسی موج $V_s^-(z,t)$ کی مساوات لکھیں اور $z = -2.25\,\text{m}$ پر V_s حاصل کریں۔

جوابات: $\omega = 879.6\,\frac{\text{Mrad}}{\text{s}}$ ، $I^+(z,t) = \frac{5}{3}\cos(\omega t - \pi z)\,\text{A}$ ، $\Gamma = 0.1 + j0.3 = 0.316\underline{/71.6^\circ}$ ، $V_s^-(z,t) = 31.6e^{j(\pi z + 1.249)}\,\text{V}$ ، $V_s(z = -2.5\,\text{m}) = 130.4e^{j0.71} = 130.4\underline{/40.6^\circ}$

سوال 11.12: ترسیلی تار کی $Z_0 = 50\,\Omega$ ، لمبائی $330\,\text{m}$ اور اس میں رفتار موج $v = 0.8c$ ہے۔یہ $Z_L = 40 + j70\,\Omega$ برقی بوجھ پر اختتام پذیر ہے۔تعدد $1.2\,\text{MHz}$ پر Γ ، s اور $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $0.62\underline{/60.3^\circ}$ ، 4.27 ، $100\underline{/-56.2^\circ}$

سوال 11.13: بے ضیاع ترسیلی تار کی لمبائی $3\,\text{m}$ ، قدرتی رکاوٹ $300\,\Omega$ جبکہ اس پر طول موج $4\,\text{m}$ ہے۔ترسیلی تار کے ساتھ نسب برقی بوجھ $100 - j150\,\Omega$ پر $100\underline{/30^\circ}$ برقی دباو پایا جاتا ہے۔ الف) ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباو حاصل کریں۔ ب) تار پر زیادہ سے زیادہ برقی دباو کیا پایا جائے گا؟

جوابات: $166.4\underline{/-63.7^\circ}\,\text{V}$ ، $187.8\,\text{V}$

سوال 11.14: بے ضیاع ترسیلی تار کی لمبائی $38\,\text{m}$ ہے جبکہ اس کے مستقل $L = 0.3\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ اور $C = 90\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔برقی بوجھ $Z_L = 40 + j0\,\Omega$ ہے جبکہ داخلی جانب $4\,\text{MHz}$ تعدد کا منبع $200\underline{/0^\circ}\,\text{V}$ مہیا کر رہا ہے۔ الف) داخلی برقی رو کا حیطہ حاصل کریں۔ ب) برقی بوجھ پر برقی رو کا حیطہ حاصل کریں۔ پ) برقی بوجھ کو منتقل طاقت حاصل کریں۔

جوابات: $10.2\,\text{A}$ ، $3.52\,\text{A}$ ، $247.9\,\text{W}$

سوال 11.15: $300\,\Omega$ قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار پر متوازی جڑے $400\,\Omega$ اور $600\,\Omega$ کا برقی بوجھ لادا جاتا ہے۔تار کی لمبائی $\frac{5\lambda}{8}$ ہے جبکہ اسے داخلی جانب $v(t) = 310\cos(2\times10^9 t)\,\text{V}$ برقی دباو مہیا کی جاتی ہے۔ برقی بوجھ سے لدے ترسیلی تار کی داخلی رکاوٹ $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کرتے ہوئے بالترتیب دونوں مزاحمتوں کو مہیا اوسط طاقت حاصل کریں۔

جوابات: $Z_{\text{داخلی}} = 292.7 + j65.9\,\Omega$ ، $93.8\,\text{W}$ ، $62.5\,\text{W}$

سوال 11.16: صفحہ 552 پر شکل 11.5-الف میں برقی بوجھ کو ترسیلی تار کے ذریعہ منبع سے طاقت فراہم کرتا دکھایا گیا ہے۔موجودہ سوال میں $Z_0 = 60\,\Omega$ ، برقی بوجھ $Z_L = 40 - j50\,\Omega$ ، منبع کی خارجی مزاحمت $Z_g = 40\,\Omega$ ، تعدد $10^8\,\text{Hz}$ ، تار کی لمبائی $1.3\,\text{m}$ جبکہ منبع کی برقی دباو $80\underline{/0}\,\text{V}$ ہیں۔ترسیلی تار میں موج کی رفتار c کے برابر ہے۔ الف) شرح ساکن موج s اور ترسیلی تار کی $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔ ب) Z_g اور Z_L میں اوسط طاقت ضیاع حاصل کریں۔ پ) ترسیلی تار میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔

جوابات: $s = 2.86$ ، $Z_{\text{داخلی}} = 99.1 - j75.2\,\Omega$ ، $5.1\,\text{W}$ ، $12.7\,\text{W}$ ، $0\,\text{W}$

سوال 11.17: ترسیلی تار کی لمبائی $\frac{8\lambda}{7}$ ، قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 75\,\Omega$ جبکہ اس پر برقی بوجھ $Z_L = 100 - j50$ ہے۔تار میں موج کی رفتار c ہے۔اسے داخلی جانب $100\,\Omega$ کے خارجی مزاحمت کے منبع سے $600\underline{/0}\,\text{V}$ برقی دباو مہیا کی جاتی ہے۔ الف) Γ ، s اور $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔ ب) ترسیلی تار کی داخلی برقی رو اور اسے مہیا طاقت حاصل کریں۔ پ) برقی بوجھ پر برقی دباو اور اس کی برقی رو حاصل کریں۔ ت) برقی بوجھ کو منتقل طاقت حاصل کریں۔

جوابات:الف) $\Gamma = 0.21 - j0.23$ ، $s = 1.89$ ، $Z_{\text{داخلی}} = 41.7 - j14\,\Omega$ ب) $4.2\underline{/5.6^\circ}\,\text{A}$ ، $370\,\text{W}$ پ) $304\underline{/-63^\circ}\,\text{V}$ ، $2.7\underline{/-37}\,\text{A}$ ت) $370\,\text{W}$

سوال 11.18: قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 300\,\Omega$ اور لمبائی $0.7\,\text{m}$ کے ترسیلی تار کا خارجی سرا قصر دور کیا جاتا ہے۔تار پر طول موج $0.34\,\text{m}$ ہے۔داخلی اشارے کا حیطہ $15\,\text{V}$ ہونے کی صورت میں تار پر زیادہ سے زیادہ حیطہ کیا پایا جائے گا؟ قصر دور سرے میں برقی رو کا حیطہ دریافت کریں۔

جوابات: $41.5\,\text{V}$ ، $138.4\,\text{mA}$

سوال 11.19: منبع برقی رو $0.4\underline{/0}\,\mathrm{A}$ جس کی خارجی مزاحمت $80\,\Omega$ ہے، 3.4λ لمبی ترسیلی تار کے ذریعہ $25\,\Omega$ کے برقی بوجھ کو طاقت فراہم کر رہی ہے۔ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $50\,\Omega$ ہے۔مزاحمتی برقی بوجھ اور منبع کی مزاحمت میں طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

جوابات: $1.28\,\mathrm{W}$ ، $0.81\,\mathrm{W}$

سوال 11.20: برقی بوجھ $Z_L = 90 - j55\,\Omega$ کو 0.12λ لمبائی اور $Z_0 = 70\,\Omega$ قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار طاقت فراہم کرتی ہے۔سمتھ نقشہ استعمال کرتے ہوئے برقی بوجھ سے لدے ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ $Z_{\text{داخلی}}$ اور شرح ساکن موج s حاصل کریں۔

جوابات: $38 - j20\,\Omega$ ، $s = 2.05$

سوال 11.21: بے ضیاع ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 400\,\Omega$ ہے۔تار کو $200\,\mathrm{MHz}$ تعدد پر استعمال کیا جا رہا ہے۔اس تعدد پر $Z_{\text{داخلی}} = 200 - j200\,\Omega$ ہے۔تار کی لمبائی $1\,\mathrm{m}$ ہے۔سمتھ نقشہ استعمال کرتے ہوئے الف) شرح ساکن موج حاصل کریں۔ ب) تار پر نسب برقی بوجھ Z_L حاصل کریں۔ پ) بلند تر برقی دباو کا مقام حاصل کریں۔

جوابات: $s = 2.62$ ، $Z_L = 1040 + j69.8\,\Omega$ ، $z = -7.2\,\mathrm{mm}$

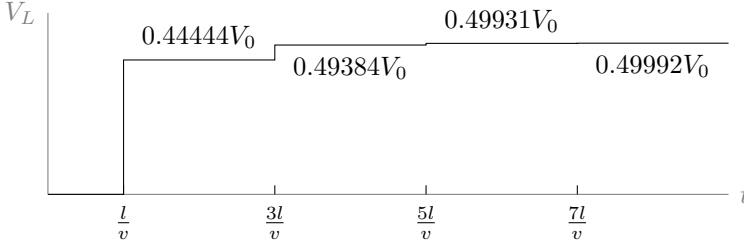
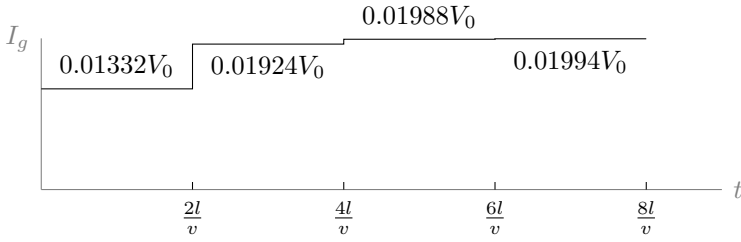
سوال 11.22: بے ضیاع دو متوازی تار پر مبنی ترسیلی تار کی لمبائی $25\,\mathrm{m}$ ، قدرتی رکاوٹ $300\,\Omega$ اور فی میٹر برقی گنجائش $12\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}}$ ہے۔نقطہ $z = 0$ پر تار کے ساتھ متوازی جڑے مزاحمت $800\,\Omega$ اور برقی گنجائش $5\,\mathrm{pF}$ کا برقی بوجھ جڑا ہے۔تعدد $\omega = 10^{10}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ پر سمتھ نقشے کے ذریعہ Γ ، s اور $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\Gamma = 0.44 - j0.16$ ، $s = 2.7$ ، $Z_{\text{داخلی}} = 584 + j335\,\Omega$

سوال 11.23: بے ضیاع ترسیلی تار پر $\frac{Z_L}{Z_0} = 2 + j1$ جبکہ $\lambda = 20\,\mathrm{m}$ ہے۔سمتھ نقشے کے استعمال کرتے ہوئے حل کریں۔ الف) وہ نقطہ دریافت کریں جس پر $z_{\text{داخلی}} = r + j0$ ہو جہاں $r > 1$ ہے۔ ب) اس نقطے پر $z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔ پ) اس نقطے پر ترسیلی تار کو کاٹ کر برقی بوجھ جانب حصے کو ہٹایا جاتا ہے جبکہ نئے سرے پر r نسب کیا جاتا ہے۔ترسیلی تار پر s حاصل کریں۔ ت) نسب کئے گئے r سے کتنے فاصلے پر $\frac{Z_L}{Z_0} = 2 + j1$ ہو گا؟

V_L 0.44444V_0 0.49384V_0 0.49931V_0 0.49992V_0 t $\frac{l}{v}$ $\frac{3l}{v}$ $\frac{5l}{v}$ $\frac{7l}{v}$

(ا) برقی بوجھ کی برقی دباو بالمقابل وقت۔

I_g 0.01332V_0 0.01924V_0 0.01988V_0 0.01994V_0 t $\frac{2l}{v}$ $\frac{4l}{v}$ $\frac{6l}{v}$ $\frac{8l}{v}$

(ب) منبع کی برقی رو بالمقابل وقت۔

شکل 11.31: سوال 11.25 کے خط۔

جوابات: $0.74\,\mathrm{m}$ ، $z_{\text{داخلی}} = 2.61 + j0\,\Omega$ ، $s = 2.61$ ، $9.26\,\mathrm{m}$

سوال 11.24: ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j75\,\Omega$ برقی بوجھ نقطہ $z = 0$ پر جڑی ہے۔ تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 50\,\Omega$ اور اس پر موج کی رفتار $v = c$ ہے۔ برقی بوجھ کے قریبی اس نقطے کو دریافت کریں جس پر داخلی رکاوٹ کا حقیقی جزو $\frac{1}{Z_0}$ کے برابر ہو جبکہ اس کا خیالی جزو منفی قیمت رکھتا ہو۔ اس نقطے پر $y_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر کتنا برق گیر (کپیسٹر) نسب کرنے سے بقایا تار پر $s = 1$ حاصل ہو گا؟

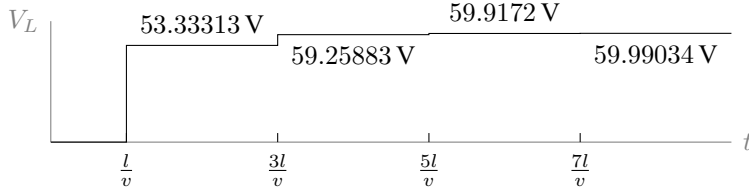
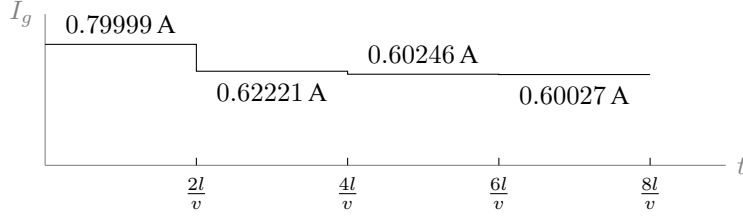
جوابات: $39.6\,\mathrm{cm}$ ، $y_{\text{داخلی}} = 1 - j2.23$ ، $C = 24\,\mathrm{pF}$

سوال 11.25: صفحہ 577 میں شکل 11.18 دکھایا گیا ہے۔ اس میں $Z_0 = 50\,\Omega$ ، $R_g = R_L = 25\,\Omega$ جبکہ منبع کی برقی دباو V_0 ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ $0 < t < \frac{8l}{v}$ دورانیے کے لئے برقی بوجھ کی برقی دباو اور منبع کی برقی رو کے خط کھینچیں۔

جواب: شکل 11.31 میں دکھائے گئے ہیں۔

V_L
53.33313 V
59.25883 V
59.9172 V
59.99034 V
t
$\frac{l}{v}$ $\frac{3l}{v}$ $\frac{5l}{v}$ $\frac{7l}{v}$

(ا) برقی بوجھ کی برقی دباو بالمقابل وقت۔

I_g
0.79999 A
0.62221 A
0.60246 A
0.60027 A
t
$\frac{2l}{v}$ $\frac{4l}{v}$ $\frac{6l}{v}$ $\frac{8l}{v}$

(ب) منبع کی برقی رو بالمقابل وقت۔

شکل 11.32: سوال 11.26 کے خط۔

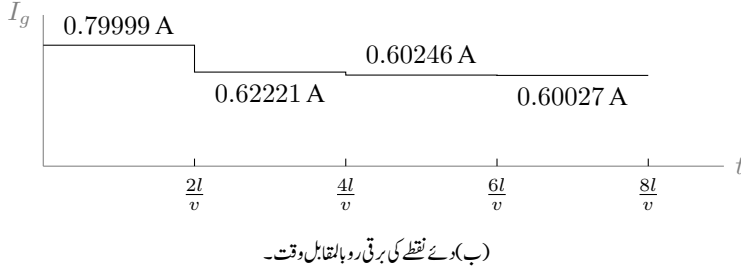
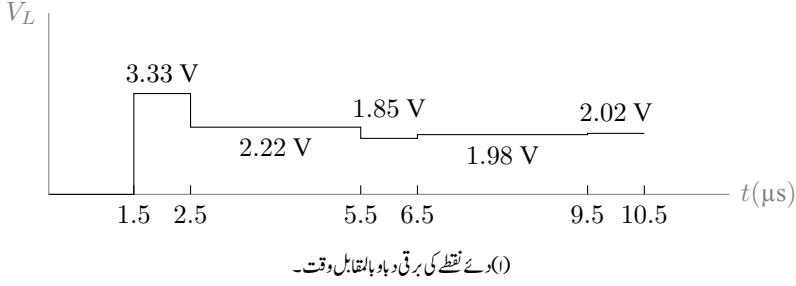
سوال 11.26: صفحہ 577 میں شکل 11.18 دکھایا گیا ہے۔اس میں $Z_0 = 50\,\Omega$ ، $R_g = R_L = 100\,\Omega$ جبکہ منبع کی برقی دباو $V_0 = 120\,\text{V}$ ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ $0 < t < \frac{8l}{v}$ دورانیے کے لئے برقی بوجھ کی برقی دباو اور منبع کی برقی رو کے خط کھینچیں۔

جواب: شکل 11.32 میں دکھائے گئے ہیں۔

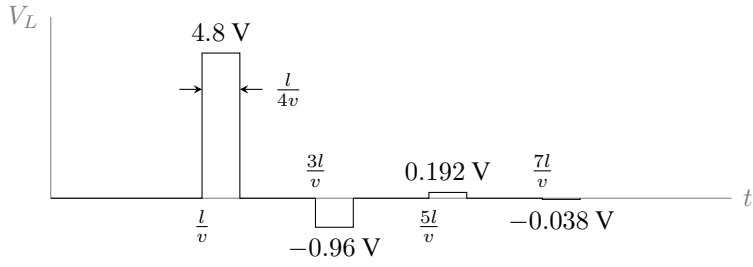
سوال 11.27: صفحہ 577 میں شکل 11.18 دکھایا گیا ہے۔اس میں $Z_0 = 50\,\Omega$ ، $R_L = 25\,\Omega$ ، $R_g = 100\,\Omega$ جبکہ منبع کی برقی دباو $V_0 = 10\,\text{V}$ ہے۔تار کی لمبائی $480\,\text{m}$ ہے جبکہ تار میں موج کی رفتار $2.4 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ $0 < t < \frac{8l}{v}$ دورانیے کے لئے منبع سے $360\,\text{m}$ فاصلے پر برقی دباو اور برقی رو کے خط کھینچیں۔

جواب: شکل 11.33 میں دکھائے گئے ہیں۔

(ا) دئے نقطے کی برقی دباو بالمقابل وقت۔

(ب) دئے نقطے کی برقی رو بالمقابل وقت۔

شکل 11.33: سوال 11.27 کے خط۔

سوال 11.28: شکل 11.18 میں $Z_0 = 75\,\Omega$ ، $R_g = R_L = 50\,\Omega$ اور $V_0 = 10\,\mathrm{V}$ ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے جبکہ لمحہ $t = \frac{l}{4v}$ پر سوئچ کو دوبارہ منقطع کر دیا جاتا ہے۔ برقی بوجھ پر برقی دباو کا خط $0 < t < \frac{8l}{v}$ دورانیے کے لئے کھینچیں۔

جواب: سوئچ چالو کرنے سے $V_1^+ = 6\,\mathrm{V}$ اور $I_1^+ = 0.08\,\mathrm{A}$ امواج پیدا ہوتی ہیں۔ سوئچ منقطع کرنے سے برقی رو صفر ہو جاتی ہے۔ جس کا مطلب ہے کہ اب $I_1'^+ = -0.08\,\mathrm{A}$ کی موج پیدا ہوئی ہے یعنی برقی دباو کی موج $V_1'^+ = -6\,\mathrm{V}$ کی موج پیدا ہوئی ہے۔ برقی دباو کی دونوں امواج مل کر مستطیل موج کو جنم دیتی ہیں۔ شکل 11.34 میں نتائج دکھائے گئے ہیں۔

شکل 11.34: سوال 11.28 میں برقی بوجھ پر مستطیل برقی دباو۔

باب 12

ترچھی آمد، انعکاس، انعطاف اور انتشار

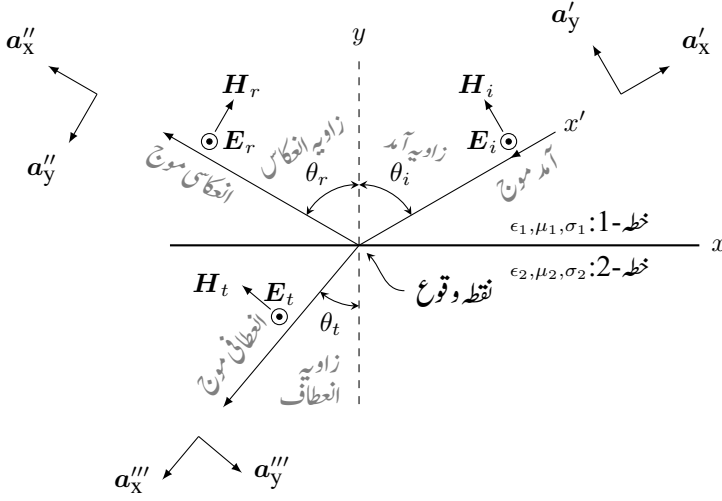
دو خطوں کی سرحد پر عمودی آمدی موج کے انعکاس اور ترسیل پر باب 10 میں غور کیا گیا۔اس باب میں ترچھی آمدی موج کی بات کرتے ہوئے انعکاس کے علاوہ انعطاف کی بھی بات کی جائے گی۔باب کے آخر میں انکسار پر غور کیا جائے گا۔عمودی امواج اور ترسیلی تار کی مساوات ہوبہو ایک جیسی تھی۔ ترچھی آمدی موج کی مساوی مثال ترسیلی تار میں نہیں پائی جاتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ ان پر یہاں علیحدہ سے غور کیا جا رہا ہے۔

12.1 ترچھی آمد

عمودی قطبی برقی موج $\boldsymbol{E}_\perp$

شکل 12.1 میں سرحد پر ترچھی **آمد موج** (موج واقع) دکھائی گئی ہے۔دو خطوں کی سرحد $y=0$ سطح پر پایا جاتا ہے لہٰذا y محدد، سرحدِ ملاپ کے عمودی ہے۔پہلے خطے (خطہ-1) میں آمدی برقی موج کی حرکت کی سمت y محدد کے ساتھ θ_i **زاویہ آمد**[1] (زاویہ وقوع) بناتی ہے جبکہ اسی خطے میں **انعکاسی** برقی موج کی حرکت کی سمت y محدد کے ساتھ θ_r **زاویہ انعکاس**[2] بناتی ہے۔ترسیلی موج کی حرکت کی سمت دوسرے خطے (خطہ-2) میں منفی y محدد کے ساتھ θ_t زاویہ بناتی ہے۔ترسیلی موج کو یہاں **موج منعطف**[3] کہا جائے گا لہٰذا θ_t **زاویہ انعطاف**[4] کہلاتی ہے۔پہلے خطے کے طبعی مستقل $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ جبکہ دوسرے خطے کے طبعی مستقل $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ ہیں۔

---

incidence angle[1]
reflection angle[2]
refracted wave[3]
refraction angle[4]

شکل 12.1: ترچھی آمد کی صورت میں انعکاسی اور ترسیلی امواج اور ان کے زاویے۔ برقی میدان عمودی قطبیت رکھتی ہے۔

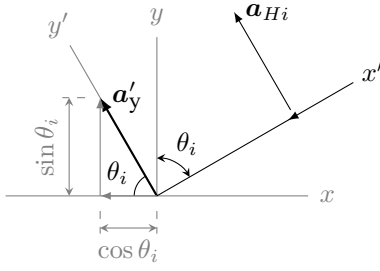
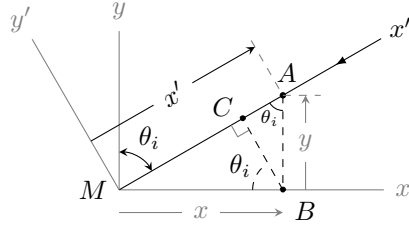
ہم دو صورتوں پر باری باری غور کریں گے۔ پہلی صورت میں خطی قطبی برقی میدان، سطح آمد (یعنی xy سطح) کے عمودی ہو گا جبکہ دوسری صورت میں خطی قطبی برقی میدان اس سطح کے متوازی ہو گا۔ان دو صورتوں میں برقناطیسی موج بالترتیب **عمودی قطب موج**[5] اور **متوازی قطب موج**[6] کہلائیں گی۔ شکل 12.1 عمودی قطبیت کی صورت حال دکھا رہی ہے۔ کسی بھی عمومی برقی موج کو عمودی اور متوازی قطب کی امواج کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ منفی z سمت میں حرکت کرتی $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ میدان کی برقی موج

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_{\text{X}} e^{j(\omega t + \beta_1 z)}$$

لکھی جاتی ہے۔اس موج میں برقی میدان ہر نقطے پر تمام اوقات $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ سمت میں ہو گا جبکہ حرکت کی سمت منفی z جانب ہے۔اب $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ اکائی سمتیہ کی جگہ کسی بھی عمومی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ سمت کا میدان جو z محدد کی بجائے لکیر l پر منفی سمت کی جانب حرکت کر رہا ہو، کی موج

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a} e^{j(\omega t + \beta_1 l)}$$

[5] perpendicular polarized
[6] parallel polarized

(ا) فاصلے کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

(ب) اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

شکل 12.2: کسی بھی سمت میں فاصلے اور اکائی سمتیہ کو کارتیسی محدد میں لکھنے کا طریقہ۔

لکھی جائے گی۔اب شکل 12.1 میں $\boldsymbol{E}_i$ پر دوبارہ غور کریں۔یہ میدان x' پر منفی سمت میں حرکت کر رہی ہے جبکہ برقی میدان $\boldsymbol{E}_i$ کی سمت $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہے لہٰذا اس موج کو

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_{\text{Z}} e^{j(\omega t + \beta_1 x')} \tag{12.1}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد x, y کے مبدا سے لکیر x' پر فاصلہ ناپا گیا ہے۔آئیں مساوات 12.1 میں لکیر x' پر فاصلے کو کارتیسی محدد x, y کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے ناپیں۔

شکل 12.2-الف میں آمد موج اور محدد xy دوبارہ دکھائے گئے ہیں۔اس شکل میں لکیر x' کو محدد $x'y'$ کا حصہ دکھایا گیا ہے۔ان دونوں محدد کا مبدا نقطہ M ہے۔لکیر x' پر نقطہ A کا مبدا سے فاصلہ MA کو x' لکھا گیا ہے۔ اب $MA = MC + CA$ کے برابر ہے جہاں $MC = x \sin\theta_i$ اور $CA = y\cos\theta_i$ کے برابر ہیں لہٰذا

$$x' = x\sin\theta_i + y\cos\theta_i \tag{12.2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ہم مساوات 12.1 کو

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_{\text{Z}} e^{j[\omega t + \beta_1 (x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)]} \tag{12.3}$$

لکھ سکتے ہیں۔اس مساوات میں موج گھٹتے x' کی طرف رواں ہے۔

آمدی موج کی بات کرتے ہوئے کارتیسی محدد $x'y'$ کا سہارا لیا جاتا ہے جس کی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}'_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{a}'_{\text{y}}$ کو شکل 12.1 میں لکیر x' کے قریب دکھایا گیا ہے۔اسی طرح انعکاسی موج پر غور کے دوران کارتیسی محدد $x''y''$ اور ترسیلی موج میں $x'''y'''$ کا سہارا لیا جاتا ہے۔ان کی اکائی سمتیات کو بالترتیب انعکاسی اور ترسیلی امواج کے قریب شکل 12.1 میں دکھایا گیا ہے۔ان تینوں محدد کے مبدا نقطہ M پر پائے جاتے ہیں۔

آمدی برقی اور مقناطیسی میدان x' کے عمودی ہیں۔ برقی میدان کی سمت $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ (یا $\boldsymbol{a}'_{\text{Z}}$) ہے جہاں $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور $\boldsymbol{a}'_{\text{Z}}$ دونوں ایک ہی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_i$ کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{Hi}$ محدد y' کی سمت میں ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{Hi} = \boldsymbol{a}'_y$ لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں $\boldsymbol{a}'_{\text{y}}$ کو کارتیسی محدد x, y کے متغیرات کی صورت میں شکل 12.2-ب کی مدد سے لکھیں۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}'_{\text{y}}$ کو دو سمتیوں کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ چونکہ اکائی سمتیہ کی لمبائی ایک کے برابر ہوتی ہے لہٰذا شکل میں تکون کے وتر کی لمبائی اکائی ہے۔ یوں تکون کا قاعدہ $\cos\theta_i$ اور اس کا عمود $\sin\theta_i$ کے برابر ہوں گے جس سے

$$\boldsymbol{a}'_{\text{y}} = -\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\text{X}} + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_{\text{y}} \tag{12.4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے آمدی مقناطیسی موج

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{E_0}{Z_1}\boldsymbol{a}'_{\text{y}} e^{j(\omega t+\beta_1 x')}$$

کو

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{E_0}{Z_1}(-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\text{X}} + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_{\text{y}})e^{j[\omega t+\beta_1(x\sin\theta_i+y\cos\theta_i)]} \tag{12.5}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 12.3 اور مساوات 12.5 کے مساوی دوری سمتی مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_{si} = \boldsymbol{a}_{\text{Z}} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+y\cos\theta_i)} \tag{12.6}$$

$$\boldsymbol{H}_{si} = (-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\text{X}} + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_{\text{y}})\frac{E_0}{Z_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+y\cos\theta_i)} \tag{12.7}$$

مساوات 10.83 شرح انعکاس جبکہ مساوات 10.85 شرح ترسیل کی تعریف بیان کرتے ہیں۔ عین سرحد پر عمودی ($\perp$) قطب کے میدان کے لئے ان مساوات کو

$$\begin{aligned}\Gamma_\perp &= \frac{E_r}{E_i}\\ \tau_\perp &= \frac{E_t}{E_i}\end{aligned} \tag{12.8}$$

لکھا جائے گا۔

(ا)انعکاسی موج کے فاصلے کی کارتیسی محدد میں اظہار۔

(ب)انعکاسی مقناطیسی موج کی اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

شکل 12.3: انعکاسی موج کے متغیرات کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

شکل 12.3-الف میں صرف انعکاسی موج دکھائی گئی ہے۔مبدا M سے موج کا فاصلہ x'' لیتے ہوئے برقی موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔شکل سے ظاہر ہے کہ $MA = MC + CA$ ہے جہاں $MC = -x\sin\theta_r$ اور $CA = y\cos\theta_r$ کے برابر ہیں لہٰذا

$$x'' = -x\sin\theta_r + y\cos\theta_r \tag{12.9}$$

لکھا جائے گا۔چونکہ منفی محدد پر x کی قیمت منفی ہو گی لہٰذا MC حاصل کرتے وقت منفی علامت کی ضرورت ہو گی۔یوں مثبت x'' سمت میں حرکت کرتی انعکاسی برقی موج

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{sr} &= \boldsymbol{a}_{\text{Z}}\Gamma_{\perp}E_0e^{-j\beta_1x''}\\ &= \boldsymbol{a}_{\text{Z}}\Gamma_{\perp}E_0e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r+y\cos\theta_r)}\end{aligned} \tag{12.10}$$

لکھی جائے گی جہاں میدان کی سمت $\boldsymbol{a}''_{\text{Z}}$ یعنی $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہے۔

انعکاسی مقناطیسی موج کی مساوات لکھنے کی خاطر مقناطیسی میدان کی اکائی سمتیہ درکار ہے۔شکل 12.3-ب میں انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_H$ دکھائی گئی ہے جو x محدد کے ساتھ θ_r زاویہ بناتی ہے۔اکائی سمتیہ کو محدد کے مبدا پر دو سمتیات کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$\boldsymbol{a}_{Hr} = \cos\theta_r\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \sin\theta_r\boldsymbol{a}_{\text{Y}} \tag{12.11}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا انعکاسی مقناطیسی موج

$$\boldsymbol{H}_{sr} = (\cos\theta_r\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \sin\theta_r\boldsymbol{a}_{\text{Y}})\Gamma_{\perp}\frac{E_0}{Z_1}e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r+y\cos\theta_r)} \tag{12.12}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_{Hr} = -\boldsymbol{a}_{\text{y}}''$ ہے۔

یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے ترسیلی امواج کی مساوات یوں لکھی جا سکتے ہیں

$$\boldsymbol{E}_{st} = \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2 (x \sin\theta_t + y\cos\theta_t)} \tag{12.13}$$

$$\boldsymbol{H}_{st} = (-\cos\theta_t \boldsymbol{a}_{\text{X}} + \sin\theta_t \boldsymbol{a}_{\text{y}}) \tau_{\perp} \frac{E_0}{Z_2} e^{j\beta_2 (x \sin\theta_t + y\cos\theta_t)} \tag{12.14}$$

جہاں ترسیلی امواج کارتیسی محدد کے مبدا سے بڑھتے فاصلے کی طرف رواں ہیں۔ یہاں غور کریں کہ دوسرے خطے میں امواج کی مساوات میں مستقل β_2 اور Z_2 استعمال کئے گئے ہیں۔

صفحہ 418 پر مساوات 9.45 برقی میدان کی سرحدی شرط پیش کرتی ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہوں گے۔ برقی میدان کی شرط مساوات 12.6، مساوات 12.10 اور مساوات 12.13 میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{a}_{\text{Z}} E_0 e^{j\beta_1 (x\sin\theta_i + 0\cos\theta_i)} + \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r + 0\cos\theta_r)} = \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2 (x\sin\theta_t + 0\cos\theta_t)}$$

یا

$$e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} + \Gamma_{\perp} e^{j\beta_1 x \sin\theta_r} = \tau_{\perp} e^{j\beta_2 x \sin\theta_t} \tag{12.15}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی x کے لئے درست ہے لٰہذا یہ $x = 0$ کے لئے بھی درست ہو گی۔ اس میں $x = 0$ پر کرنے سے

$$1 + \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp} \tag{12.16}$$

ملتا ہے۔ مساوات 12.15 میں x کی قیمت تبدیل کرنے سے e کے طاقت تبدیل ہوتے ہیں۔ یوں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے درست ہو گی جب مساوات میں تینوں e کی طاقت ہر صورت برابر ہوں یعنی

$$e^{j\beta_1 x \sin\theta_i} = e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = e^{j\beta_2 x \sin\theta_t} \tag{12.17}$$

اب پہلی دو اجزاء کے مساوات سے

$$\theta_i = \theta_r \tag{12.18}$$

اور آخری دو اجزاء کی مساوات سے

$$\beta_2 \sin\theta_t = \beta_1 \sin\theta_r \tag{12.19}$$

ملتا ہے جس میں مساوات 12.18 پر کرتے ہوئے

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}=\frac{\beta_1}{\beta_2} \qquad \text{قانون ابن سہل کی عمومی مساوات} \tag{12.20}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 454 پر دیے، بے ضیاع خطے کی مساوات 10.40 پر کرنے سے

$$\sin\theta_t=\frac{\omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}{\omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}}\sin\theta_i=\frac{\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2\epsilon_2}}\sin\theta_i \tag{12.21}$$

یعنی

$$\begin{aligned}\sin\theta_t&=\frac{\sqrt{\mu_{r1}\mu_0\epsilon_{r1}\epsilon_0}}{\sqrt{\mu_{r2}\mu_0\epsilon_{r2}\epsilon_0}}\sin\theta_i\\&=\frac{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}\sin\theta_i \qquad \text{قانون ابن سہل، بے ضیاع مقناطیسی خطے}\end{aligned} \tag{12.22}$$

حاصل ہوتا ہے۔

غیر مقناطیسی اور بے ضیاع خطے میں بصری امواج پر تبصرے کے دوران عموماً **انعطافی مستقل**[7] (انعطاف نما) n استعمال کیا جاتا ہے جہاں

$$\sqrt{\epsilon_R}=n$$

کے برابر ہے۔بے ضیاع، غیر مقناطیسی خطے میں مساوات 12.22 کو

$$\sin\theta_t=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \qquad \text{قانون ابن سہل، بے ضیاع غیر مقناطیسی خطے} \tag{12.23}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}n_1&=\sqrt{\epsilon_{r1}}\\n_2&=\sqrt{\epsilon_{r2}}\end{aligned} \tag{12.24}$$

غیر مقناطیسی خطوں کے انعطافی مستقل ہیں۔انعطافی مستقل کو استعمال کرتے ہوئے، بے ضیاع اور غیر مقناطیسی خطے میں

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\epsilon}=\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_R}=\frac{\omega n}{c} \tag{12.25}$$

$$Z=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_R}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=\frac{Z_0}{n} \tag{12.26}$$

---

[7] index of refraction

لکھے جا سکتے ہیں۔اسی طرح دوری رفتار اور خطے میں طول موج کو

$$v = \frac{c}{n} \tag{12.27}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \tag{12.28}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں λ_0 خلاء میں طول موج ہے۔

مساوات 12.18 کہتی ہے کہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہیں۔مساوات 12.23 جسے ابن سھل[8] کا قانون انعطاف کہتے ہیں زاویہ انعطاف اور زاویہ آمد کا تعلق بیان کرتا ہے۔یہ قانون مغربی دنیا میں قانون سنیل[9] سے جانا جاتا ہے۔بصریات[10] کے میدان میں قانون ابن سھل بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔ مساوات 12.22 بے ضیاع مقناطیسی خطے میں لاگو قانون ابن سھل دیتی ہے جبکہ مساوات 12.20 قانون ابن سھل کی عمومی مساوات ہے۔

لطیف واسطہ[11] مثلاً ہَوا سے کثیف واسطہ[12] مثلاً پانی میں داخل ہوتے ہوئے موج سطح ملاپ کے عمود کی جانب جھک جاتی ہے۔ سطح ملاپ سے مراد دونوں خطوں کی سرحد ہے۔ سطح ملاپ کے عمود کو شکل 12.1 میں نقطہ دار لکیر ظاہر کرتی ہے۔

مثال 12.1: خلاء سے $\theta_i = 30°$ زاویے پر شیشے میں عمودی تقطیب کی موج داخل ہوتی ہے۔پانی میں انعطافی موج کا زاویہ θ_t حاصل کریں۔اگر شیشے سے خلاء میں موج اسی زاویے سے داخل ہو تب θ_t کیا ہو گا۔شیشے کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 2.3$ لیں۔

حل: خلاء کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 1$ لیتے ہوئے، خلاء سے شیشے میں دخول پر

$$\sin\theta_t = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2.3}}\sin 30° = 0.32969$$

---

[8] بغداد کے ابو سعد العلاء ابن سھل نے اس قانون کو سن 984 میں دریافت کیا۔
[9] Snell's law
[10] optics
[11] light medium
[12] dense medium

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.32969 = 19.25^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ شیشے سے خلاء میں دخول پر

$$\sin\theta_t = \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{1}} \sin 30^\circ = 0.758288$$

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.758288 = 49.3^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔

صفحہ 419 پر مساوات 9.49 مقناطیسی میدان کی سرحدی شرط بیان کرتی ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی مقناطیسی میدان برابر ہوں گے۔شکل 12.1 میں آمدی، انعکاسی اور انعطافی مقناطیسی میدان a_{X} اور a_{y} اجزاء پر مشتمل ہیں۔ان میں صرف a_{X} اجزاء سرحد کے متوازی ہیں لہٰذا مساوات 12.7، مساوات 12.12 اور مساوات 12.14 کے a_{X} اجزاء میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے مقناطیسی سرحدی شرط سے

$$-\cos\theta_i \frac{E_0}{Z_1} e^{j\beta_1 x \sin\theta_i} + \cos\theta_r \Gamma_\perp \frac{E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r)} = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{E_0}{Z_2} e^{j\beta_2(x\sin\theta_t)}$$

یا

$$-\cos\theta_i e^{j\beta_1 x \sin\theta_i} + \cos\theta_r \Gamma_\perp e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{Z_1}{Z_2} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 12.18 اور مساوات 12.19 کے استعمال سے

$$-\cos\theta_i + \cos\theta_i \Gamma_\perp = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{Z_1}{Z_2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس میں مساوات 12.16 سے $\tau_\perp$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$\Gamma_\perp = \frac{Z_2\cos\theta_i - Z_1\cos\theta_t}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t} \tag{12.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 483 پر مساوات 10.83 موجودہ مساوات میں $\theta_i = 0^\circ$ پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب $Z_2 = 0$ ہو گا جس سے $\Gamma_\perp = -1$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر دونوں خطے غیر مقناطیسی ، بے ضیاع ذو برق ہوں تب مساوات 12.21 کی مدد سے

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}} \tag{12.30}$$

حاصل ہوتا ہے۔ خطہ-2 کا برقی مستقل خطہ-1 کے برقی مستقل سے زیادہ ہونے کی صورت $(\epsilon_2 > \epsilon_1)$ میں $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} > 1$ ہو گا جبکہ سائن کی زیادہ سے زیادہ ممکن قیمت اکائی ہے لہٰذا $\sin^2\theta_i \leq 1$ ہو گا اور یوں جزر کے اندر مقدار مثبت رہے گی جس سے $\Gamma_\perp$ حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔ اس کے برعکس $\epsilon_2 < \epsilon_1$ کی صورت میں اگر $\sin^2\theta_i > \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ ہو تب جزر کے اندر منفی مقدار ہو گی لہٰذا $\Gamma_\perp$ خیالی عدد ہو گا۔ ایسی صورت میں $|\Gamma_\perp| = 1$ ہوتا ہے اور سرحد پر **مکمل اندرونی انعکاس**[13] سے پوری کی پوری موج زیادہ برقی مستقل کے خطے میں سرحد سے واپس لوٹتی ہے۔ جس زاویہ آمد پر $\Gamma_\perp = 1$ ہو اسے **زاویہ فاصل**[14] پکارا جاتا ہے۔ یوں زاویہ فاصل

$$\theta_{i,\text{ف}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \tag{12.31}$$

کے برابر ہے۔ غیر مقناطیسی خطوں کا مقناطیسی مستقل μ_0 لیتے ہوئے، فاصل زاویے سے بڑے زاویے $(\theta_i > \theta_{i,\text{ف}})$ کی صورت میں مساوات 12.21 سے $\sin\theta_t > 1$ حاصل ہوتا ہے جس سے $\cos\theta_t$ خیالی عدد حاصل ہو گا

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i} = jA \tag{12.32}$$

جہاں $A = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1}$ حقیقی عدد ہے۔ یوں کم کثافت کے خطے میں مساوات 12.13 کی مدد سے میدان

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{st} &= \boldsymbol{a}_\text{z}\tau_\perp E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + yjA)} \\ &= \boldsymbol{a}_\text{z}\tau_\perp E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}\end{aligned}$$

یا

$$\boldsymbol{E}_{st} = \boldsymbol{a}_\text{z}\tau_\perp E_0 e^{-\alpha y} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{12.33}$$

---

[13] total internal reflection
[14] critical angle

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\alpha = \beta_2 A = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1} \tag{12.34}$$

کے برابر ہے۔یہ میدان کم کثافت خطے میں $x-$ جانب بے ضیاع حرکت کرتی ہے۔سرحد پر $E_\perp$ کی مقدار $\tau_\perp E_0$ ہے جو سرحد سے دور چلتے ہوئے $e^{-\alpha y}$ کی شرح سے گھٹتی ہے۔مساوات 12.33 کے طرز کی موج کو **سطحی موج**[15] کہتے ہیں۔ سطحی موج سرحد کے ساتھ چمٹی رہتی ہے۔

مثال 12.2: پانی سے ہوا کی جانب سرحد پر آمدی موج $\theta_i = 55°$ زاویہ رکھتی ہے۔ہوا میں انعطافی موج کی قیمت سرحد پر اور سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر حاصل کریں۔سرحد پر آمدی برقی میدان $E_i = 1\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔پانی کے مستقل $\epsilon_r = 80$، $\mu_r = 1$ اور $\sigma = 0$ لیں۔

حل: مساوات 12.31 سے فاصل زاویہ

$$\theta_{i,ف} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{80}} = 6.42°$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ آمدی زاویہ اس سے زیادہ ہے لہٰذا مکمل اندرونی انعکاس پائی جائے گی۔مساوات 12.21 سے

$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\mu_0 \times 80 \times \epsilon_0}{\mu_0 \times 1 \times \epsilon_0}}\sin 55° = 7.327$$

اور مساوات 12.32 سے

$$\cos\theta_t = jA = \sqrt{1 - 7.327^2} = j7.258$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\alpha = \beta_2 A = \frac{2\pi}{\lambda_0}7.258 = \frac{45.6}{\lambda_0}\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$$

---

[15] surface wave

ہو گا۔ مساوات 12.30 سے

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos 55^\circ - \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}}{\cos 55^\circ + \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}} = -0.33369 - j0.94268$$

اور مساوات 12.16 سے

$$\tau_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp} = 0.66631 - j0.94268 = 1.1544\underline{/-54.746^\circ}$$

- اس طرح ہوا میں سرحد پر $|E_t| = 1.1544 \times 1 = 1.1544 \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہو گا۔

- ہوا میں سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر

$$|E_t| = 1.1544 \times 1 \times e^{-\frac{45.6}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{4}} = 12.9 \, \frac{\mu\text{V}}{\text{m}}$$

ہو گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہوا میں میدان سرحد کے قریب رہتا ہے۔ سرحد سے کچھ ہی فاصلے پر میدان کی قیمت قابل نظر انداز ہو جاتی ہے۔ یاد رہے کہ $\sin \theta_t$ حقیقی عدد ہے جس کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے جبکہ $\cos \theta_t$ خیالی عدد ہے۔ مساوات 12.33 اور مساوات 12.14 سے ہوا میں برقی اور مقناطیسی امواج

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{st} &= \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \\
\boldsymbol{H}_{st} &= (-jA\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \sin \theta_t \boldsymbol{a}_{\text{y}}) \tau_{\perp} \frac{E_0}{Z_2} e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \\
&= (-jA\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \sin \theta_t \boldsymbol{a}_{\text{y}}) \tau_{\perp} \frac{E_0}{|Z_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{\left(j\beta_2 x \sin \theta_t - j\theta_Z\right)}
\end{aligned}$$

لکھی جائیں گی جہاں $Z = |Z| \, e^{j\theta_Z}$ کا استعمال کیا گیا۔ ہوا میں سرحد سے دور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ سمت میں اوسط طاقت کی منتقلی صفحہ 466 پر مساوات 10.56

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^* \right]_{\text{حقیقی}}$$

کی مدد حاصل کرتے ہیں۔مقناطیسی میدان کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جزو اس منتقلی میں کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہٰذا اس کا صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ جزو لیا جائے گا۔جوڑی دار مخلوط مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_s^*$ لکھتے ہوئے $\boldsymbol{H}_s$ میں تمام مقامات پر j کی علامت مثبت سے منفی اور منفی سے مثبت کر دی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^* &= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\tau_{\perp}E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin\theta_t}\right] \times \left[jA\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\tau_{\perp}\frac{E_0}{|Z_2|}e^{-\beta_2 A y} e^{\left(-j\beta_2 x \sin\theta_t + j\theta_Z\right)}\right]\\ &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|Z_2|}e^{-2\beta_2 A y}\left[j\cos\theta_Z - \sin\theta_Z\right]\end{aligned}$$

کا حقیقی جزو لیتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|Z_2|}e^{-2\beta_2 A y}\sin\theta_Z$$

حاصل ہوتا ہے۔ہوا میں Z حقیقی عدد ہے لہٰذا $\theta_Z = 0$ ہو گا اور چونکہ $\sin 0 = 0$ ہوتا ہے لہٰذا اوسط طاقت کی منتقلی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|Z_2|}e^{-2\beta_2 A y}\sin 0^\circ = 0$$

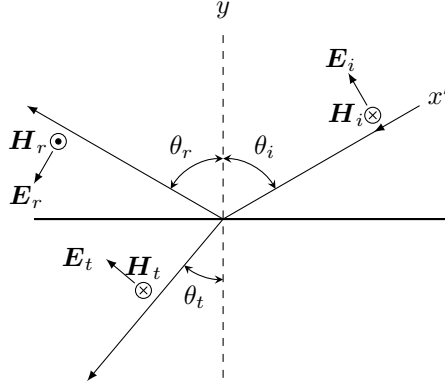
صفر ہو گی۔یوں کم کثافتی خطے میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں اوسطاً کوئی طاقت منتقل نہیں ہو گی اور برقی اور مقناطیسی امواج سرحد کے قریب ہی رہتی ہیں۔ایسی امواج کو **فنا پذیر امواج**[16] کہتے ہیں۔

کم کثافتی خطے یعنی ہوا میں مقناطیسی موج کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جزو اور برقی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اجزاء سرحد کے ساتھ ساتھ، بے ضیاع $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-$ سمت میں حرکت کریں گے۔ہوا میں ان امواج کی رفتار، زیادہ کثافتی خطے یعنی پانی میں، سرحد کے متوازی موج کی رفتار کے برابر ہو گی یعنی

$$\text{ہوا میں سرحد کے متوازی موج کی رفتار} = \frac{\text{پانی میں رفتار موج}}{\sin\theta_i}$$

سرحدی موج در حقیقت سرحدی شرائط پورا کرنے کی درکار برقی اور مقناطیسی میدان ہیں۔

---

[16] evanescent wave

شکل 12.4: متوازی قطبی موج میں برقی میدان سطح آمد کے متوازی ہوتا ہے۔

متوازی قطبی برقی موج $\boldsymbol{E}_{||}$

آئیں اب متوازی قطبی موج کی صورت حال دیکھیں۔ یاد رہے کہ موج کی سمت پوئنٹنگ سمتیہ $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ کی سمت ہی ہوتی ہے۔ برقی اور مقناطیسی میدان، موج کی حرکت کی سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ یوں سمت حرکت کے عمودی، برقی میدان کی سمت فرض کرتے ہوئے اور سمت حرکت جانتے ہوئے مقناطیسی میدان کی سمت کا تعین پوئنٹنگ سمتیہ سے کیا جاتا ہے۔ متوازی قطبی موج کی بات کرتے ہوئے، آمدی برقی میدان کی سمت یا تو شکل 12.4 میں $\boldsymbol{E}_i$ کی سمت اور یا اس کے الٹ سمت ممکن ہے۔ یہ واحد دو سمتیں ہیں جو موج کی حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی ہیں۔ اگر آمدی برقی میدان کی سمت شکل میں دکھائے سمت کے الٹ ہو تب آمدی مقناطیسی میدان کی سمت بھی الٹ ہو گی یعنی یہ صفحہ سے باہر جانب کو ہو گا۔ سمت حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی، انعکاسی موج $\boldsymbol{E}_r$ کی بھی دو سمتیں ممکن ہیں جن میں ایک سمت شکل میں فرض کی گئی ہے۔ برقی انعکاسی میدان کی سمت فرض کرنے سے انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت اب وہی ممکن ہے جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ آئیں اس شکل کو حل کریں۔

مساوات 12.2 اور مساوات 12.4 کی مدد سے شکل 12.4 کے لئے

$$\boldsymbol{E}_{si} = (-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\text{x}} + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_{\text{y}}) E_0 e^{j\beta_1 (x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)} \tag{12.35}$$

$$\boldsymbol{H}_{si} = -\boldsymbol{a}_{\text{z}} \frac{E_0}{Z_1} e^{j\beta_1 (x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)} \tag{12.36}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔اسی طرح گزشتہ معلومات کا سہارا لیتے ہوئے

$$\boldsymbol{E}_{sr} = -(\cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})\Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)} \tag{12.37}$$

$$\boldsymbol{H}_{sr} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\parallel}\frac{E_0}{Z_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)} \tag{12.38}$$

$$\boldsymbol{E}_{st} = (-\cos\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})\tau_{\parallel} E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + y\cos\theta_t)} \tag{12.39}$$

$$\boldsymbol{H}_{st} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\tau_{\parallel}\frac{E_0}{Z_2}e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + y\cos\theta_t)} \tag{12.40}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔سرحد $(y = 0)$ پر برقی شرط لاگو کرنے کی خاطر برقی میدان کا وہ حصہ استعمال کیا جائے گا جو سرحد کے متوازی ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جزو کو رد کیا جائے گا جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جزو کو استعمال کیا جائے گا لہٰذا

$$-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_i + 0\cos\theta_i)} - \cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - 0\cos\theta_r)} = -\cos\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\tau_{\parallel} E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + 0\cos\theta_t)}$$

یعنی

$$\cos\theta_i e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} + \cos\theta_r\Gamma_{\parallel}e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = \cos\theta_t\tau_{\parallel}e^{j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{12.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں x کی قیمت تبدیل کرنے سے e کی طاقت تبدیل ہوتی ہے۔ایسی صورت میں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت درست ہو گی جب مساوات میں تینوں e کی طاقت، x کی تمام قیمتوں کے لئے برابر ہوں یعنی

$$j\beta_1 x\sin\theta_i = j\beta_1 x\sin\theta_r = j\beta_2 x\sin\theta_t \tag{12.42}$$

ہو۔اس مساوات سے

$$\theta_i = \theta_r \tag{12.43}$$

اور

$$\sin\theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\theta_i \tag{12.44}$$

حاصل ہوتے ہیں جو عین عمودی قطبی موج کی مساوات ہیں۔مساوات 12.41 میں مساوات 12.42 پر کرنے سے

$$1 + \Gamma_{\parallel} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\tau_{\parallel} \tag{12.45}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر مقناطیسی شرط لاگو کرتے ہیں۔چونکہ مقناطیسی میدان سرحد کے متوازی ہے لہٰذا اس کا کوئی جزو رد نہیں کیا جائے گا۔اس طرح

$$-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\frac{E_0}{Z_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+0\cos\theta_i)}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\parallel}\frac{E_0}{Z_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_r-0\cos\theta_r)}\\=-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\tau_{\parallel}\frac{E_0}{Z_2}e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+0\cos\theta_t)}$$

یعنی

$$e^{j\beta_1x\sin\theta_i}-\Gamma_{\parallel}e^{j\beta_1x\sin\theta_r}=\tau_{\parallel}\frac{Z_1}{Z_2}e^{j\beta_2x\sin\theta_t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 12.42 پر کرنے سے

$$1-\Gamma_{\parallel}=\tau_{\parallel}\frac{Z_1}{Z_2} \tag{12.46}$$

ملتا ہے۔مساوات 12.45 اور مساوات 12.46 حل کرتے ہوئے

$$\Gamma_{\parallel}=\frac{Z_2\cos\theta_t-Z_1\cos\theta_i}{Z_1\cos\theta_i+Z_2\cos\theta_t} \tag{12.47}$$

ملتا ہے جو غیر مقناطیسی اور بے ضیاع خطوں میں

$$\Gamma_{\parallel}=\frac{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\cos\theta_i+\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}-\sin^2\theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\cos\theta_i+\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{12.48}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب $\Gamma_{\parallel}=-1$ حاصل ہوتا ہے جو متوقع جواب ہے۔

متوازی قطبی موج کی صورت میں ایسے آمدی زاویہ ممکن ہے جس پر $\Gamma_{\parallel}=0$ حاصل ہو لہٰذا ایسی صورت میں تمام کی تمام موج بغیر انعکاس کے دوسرے خطے میں داخل ہو جاتی ہے۔اس آمدی زاویے کو بریوسٹر زاویہ[17] کہتے[18] ہیں۔مساوات 12.48 کو صفر کے برابر پر کرنے سے زاویہ بریوسٹر

$$\theta_{i,\text{بریوسٹر}}=\sin^{-1}\sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{1+\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \tag{12.49}$$

[17] Brewster angle
[18] یہ زاویہ سکاٹ لینڈ کے داؤد بریوسٹر کے نام سے منسوب ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کی دوسری شکل

$$\theta_{i,\text{بریوسٹر}} = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}\right) \tag{12.50}$$

ہے۔

کسی بھی موج کو عمودی اور متوازی قطبی امواج کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر غیر قطبی موج، سرحد پر زاویہ بریوسٹر سے آمد ہو تب اس موج کا وہ جزو جو متوازی قطبیت رکھتا ہو سرحد سے مکمل طور دوسری جانب گزر جائے گا جبکہ سرحد سے انعکاسی جزو صرف اور صرف عمودی قطبیت کا ہو گا۔عمودی قطبی موج حاصل کرنے کا یہ آسان طریقہ ہے۔عمودی موج کا کچھ حصہ منعکس ہو گا اور کچھ حصہ منحرف لہٰذا انعطافی موج غیر قطبی ہو گی۔زاویہ بریوسٹر کو زاویہ قطبیت[19] بھی کہتے ہیں۔

مثال 12.3: ہوا سے شیشے میں برقی موج بریوسٹر زاویے سے داخل ہوتی ہے جہاں شیشے کا انعطافی مستقل $n = 1.45$ ہے۔انعطافی زاویہ حاصل کریں۔

حل:اس شیشے کا بریوسٹر زاویہ

$$\theta_{\text{بریوسٹر}} = \sin^{-1}\frac{1.45}{\sqrt{1+1.45^2}} = 55.4^\circ$$

ہے جسے ابن سھل کے قانون میں استعمال کرتے ہوئے انعطافی زاویہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\theta_t = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_{\text{بریوسٹر}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}\right) = 34.6^\circ$$

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ $\sin\theta_t = \cos\theta_{\text{بریوسٹر}}$ کے برابر ہے۔یہ ایک عمومی نتیجہ ہے

$$\theta_{\text{بریوسٹر}} + \theta_t = 90^\circ \tag{12.51}$$

[19] polarizing angle

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 12.4: متوازی قطبی موج ہوا سے پانی کی طرف آمد ہے۔زاویہ بریوسٹر حاصل کریں۔پانی کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 80$ لیں۔

حل:

$$\theta_{i,\text{بریوسٹر}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{80}{1}} = 83.6^\circ \tag{12.52}$$

مشق 12.1: شکل 12.4 میں انعکاسی میدانوں کی سمتیں الٹ تصور کرتے ہوئے شرح انعکاس $\Gamma_{\parallel}$ حاصل کریں۔چونکہ یہاں انعکاسی میدان الٹ تصور کئے جا رہے ہیں لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ $\Gamma_{\parallel}$ کی حاصل مساوات منفی ایک سے ضرب ہو گی۔

جواب: صرف انعکاسی امواج میں فرق ہو گا جنہیں یوں لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{sr} &= (\cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\text{X}} + \sin\theta_r \boldsymbol{a}_{\text{Y}})\Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)} \\
\boldsymbol{H}_{sr} &= -\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\Gamma_{\parallel}\frac{E_0}{Z_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)}
\end{aligned}$$

شرح انعکاس $\frac{Z_1\cos\theta_i - Z_2\cos\theta_t}{Z_1\cos\theta_i + Z_2\cos\theta_t}$ حاصل ہو گا۔

12.2 قطبی موج کی ترچھی آمد

شکل 12.5 میں قطبی موج کی ترچھی آمد دکھائی گئی ہے۔اس شکل میں آمدی، انعکاسی اور ترسیلی امواج کے لئے علیحدہ علیحدہ کارتیسی محدد استعمال کئے گئے ہیں۔ان تینوں محدد کے مبدا کو نقطہ M ظاہر کرتی ہے جبکہ تینوں امواج کو اپنے اپنے محدد کے x محدد پر حرکت کرتا تصور کیا گیا ہے۔یوں آمدی موج گھٹتی x' جانب حرکت کر رہی ہے جبکہ انعکاسی موج بڑھتے x'' جانب اور ترسیلی موج بڑھتے x''' جانب حرکت کر رہی ہے۔محدد z' ، z'' اور z''' ، صفحہ کتاب کے عمودی باہر جانب کو ہے۔یوں ان تینوں کو z سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔آمدی قطبی برقی موج کے عمودی جزو کا حیطہ $E_{i\perp}$ اور دوری زاویہ صفر ہے جبکہ متوازی جزو کا حیطہ $E_{i\parallel}$ اور دوری زاویہ δ_i ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{E}_i = (E_{i\perp}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + E_{i\parallel}e^{j\delta_i}\boldsymbol{a}'_{\mathrm{y}})e^{j(\omega t+\beta_1 x')} \tag{12.53}$$

لکھا جا سکتا ہے۔انعکاسی مستقل

$$\Gamma_\perp = |\Gamma_\perp|\, e^{j\phi_\perp} \tag{12.54}$$

$$\Gamma_\parallel = \left|\Gamma_\parallel\right| e^{j\phi_\parallel} \tag{12.55}$$

لیتے ہیں۔یوں انعکاسی موج کے اجزاء

$$E_{r\perp} = E_z = \Gamma_\perp E_{i\perp} = |\Gamma_\perp|\, E_{i\perp}e^{j\phi_\perp} \tag{12.56}$$

$$E_{r\parallel} = E_{y''} = \Gamma_\parallel E_{i\parallel}e^{j\delta} = \left|\Gamma_\parallel\right| E_\parallel e^{j(\phi_\parallel+\delta_i)} \tag{12.57}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔اسی طرح ترسیلی مستقل[20]

$$\tau_\perp = |\tau_\perp|\, e^{j\xi_\perp} \tag{12.58}$$

$$\tau_\parallel = \left|\tau_\parallel\right| e^{\xi_\parallel} \tag{12.59}$$

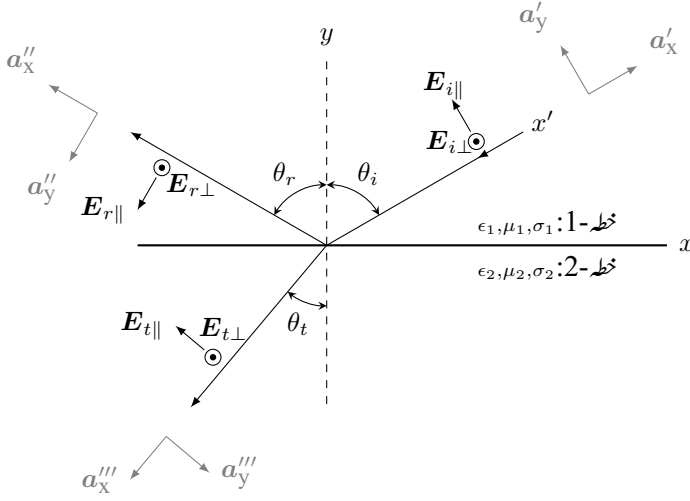
لیتے ہوئے ترسیلی موج کے اجزاء

$$E_{t\perp} = \tau_\perp E_{i\perp} = |\tau_\perp|\, E_{i\perp}e^{j\xi_\perp} \tag{12.60}$$

$$E_{t\parallel} = \tau_\parallel E_{i\parallel} = \left|\tau_\parallel\right| E_{i\parallel}e^{j(\xi_\parallel+\delta_i)} \tag{12.61}$$

ہوں گے۔

---

[20] ہم τ کی علامت موج کے جھکاو جبکہ $\tau_\perp$ اور $\tau_\parallel$ کو بطور ترسیلی مستقل استعمال کرتے ہیں۔

شکل 12.5: قطبی برقی موج سرحد پر ترچھی آمد۔

مثال 12.5: ہوا سے، دایاں دائری قطبی موج $45°$ کے زاویے سے کامل موصل سطح پر آمد ہے۔انعکاسی موج کی قطبیت دریافت کریں۔

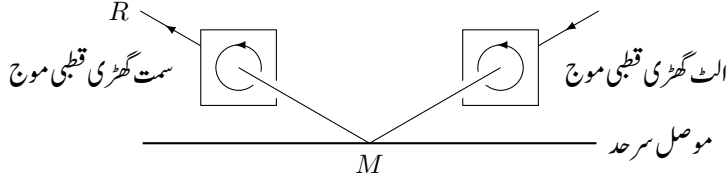
حل: موصل سطح پر ترچھی آمد دائری قطبی موج کے انعکاسی مستقل مساوات 12.29 اور مساوات 12.47 سے حاصل کئے جائیں گے۔کامل موصل کی موصلیت $\sigma \to \infty$ لیتے ہوئے موصل کی قدرتی رکاوٹ $Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = 0$ حاصل ہوتی ہے جسے ان مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$\Gamma_{\perp} = \Gamma_{\parallel} = -1$$

حاصل ہوتے ہیں۔صفحہ 517 پر مساوات 10.141 کی مدد سے منفی x' جانب حرکت کرتی، آمدی دائیں دائری قطبی موج

$$\boldsymbol{E}_i = E_0[\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \cos(\omega t + \beta x') + \boldsymbol{a}'_{\text{y}} \cos(\omega t + \beta x' - 90°)]$$

یعنی

$$\boldsymbol{E}_{si} = E_0(\boldsymbol{a}_{\text{Z}} + e^{-j\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{a}'_{\text{y}}) e^{j\beta_1 x'}$$

شکل 12.6: الٹ گھڑی قطبی آمدی موج موصل سطح سے انعکاس کے بعد سمت گھڑی قطبیت رکھتی ہے۔

لکھی جائے گی۔اس موج کو شکل 12.6 میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ M سے دیکھتے ہوئے یہ الٹ گھڑی گھومتی ہے لہٰذا آمدی موج دائیں قطبی ہے۔انعکاسی مستقل استعمال کرتے ہوئے انعکاسی اجزاء

$$
\begin{aligned}
E_{r\perp} &= -E_0 \\
E_{r\parallel} &= -E_0 e^{-j\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

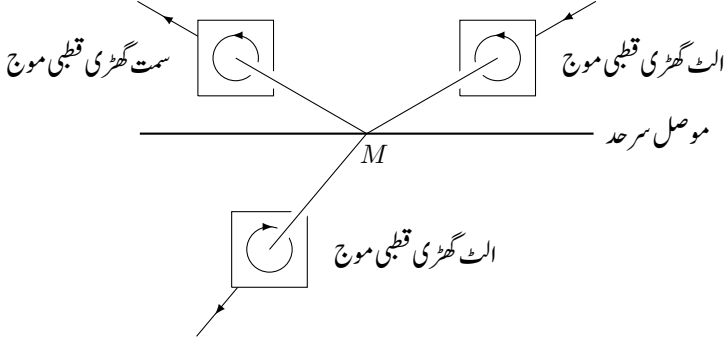
لکھے جا سکتے ہیں۔یوں مثبت x'' جانب حرکت کرتی، انعکاسی موج

$$
\boldsymbol{E}_{sr} = E_0(-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - e^{-j\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}'')e^{-j\beta_1 x''}
$$

یعنی

$$
\boldsymbol{E}_r = E_0[-\cos(\omega t - \beta x'')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - \sin(\omega t - \beta x'')\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}'']
$$

ہو گی. شکل 12.6 میں نقطہ R سے دیکھتے ہوئے انعکاسی موج گھڑی کی سمت میں گھومتی ہے لہٰذا یہ دائری بائیں قطبی ہے۔یوں موصل سطح پر دائیں قطبی موج انعکاس کے بعد بائیں قطبی ہو جاتی ہے۔اسی طرح موصل سطح پر بائیں قطبی موج انعکاس کے بعد دائیں قطبی ہو جاتی ہے۔

موصل سطح پر صفر برقی میدان پایا جاتا ہے۔شکل 12.6 میں سرحد پر آمدی برقی میدان کے الٹ انعکاسی میدان پیدا ہو کر سرحد پر کل صفر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔یوں سرحد پر آمدی اور انعکاسی میدان ایک ہی سمت میں گھومتے ہیں۔یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ آپ کو اس بات کی سمجھ آ گئی ہے۔شکل میں آمدی اور انعکاسی امواج کے گھومنے کی سمتیں گول دائروں سے دکھائی گئی ہے۔ان دائروں کو عین سرحد پر تصور کرتے ہوئے غور کریں۔آپ کو سرحد پر دونوں سمتیات ایک ہی سمت میں گھومتے نظر آئیں گے۔

شکل 12.7: سرحد پر آمدی، انعکاسی اور ترسیلی برقی سمتیات ایک ہی سمت میں گھومتے ہیں۔

سرحدی شرائط کے تحت کسی بھی سرحد پر متوازی برقی میدان ہموار پایا جاتا ہے۔اس اصول کو بروئے کار لاتے ہوئے آمدی برقی موج کو دیکھتے ہوئے انعکاسی اور ترسیلی امواج کے گھومنے کی سمت حاصل کی جا سکتی ہے۔ شکل 12.7 میں عمومی صورت حال دکھائی گئی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ آمدی، انعکاسی اور ترسیلی سمتیات سرحد پر ہم قدم ہو کر گھومیں۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ بائیں آمدی برقی موج، دائیں انعکاسی اور بائیں ترسیلی برقی امواج پیدا کرے گی جبکہ دائیں آمدی برقی موج، بائیں انعکاسی اور دائیں ترسیلی برقی امواج پیدا کرے گی۔

مثال 12.6: صفحہ 487 پر مثال 10.6 میں سمندری پانی $(\sigma = 5, \mu_R = 1, \epsilon_R = 78)$ پر عمودی آمدی برقی موج کی بات کی گئی۔اسی مثال کو آگے بڑھاتے ہیں۔تصور کریں کہ $50\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی آمدی بائیں دائری قطبی موج سطح سمندر کے عمود کے ساتھ $65°$ کا زاویہ بناتی ہے۔ الف) عمودی اور متوازی انعکاسی مستقل حاصل کریں۔ ب) عمودی اور متوازی ترسیلی مستقل حاصل کریں۔ پ) انعکاسی موج کی قطبیت دریافت کریں۔ ت) آمدی طاقت کا کتنا فی صد سطح پار کرتی ہے۔

حل: سمندری پانی کی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned}
Z_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} &= \sqrt{\frac{j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5 + j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 78 \times 8.85 \times 10^{-12}}} \\
&= 6.41 + j6.14 \quad \Omega
\end{aligned}$$

اور حرکی مستقل

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}\\ &= \sqrt{j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}(5 + j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 78 \times 8.85 \times 10^{-12})}\\ &= 30.7 + j32.1 \quad \text{m}^{-1}\\ &= \alpha_2 + j\beta_2\end{aligned}$$

ہیں۔ہوا میں طول موج $\lambda_1 = \frac{c}{f} = 6\,\text{m}$ ہے لہٰذا $\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.047197$ ہو گا۔ مساوات 12.20 ابن سھل کی عمومی مساوات ہے۔اسے استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\sin\theta_t &= \frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\theta_i\\ &= \frac{1.047197}{32.1}\sin 65^\circ\end{aligned}$$

سے

$$\theta_t = 1.69^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 12.29 اور مساوات 12.47 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\Gamma_\perp &= \frac{(6.41 + j6.14)\cos 65^\circ - 377\cos 1.69^\circ}{(6.41 + j6.14)\cos 65^\circ + 377\cos 1.69^\circ}\\ &= -0.9856 + j0.01359\\ &= 0.9857\underline{/179.2^\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_\parallel &= \frac{(6.41 + j6.14)\cos 1.69^\circ - 377\cos 65^\circ}{377\cos 65^\circ + (6.41 + j6.14)\cos 1.69^\circ}\\ &= -0.9199 + j0.0712\\ &= 0.9227\underline{/175.6^\circ}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں $\tau = 1 + \Gamma$ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\tau_\perp &= 0.0144 + j0.01359 = 0.01979\underline{/43.3^\circ}\\ \tau_\parallel &= 0.0801 + j0.0712 = 0.1071\underline{/41.6^\circ}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ عمودی اور متوازی انعکاسی مستقل برابر نہیں ہیں لہٰذا انعکاسی موج بیضوی قطبی ہو گی۔انعکاس کے بعد یہ دائیں قطبی ہو گی۔ترسیلی موج بائیں بیضوی قطبی ہو گی۔

آمدی موج دائری ہے لہٰذا اس میں آدھی طاقت عمودی قطبی اور آدھی متوازی قطبی ہو گی۔یوں کل انعکاسی طاقت، آمدی طاقت کا

$$\frac{\Gamma_{\perp}^2}{2} + \frac{\Gamma_{\parallel}^2}{2} = \frac{0.9857^2}{2} + \frac{0.9227^2}{2} = 0.9155$$

یعنی $91.55\,\%$ حصہ ہو گا۔بقایا $8.4\,\%$ طاقت ترسیل ہو گا۔

12.3 ترسیم ہائی گن

ہائی گن[21] کا اصول کہتا ہے کہ محاذ موج پر ہر نقطے کو منبع کروی موج تصور کیا جا سکتا ہے۔شکل 12.8 میں اس اصول کو دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی محاذ موج پر مختلف نقطوں سے پیدا ثانوی امواج دکھائی گئی ہیں۔یہ ثانوی امواج مل کر ثانوی محاذ موج پیدا کرتی ہیں۔ہائی گن کے اصول کی مدد سے شعاع کی راہ میں حائل چیز کے قریب شعاع کا مڑ جانا سمجھا جا سکتا ہے جو نا تو انعکاس اور نا ہی انعطاف کے زمرے میں آتا ہے۔

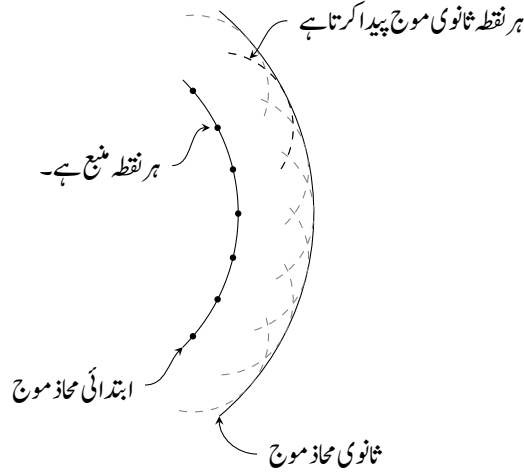
شعاع کی راہ میں حائل موصل سطح شکل میں دکھائی گئی ہے۔آئیں ہائی گن کے اصول سے نقطہ N پر برقی میدان

$$E = \int \mathrm{d}E \tag{12.62}$$

حاصل کریں جہاں موصل سطح کے کنارے سے آگے x محدد پر عمومی نقطے کو منبع موج تصور کرتے ہوئے N پر میدان $\mathrm{d}E$ کے برابر ہے۔

$$\mathrm{d}E = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta(r+\delta)}\,\mathrm{d}x \tag{12.63}$$

---

[21] Huygen's principle

شکل 12.8: ہائی گن کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔

سے

$$E = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta r} \int_a^\infty e^{-j\beta\delta} \, \mathrm{d}x \tag{12.64}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $r \gg \delta$ ہو تب

$$\delta = \frac{x^2}{2r} \tag{12.65}$$

کے برابر ہو گا۔ یوں $k^2 = \frac{2}{r\lambda}$ اور $u = kx$ لیتے ہوئے

$$E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \int_{ka}^\infty e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} \, \mathrm{d}u \tag{12.66}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے

$$E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \left(\int_0^\infty e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} \, \mathrm{d}u - \int_0^{ka} e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} \, \mathrm{d}u \right) \tag{12.67}$$

لکھ سکتے ہیں۔ مندرجہ بالا مساوات کا حل

$$E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \left[\frac{1}{2} + \frac{j}{2} - \left[C(ka) + jS(ka) \right] \right] \tag{12.68}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$C(ka)=\int_0^{ka}\cos\frac{\pi u^2}{2}\,\mathrm{d}u \tag{12.69}$$

$$S(ka)=\int_0^{ka}\sin\frac{\pi u^2}{2}\,\mathrm{d}u \tag{12.70}$$

کے برابر ہیں اور جنہیں اعدادی طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

12.4 انتشار

کسی بھی مادہ میں مثبت اور منفی بار قدرتی گمکی تعدد پر ارتعاش کرتے ہیں۔اس قدرتی گمکی تعدد یا اس کے قریب تعدد کے موج میں مادہ رکھنے سے ارتعاش زور پکڑتی ہے۔ارتعاش کے حیطے میں اضافے کے لئے درکار توانائی موج سے حاصل کی جاتی ہے۔یوں موج کی طاقت کم ہوتی ہے۔اس طرز کی قوت کے ضیاع کو مخلوط برقی مستقل

$$\epsilon=\epsilon'-j\epsilon''=\epsilon_0(\epsilon_R'-j\epsilon_R'') \tag{12.71}$$

کی مدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ موج کی تعدد اور مادے کی قدرتی گمکی تعدد جتنے قریب ہوں، موج اتنی ہی زیادہ طاقت کھوتی ہے۔اس کا مطلب یوں بھی لیا جا سکتا ہے کہ ϵ_R' اور ϵ_R'' کا دارومدار تعدد پر ہے۔

مقناطیسی موج سے مادے میں طاقت کے ضیاع کو مخلوط مقناطیسی مستقل $\mu=\mu'-j\mu''$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مقناطیسی اشیاء، مثلاً لوہا، میں ایسا طاقت کا ضیاع نہایت اہمیت رکھتا ہے۔حرکت کرتی موج کے عموماً مسائل میں مقناطیسی موج کی ضیاع قابل نظر انداز ہوتی ہے لہٰذا ایسی صورت میں $\mu\approx\mu_0$ ہی لیا جاتا ہے۔اس کتاب میں ایسا ہی کیا جائے گا۔

ایسا مادہ جس کے مستقل $\epsilon=\epsilon'-j\epsilon''$ اور $\mu=\mu_0$ ہوں کی قدرتی رکاوٹ صفحہ 447 پر مساوات 10.31 سے

$$Z=\sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{j\omega(\epsilon'-j\epsilon'')}}=\sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\omega\epsilon''+j\omega\epsilon'}} \tag{12.72}$$

لکھی جا سکتی ہے۔اس مساوات میں حقیقی جزو $\omega\epsilon''$ ہے جو طاقت کے ضیاع کی وجہ بنتا ہے لہٰذا

$$\omega\epsilon''=\sigma \tag{12.73}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں موصلیت طاقت کے ضیاع کا جزو ہے۔اسی طرح مساوات 10.12 کو یوں

$$\gamma = \mp\sqrt{j\omega\mu\left[j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')\right]} = \mp\sqrt{j\omega\mu\left(\omega\epsilon'' + j\omega\epsilon'\right)} \tag{12.74}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہاں بھی $\sigma = \omega\epsilon''$ لکھ کر ضیاعی جزو کی نشاندہی کی جا سکتی ہے۔

مثال 12.7: صفحہ 461 پر شکل 10.4 میں پانی کے طبعی مستقل دکھائے گئے ہیں۔اس شکل سے $1\,\frac{\text{Mrad}}{\text{s}}$ اور $126\,\frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ تعدد پر ϵ_R' اور ϵ_R'' حاصل کریں۔

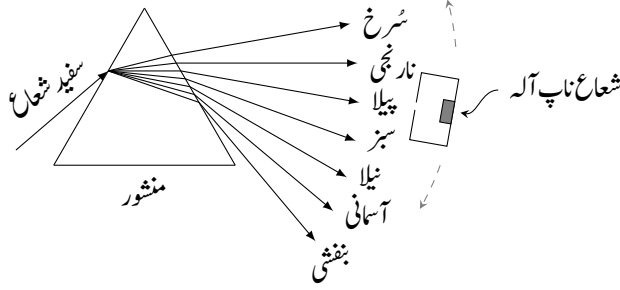
حل:دیے گئے شکل میں ϵ_R ہی ϵ_R' کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $\sigma = \omega\epsilon''$ کے برابر ہے۔یوں $1\,\frac{\text{Mrad}}{\text{s}}$ پر $\epsilon_R \approx 78$ اور $\sigma \approx 0$ سے $\epsilon_R' = 78$ اور $\epsilon_R'' = 0$ لکھے جا سکتے ہیں جبکہ $126\,\frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ پر $\epsilon_R \approx 41$ اور $\sigma \approx 36.7$ سے $\epsilon_R' = 41$ اور $\epsilon_R'' = 32.9$ لکھے جا سکتے ہیں۔

آئیں اب اصل موضوع کی بات کریں۔چونکہ برقی مستقل کا دارومدار موج کی تعدد پر ہے لہٰذا تعدد تبدیل کرنے سے برقی مستقل بھی تبدیل ہو گا۔برقی مستقل تبدیل کی تبدیلی سے انعطافی مستقل[22] بھی تبدیل ہوتا ہے۔مختلف تعدد کی امواج کو درپیش مختلف انعطافی مستقل ہی استعمال کرتے ہوئے شیشے کا **منشور**[23] سفید شعاع کے رنگ علیحدہ علیحدہ کرتا ہے۔شکل 12.9 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔رنگ علیحدہ کرنے کے عمل کو **زاویائی انتشار**[24] یا **رنگین انتشار**[25] کہتے ہیں۔

یہاں انتشار سے مراد، موج کے قابل شناخت حصوں کو علیحدہ کرنا ہے۔شعاع کے قابل شناخت اجزاء اس کے مختلف رنگ ہیں۔منشور شعاع کے رنگ علیحدہ علیحدہ کرتا ہے۔یہاں اہم نتیجہ یہ ہے کہ منشور نے شعاع کی طاقت کو تعدد کی نسبت سے مختلف حصوں میں بانٹ دیا ہے۔فرض کریں کہ ہم کسی شعاع میں سبز اور نیلے رنگ کی مقدار جاننا چاہتے ہیں۔شعاع کی طاقت ناپنے کا آلہ منشور کے سامنے سبز اور نیلی شعاع کے مقام پر رکھتے ہوئے ان کی طاقت ناپی جائے گی۔سفید شعاع کی طاقت بھی ناپی جائے گی۔جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے، آلہ ناپ تک شعاع ڈبے میں باریک

---

[22] refractive index
[23] prism
[24] angular dispersion
[25] chromatic dispersion

سُرخ
نارنجی
پیلا
سبز
نیلا
آسمانی
بنفشی
سفید شعاع
منشور
شعاع ناپ آلہ

شکل 12.9: شعاع کی انتشار سے منشور سفید شعاع کے رنگ بکھیرتا ہے۔

سوراخ کے ذریعہ پہنچتی ہے۔شعاع ناپ آلہ کے ان تمام حصوں کی طاقت ناپے گا جو سوراخ سے گزر پائیں۔یوں سوراخ جتنا چھوٹا ہو، آلہ ناپ تک پہنچتی شعاعی پٹی[26] میں تعددی فرق اتنی کم پائی جائے گی۔یوں سوراخ چھوٹے سے چھوٹا کرتے ہوئے کسی بھی تعدد کی طاقت بہتر سے بہتر ناپی جا سکتی ہے۔ہم شعاع کو تصوراتی طور پر شعاعی پٹیوں کا مجموعہ تصور کرتے ہیں۔

آئیں اب ایسی غیر مقناطیسی مادے کی بات کریں جس کا انعطافی مستقل تعدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ایسے خطے میں مستوی موج کا حرکی مستقل

$$\beta(\omega)=\omega\sqrt{\mu_0\epsilon\left(\omega\right)}=n(\omega)\frac{\omega}{c} \tag{12.75}$$

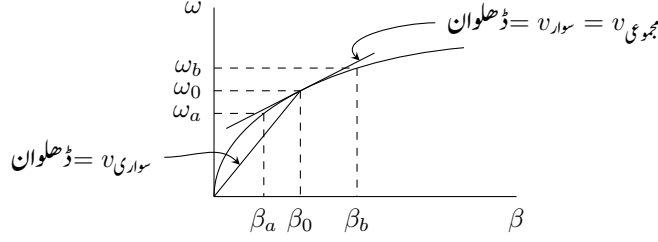
صورت اختیار کرے گا جہاں $\epsilon(\omega)$ اور $n(\omega)$ لکھ کر اس حقیقت کی نشاندہی کی گئی ہے کہ برقی مستقل اور انعطافی مستقل تعدد پر منحصر ہیں۔اگر تعدد بڑھانے سے انعطافی مستقل n بھی بڑھے تب $\beta(\omega)$ بالمقابل ω کی صورت شکل 12.10 کے طرز پر ہو گی۔

فرض کریں کہ شکل 12.10 ایسی خطے کو ظاہر کرتی ہے جس میں ω_a اور ω_b تعدد کی امواج پائی جاتی ہیں۔دونوں امواج x خطی قطبی ہیں اور بڑھتے z جانب حرکت کر رہی ہیں۔دونوں کا حیطہ برابر ہے۔اس شکل میں دونوں امواج کی اوسط تعدد ω_0 کی بھی نشاندہی کی گئی ہے۔ان کا مجموعی میدان

$$E_{\text{مجموعہ}}=E_0\left[e^{-j\beta_a z}e^{j\omega_a t}+e^{-j\beta_b z}e^{j\omega_b t}\right] \tag{12.76}$$

ہو گا جو علیحدہ علیحدہ میدانوں کا سادہ مجموعہ ہے۔یاد رہے کہ ان امواج کی تعدد مختلف ہے لہٰذا مجموعی دوری مساوات لکھتے ہوئے تعدد کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

---

[26] spectral packet

شکل 12.10: زاویائی مستقل بالمقابل تعدد۔

شکل 12.10 سے ظاہر ہے کہ $\omega_0-\omega_a=\omega_b-\omega_0$ ہے جبکہ $\beta_0-\beta_a\neq\beta_b-\beta_0$ ہے۔اگر ω_a اور ω_b قریب ہوں تب ω-β خط کے چھوٹے حصے کو یہاں کے مماس سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں $\beta_0-\beta_a\approx\beta_b-\beta_0$ لکھنا ممکن ہو گا۔یوں

$$\Delta\omega=\omega_0-\omega_a=\omega_b-\omega_0 \tag{12.77}$$

$$\Delta\beta\approx\beta_0-\beta_a\approx\beta_b-\beta_0 \tag{12.78}$$

لکھے جا سکتے ہی۔مندرجہ بالا دو مساوات استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.76 کو

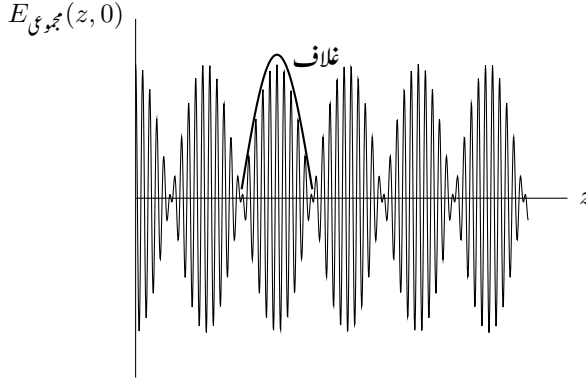
$$\begin{aligned} E_{\text{مجموعی}} &= E_0e^{-j\beta_0z}e^{j\omega_0t}\left[e^{j\Delta\beta z}e^{-j\Delta\omega t}+e^{-j\Delta\beta z}e^{j\Delta\omega t}\right] \\ &= 2E_0e^{j(\omega_0t-\beta_0z)}\cos(\Delta\omega t-\Delta\beta z) \end{aligned} \tag{12.79}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سے حقیقی موج کی مساوات

$$E_{\text{مجموعی}}(z,t)=2E_0\cos(\Delta\omega t-\Delta\beta z)\cos(\omega_0t-\beta_0z) \tag{12.80}$$

لکھی جا سکتی ہے جسے شکل 12.11 میں دکھایا گیا ہے۔یہ حیطہ سوار[27] اشارہ ہے جس میں تعددِ سواری[28] ω_0 ہے جبکہ تعدد سوار[29] $\Delta\omega$ ہے۔ تعددِ سواری کی قیمت تعددِ سوار کے قیمت سے بہت زیادہ ہے۔شکل میں موج پر غلاف[30] بچھایا دکھایا گیا ہے۔غلاف کی تعدد سوار اشارے کی تعدد ہے جبکہ غلاف سے نیچے تیزی سے ارتعاشی موج کی تعدد سواری کی تعدد ہے۔

ہمیں سواری موج کی دوری رفتار $v_{\text{سواری}}$ اور سوار موج کی مجموعی رفتار $v_{\text{مجموعی}}$ درکار ہیں جنہیں مساوات 12.80

[27] amplitude modulated signal, AM signal
[28] carrier frequency
[29] modulating frequency
[30] envelope

شکل 12.11: لمحہ $t = 0$ پر کل مقناطیسی میدان بالمقابل فاصلہ۔

سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_{\text{سواری}} = \frac{\omega_0}{\beta_0} \tag{12.81}$$

$$v_{\text{مجموعی}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \tag{12.82}$$

شکل 12.11 میں ان رفتاروں کی نشاندہی کی گئی ہے جہاں سے واضح ہے کہ کسی بھی اوسط تعدد ω_0 پر ω-β خط کا مماس مجموعی رفتار دیتی ہے یعنی

$$v_{\text{مجموعی}} = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \left. \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta} \right|_{\omega_0} \tag{12.83}$$

مجموعی رفتار کا دارومدار اوسط تعدد ω_0 پر مادے کی خاصیت پر ہے۔ مجموعی رفتار سے مراد ω_0 کے قریب شعاعی پٹی کی مجموعی رفتار ہے جس میں ω_0 کے قریب نہایت کم تعددی پٹی[31] کے تمام تعدد شامل ہیں۔ یوں دو عدد امواج کی مثال سے اخذ معلومات مسلسل تعددی پٹی کے امواج کی لئے بھی درست ہے۔

کسی مخصوص تعدد ω_0 پر موجود تعددی پٹی کی تمام امواج یہاں کی مجموعی رفتار سے حرکت کریں گی۔ یوں یہ مخصوص شعاعی پٹی $v_{\text{مجموعی}}$ سے توانائی منتقل کرے گی۔ چونکہ ω-β خط کے مماس کی ڈھلوان تعدد کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے لہٰذا مجموعی رفتار بھی تعدد کے ساتھ تبدیل ہو گی۔ یوں مختلف شعاعی پٹی کی رفتار مختلف ہو گی۔ یہی

---

[31] frequency band

انتشار[32] کی وجہ ہے۔ مجموعی رفتار کی انتشار[33] سے مراد تعدد کے ساتھ مجموعی رفتار کی تبدیلی کی شرح ہے۔ کسی بھی مادے میں اشارے کی ترسیل اور اس کی شکل میں تبدیلی کا دارومدار مجموعی رفتار کے انتشار پر ہے۔ ترسیل کے دوران عددی اشارے[34] کی شکل انتشار کی وجہ سے بگڑتی ہے۔ اس بگاڑ کو قابو رکھنا ضروری ہے ورنہ صحیح اشارے کی وصولی ناممکن ہو گی۔

آئیں دیکھتے ہیں کہ انتشار کا عددی اشارات پر کیا اثر ہوتا ہے۔ عددی اشارات کو کم دورانیے کے مستطیل امواج سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں مستطیل موج کی موجودگی کو عددی ایک (1) اور مستطیل موج کی عدم موجودگی کو عددی صفر (0) تصور کیا جاتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ انتشاری مادے میں حرکت کے دوران مستطیل موج کی چوڑائی وقت کی نسبت سے بڑھتی ہے۔ مستطیل اشارے کی چوڑائی بڑھنے کے عمل پر غور کرنے کی خاطر موج کا فوریئر بدل استعمال کیا جائے گا۔ کسی بھی اشارے کا فوریئر بدل، اشارے میں موجود تمام تعدد کا مجموعہ دیتا ہے۔ مستطیل اشارے کی بجائے ہم گاوسی[35] اشارہ

$$E(0,t)=E_0e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^2}e^{j\omega_0 t} \tag{12.84}$$

کو مثال بناتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یہ مساوات $z=0$ پر ایسی برقی میدان دیتی ہے جس کی تعددِ سواری ω_0 اور اشارے کی $\frac{1}{e}$ نصف چوڑائی[36] T ہے جہاں $\frac{1}{e}$ نصف چوڑائی $\Delta\omega$ کو اس نقطے تک ناپا جاتا ہے جس پر اشارے کی طاقت بلند تر قیمت کے e^{-1} گنا ہو۔

مساوات 12.84 کا فوریئر بدل مندرجہ ذیل ہے جسے شکل 12.12 میں دکھایا گیا ہے۔

$$E(0,\omega)=\frac{E_0T}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}T^2(\omega-\omega_0)^2} \tag{12.85}$$

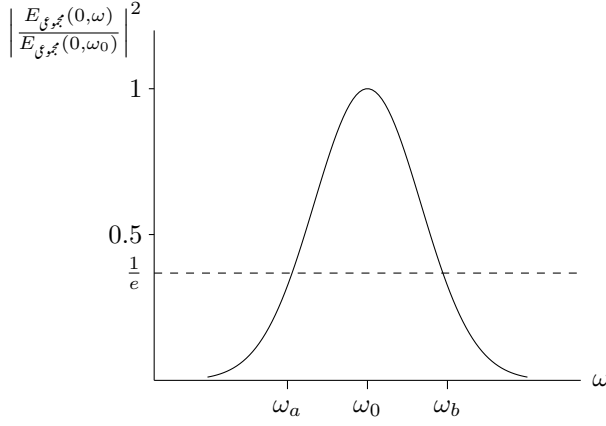
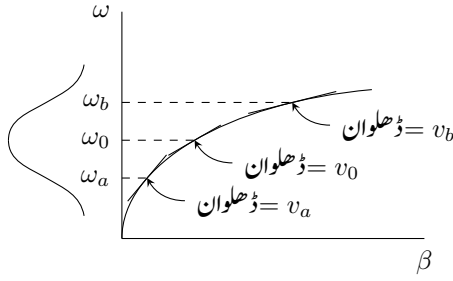
مساوات 12.85 میں موج کی طاقت بلند تر قیمت کے e^{-1} گنا

$$\Delta\omega=\omega-\omega_0=\frac{1}{T} \tag{12.86}$$

پر ہو گی یوں $\frac{1}{e}$ نصف طاقت چوڑائی یہی ہے۔ جیسے شکل 12.12 میں دکھایا گیا ہے، ω_a اور ω_b تعدد پر طاقت بلند تر قیمت کے e^{-1} گنا ہے۔ یوں $\frac{1}{e}$ نصف چوڑائی

$$\Delta\omega=\omega_b-\omega_0=\omega_0-\omega_a \tag{12.87}$$

---

[32] dispersion
[33] group velocity dispersion
[34] digital signal
[35] Gaussian signal
[36] half-width

شکل 12.12: گاوسی اشارے کا فوریئر بدل۔

شکل 12.13: گاوسی اشارے کا فوریئر بدل ترسیلی مادے کے ω-β خط پر دکھایا گیا ہے۔

لکھی جا سکتی ہے۔یاد رہے کہ موج کی طاقت برقی میدان کے مربع کے راست تناسب ہوتی ہے۔ شکل 12.13 میں ترسیلی خطے کے ω-β خط پر گاوسی اشارے کے فوریئر بدل کو کھینچا گیا ہے۔ شکل 12.12 پر دکھائے ω_a ، ω_0 اور ω_b تعدد کے مجموعی رفتار v_a ، v_0 اور v_b کو شکل 12.13 سے حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ گاوسی اشارے کے مختلف حصے مختلف رفتار سے حرکت کریں گے۔یوں اس کی چوڑائی بڑھے گی۔اشارے کی بیشتر توانائی ω_0 تعدد پر پائی جاتی ہے لہٰذا اس تعدد کی نسبت سے اشارے کی چوڑائی بڑھنے پر بات آگے بڑھاتے ہیں۔آئیں دیکھتے ہیں کہ ω_0 اور ω_b تعدد کے حصے z فاصلہ طے کرتے ہوئے ایک دونوں سے

وقت کے لحاظ سے کتنے دور ہو جاتے ہیں۔ان حصوں کے رفتار v_0 اور v_b لیتے ہوئے لمحاتی فرق

$$\Delta\tau = z\left(\frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_0}\right) = z\left(\left.\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_b} - \left.\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}\right) \tag{12.88}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ انتشاری خطہ بطور **وقتی منشور**[37] کردار ادا کرتی ہے۔عام منشور شعاع کے مختلف حصوں کو خلاء میں علیحدہ علیحدہ کرتی ہے جبکہ وقتی منشور شعاع کے حصوں کو وقت کے لحاظ سے علیحدہ علیحدہ کرتی ہے۔یوں z فاصلہ طے کرنے کے بعد اشارے کی شکل مختلف تعددی حصوں کے $\Delta\tau$ پر منحصر ہو گا۔یوں حاصل کردہ اشارے کی $\frac{1}{e}$ نصف چوڑائی کی جا سکتی ہے۔یہاں اصل اشارے کی چوڑائی کو نظر انداز کیا جا رہا ہے۔ہم اصل اشارے کی چوڑائی کو مد نظر رکھتے ہوئے جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔

مساوات 12.88 کی قیمت اس صورت زیادہ آسانی سے حاصل کی جا سکتی ہے جب ہمیں ω-β خط کی مساوات معلوم ہو۔کسی بھی مسلسل تفاعل کو ٹیلر[38] تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں ω-β خط کی ٹیلر تسلسل ω_0 پر لکھتے ہیں

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega-\omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\beta_2 + \cdots \tag{12.89}$$

جہاں

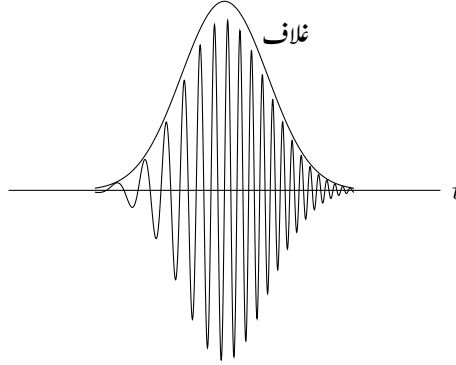
$$\beta_0 = \beta(\omega_0) \tag{12.90}$$

$$\beta_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} \tag{12.91}$$

$$\beta_2 = \left.\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\omega_0} \tag{12.92}$$

کے برابر ہیں۔مساوات 12.89 کے پہلے دو جزو سیدھی لکیر کو ظاہر کرتے ہیں۔تسلسل کا تیسرا جزو ω-β کو ٹیڑھا بناتا ہے اور یہی جزو انتشار کا سبب بنتا ہے۔ مساوات 12.89 میں β_0 ، β_1 اور β_2 مستقل قیمتیں ہیں لہٰذا اس کی تفرق مندرجہ ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega} = \beta_1 + (\omega-\omega_0)\beta_2 \tag{12.93}$$

[37] temporal prism
[38] Taylor series

شکل 12.14: چھچھاہٹ میں گاوسی غلاف کے نیچے بڑھتی تعدد دکھائی گئی ہے۔

مساوات 12.93 کو مساوات 12.88 میں پر کرتے ہوئے

$$\Delta\tau = z[\beta_1 + (\omega_b - \omega_0)\beta_2] - z[\beta_1 + (\omega_0 - \omega_0)\beta_2] = \Delta\omega\beta_2 z = \frac{\beta_2 z}{T} \tag{12.94}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 12.86 کا سہارا لیا گیا ہے۔مساوات 12.92 **انتشاری مستقل**[39] β_2 کی تعریف بیان کرتی ہے۔ انتشاری مستقل کو مربع وقت فی اکائی فاصلہ میں ناپا جاتا ہے۔اس کی عمومی اکائی مربع پیکو سیکنڈ فی کلو میٹر $\frac{\mathrm{ps}^2}{\mathrm{km}}$ ہے۔

اگر ابتدائی اشارے کی چوڑائی $\Delta\tau$ کی نسبت سے نہایت کم ہو تب ابتدائی چوڑائی کو نظرانداز کرتے ہوئے اختتامی چوڑائی کو $\Delta\tau$ لیا جاتا ہے۔اگر ایسا نہ ہو تب اختتامی اشارے کی چوڑائی

$$T' = \sqrt{T^2 + (\Delta\tau)^2} \tag{12.95}$$

لی جاتی ہے۔

انتشار سے اشارے کی چوڑائی بڑھنے سے اشارے میں **چھچھاہٹ**[40][41] پیدا ہوتی ہے جسے شکل 12.14 میں دکھایا گیا ہے۔چھچھاہٹ میں تعدد وقت کے ساتھ یا تو بتدریج بڑھتی ہے اور یا بتدریج گھٹتی ہے۔یہ اشارے کی چوڑائی بڑھنے کا ہی نتیجہ ہے۔چونکہ اشارے میں پائے جانے والے تعددی اجزاء مختلف رفتار سے حرکت کرتے ہیں لہٰذا اختتام پر

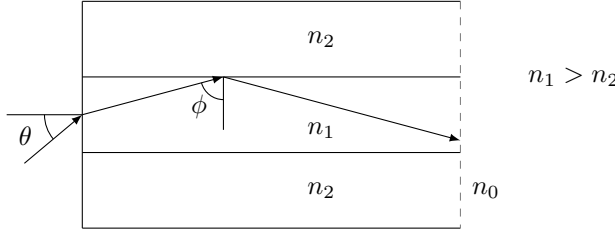
[39] dispersion parameter
[40] chirp
[41]

ان اجزاء میں فاصلے یوں تبدیل ہوتے ہیں کہ یہ چھچھاہٹ پیدا کرتے ہیں۔اس اثر کو مساوات 12.93 کی مدد سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے جس سے **مجموعی تاخیر**[42] $\tau_{\text{مجموعی}}$ بالمقابل تعدد یوں

$$\tau_{\text{مجموعی}} = \frac{z}{v_{\text{مجموعی}}} = z\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega} = [\beta_1 + (\omega - \omega_0)\beta_2]z \tag{12.96}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس مساوات کے تحت مثبت β_2 کی صورت میں زیادہ تعددی اجزاء، اختتامی مقام تک زیادہ تاخیر سے پہنچتے ہیں اور ان کی تاخیر تعدد کے راست تناسب ہے۔مثبت β_2 کی صورت جہاں کم تعددی اجزاء پہلے پہنچتے ہیں کو مثبت چھچھاہٹ کہا جاتا ہے جبکہ ایسی صورت جب زیادہ تعددی اجزاء اختتامی مقام تک پہلے پہنچیں، منفی چھچھاہٹ کہلاتی ہے۔

---

[42] group delay

شکل 12.15: شیش ریشہ۔

سوالات

سوال 12.1: دائیں دائری قطبی موج نیم لامحدود پلیکسی گلاس $(\sigma = 0, \mu_R = 1, \epsilon_R = 3.45)$ کی سطح پر بریوسٹر زاویے سے آمد ہے۔ آمدی کثافت طاقت $100\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ہے۔ الف) پلیکسی گلاس کا بریوسٹر زاویہ حاصل کریں۔ ب) $\Gamma_\parallel$ اور $\Gamma_\perp$ حاصل کریں۔ پ) انعکاسی اور ترسیلی کثافت طاقت دریافت کریں۔ ت) انعکاسی اور ترسیلی امواج کی قطبیت بیان کریں۔ (آمدی دائری قطبی موج میں آدھی طاقت عمودی برقی اور آدھی طاقت متوازی برقی ہو گی۔)

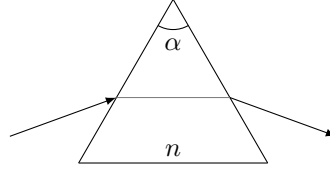
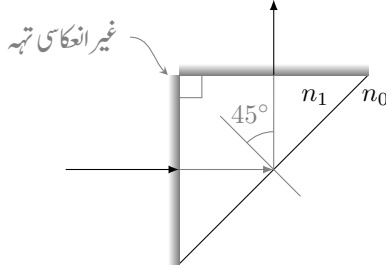
جوابات: 61.7° ، $\Gamma_\parallel = 0$ ، $\Gamma_\perp = -0.549$ ، $15\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $85\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، انعکاسی موج خطی قطبی جبکہ ترسیلی موج بیضوی قطبی ہے۔

سوال 12.2: شکل 12.15 میں شیش ریشہ دکھایا گیا ہے۔ اس شیش ریشے میں بائیں جانب سے شعاع θ زاویے سے داخل ہوتی ہے۔ یہ شعاع غلاف سے مکمل اندرونی انعکاس کرتے ہوئے شیش ریشے کے دوسرے سر تک پہنچتی ہے۔ بیرونی خلاء کا انعطافی مستقل $n_0 = 1$ لیتے ہوئے θ کی وہ حد دریافت کریں جس کے اندر رہتے ہوئے شیش ریشے میں مکمل اندرونی انعکاس پائی جائے گی۔ $\sin\theta$ کو شیش ریشے کی اعدادی شگاف[43] کہتے ہیں۔

جواب: $\theta_{\text{بلند تر}} = \sin^{-1}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

سوال 12.3: شکل 12.15 میں θ بریوسٹر زاویہ اور ϕ زاویہ فاصل ہونے کی صورت میں n_0 کو n_1 اور n_2 کی صورت میں بیان کریں۔

جواب: $n_0 = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

[43] numerical aperture

شکل 12.16: منشور

شکل 12.17: منشور سے شعاع کی سمت تبدیل کی جا سکتی ہے

سوال 12.4: ایسا منشور جو متوازی برقی موج کو بغیر گھٹائے گزرنے دے **بریوسٹر منشور**[44] کہلاتا ہے۔ شکل 12.16 میں دکھائے منشور کو $n = 1.45$ کے شیشے سے بنایا گیا ہے۔اس شکل میں دکھائی گئی صورت حال کو دیکھتے ہوئے زاویہ α حاصل کریں۔ (داخلی اور خارجی شعاع شیشے کے عمود کے ساتھ بریوسٹر زاویہ بناتے ہیں۔اس سے انعکاسی ضیاع کا خاتمہ حاصل کیا جاتا ہے۔)

جواب: یہاں منشور کے اندر شعاع، منشور کے قاعدے کے متوازی ہے۔ $\alpha = 69.2°$

سوال 12.5: شکل 12.16 میں دکھائے گئے بریوسٹر منشور میں عمودی برقی موج کا کتنا فی صد گزر پائے گا۔

جواب: $76\,\%$

سوال 12.6: شکل 12.17 میں شعاع کی سمت $90°$ تبدیل کرنے کی خاطر منشور استعمال کیا گیا ہے۔انعکاسی ضیاع سے چھٹکارے کی خاطر منشور کے بائیں اور بالائی سطحوں پر انعکاس مخلاف تہہ چڑھائی گئی ہے۔منشور کو خلاء میں استعمال کرنے کی خاطر n_1 کی کم سے کم قیمت دریافت کریں۔

جواب: $n_1 > 1.41$

---

[44] Brewster prism

سوال 12.7: دائری قطبی برقی موج دو عدد خطی قطبی امواج کے مجموعے سے بنی ہوئی ہے۔ خطی قطبی امواج $E_x = 5\cos(\omega t - \beta z)$ اور $E_y = 5\cos(\omega t - \beta z - 90^\circ)$ ہیں۔ یہ دائری قطبی موج خطہ-1 $(\mu_{R1} = 1, \epsilon_{R1} = 1)$ سے خطہ-2 $(\mu_{R2} = 1, \epsilon_{R2} = 3.5)$ کے سرحد پر 45° زاویے سے پہنچتی ہے۔ زاویہ سرحد کے عمود کے ساتھ ناپا جاتا ہے۔ انعکاسی موج کی شرح رداس حاصل کریں۔

جواب: 2.38

سوال 12.8: دائری قطبی برقی موج خطہ-1 $(\mu_{R1} = 1, \epsilon_{R1} = 1)$ سے خطہ-2 $(\mu_{R2} = 1, \epsilon_{R2} = 4)$ کے سرحد پر θ زاویے سے پہنچتی ہے۔ زاویہ سرحد کے عمود کے ساتھ ناپا جاتا ہے۔ انعکاسی موج کی شرح رداس مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔ الف) $\theta = 30^\circ$ ، ب) $\theta = 60^\circ$ ، پ) $\theta = 63.43^\circ$

جواب: 1.35 ، 10.9 ، 7409

سوال 12.9: دائیں بیضوی قطبی برقی موج از خود عمودی قطبی موج $E_x = 8\cos(\omega t - \beta z)$ اور متوازی قطبی موج $E_y = 6\cos(\omega t - \beta z - 90^\circ)$ کا مجموعہ ہے۔ یہ دائیں بیضوی قطبی موج خطہ-1 $(\mu_{R1} = 1, \epsilon_{R1} = 1)$ سے خطہ-2 $(\mu_{R2} = 1, \epsilon_{R2} = 3)$ کے سرحد $z = 0$ پر 30° زاویے سے پہنچتی ہے۔ زاویہ سرحد کے عمود کے ساتھ ناپا گیا ہے۔ انعکاسی موج کی شرح رداس حاصل کریں۔

جواب: 2.68

سوال 12.10: دائیں بیضوی قطبی برقی موج از خود عمودی قطبی موج E_x متوازی قطبی موج E_y

$$
\begin{aligned}
E_x &= 8\cos(\omega t - \beta z)\\
E_y &= 6\cos(\omega t - \beta z - 90^\circ)
\end{aligned}
$$

کا مجموعہ ہے۔ یہ دائیں بیضوی قطبی موج خطہ-1 $(\mu_{R1} = 1, \epsilon_{R1} = 1)$ سے خطہ-2 $(\mu_{R2} = 1, \epsilon_{R2} = 3)$ کے سرحد $z = 0$ پر 60° زاویے سے پہنچتی ہے۔ زاویہ سرحد کے عمود کے ساتھ ناپا گیا ہے۔ انعکاسی موج کی شرح رداس حاصل کریں۔ اس کی قطبیت بھی دریافت کریں۔

جواب: شرح رداس لامحدود ہے۔ موج عمودی قطبی ہے۔

باب 13

موج اور گمکیا

اب تک ہم صرف عرضی برقناطیسی[1] TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں جن میں برقی میدان اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔اس باب میں ترسیلی تار پر بحث کو آگے بڑھاتے ہوئے ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں برقی یا مقناطیسی میدان سمت حرکت کی جانب بھی جزو رکھتے ہوں۔وہ ترسیلی تار جو صرف اس طرح کے امواج کو گزار سکیں موج[2] کہلاتے ہیں۔

تقریباً 1 GHz تعدد کے لگ بھگ ترسیلی تار میں طاقت کا ضیاع، جلد کی موٹائی کی وجہ سے قابل نظر انداز نہیں رہتا لہٰذا ان تعدد پر طاقت کی ترسیل کھوکھلے موج کی مدد سے کی جاتی ہے جن میں طاقت کا ضیاع نسبتاً کم ہوتا ہے۔

دو لامحدود جسامت کے مستوی سطحوں کے موج سے بات شروع کرتے ہوئے کھوکھلے مستطیلی اور نلکی موج تک بات بڑھائی جائے گی۔ان موج میں میدان کے اشکال، ان کے منقطع طول موج اور تضعیفی مستقل حاصل کئے جائیں گے۔اس کے بعد ایک تار پر بیرونی موج اور دیگر اقسام کے موج پر غور کیا جائے گا۔آخر میں موصل کے بند ڈبوں میں مقید امواج پر غور کیا جائے گا۔ان ڈبوں کو گمکیا کہتے ہیں۔

---

[1] transverse electromagnetic, TEM

[2] waveguide

13.1 برقی دور، ترسیلی تار اور موج کا موازنہ

کم تعدد پر برقی دباو، برقی رو، مزاحمت وغیرہ وہ متغیرات ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے برقی ادوار حل کئے جاتے ہیں۔ان تعدد پر تمام مزاحمت یا رکاوٹ کو نقطہ نما تصور کیا جاتا ہے۔یوں تار کے ایک سرے پر منبع برقی دباو لاگو کرتے ہوئے تار کے دوسرے سرے پر مزاحمت میں برقی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔

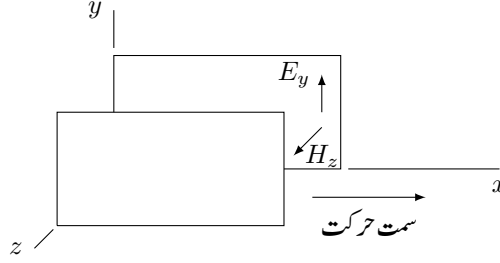
قدر زیادہ تعدد پر انہیں حقائق کو ترسیلی تار پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرتے وقت ترسیلی تار کی مزاحمت یا امالہ تار کی لمبائی پر تقسیم شدہ تصور کرنا لازم ہے۔ساتھ ہی ساتھ ترسیلی تار پر برقی دباو کی رفتار پر بھی نظر رکھنی ہوتی ہے۔

اب موصل کھوکھلے نلکی یا مستطیلی نالی پر مبنی نظام کی بات کرتے ہیں۔کیا ایسی نالی برقناطیسی طاقت منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے؟ اگر ہماری معلومات برقی ادوار یا ترسیلی تار تک محدود ہوتی تب اس سوال کا جواب یہ ہے کہ ایسا ممکن نہیں ہے کیونکہ برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو عدد تار ضروری ہیں۔البتہ اگر ہم شعاعوں کا علم رکھتے تب جواب ہوتا کہ ایسا ممکن ہے چونکہ شعاعیں سیدھی کھوکھلی نلکی سے گزر سکتی ہیں اور شعاعیں بلند تعدد $(10^{16}\,\mathrm{Hz})$ کی برقناطیسی امواج ہی ہیں۔

اصل جواب ہے کہ ایسی موج کے تعدد پر منحصر ہے۔کم تعدد کی امواج نالی سے نہیں گزر سکتی جبکہ بلند تعدد کی امواج اس سے گزر سکتی ہیں۔تعدد کے ان دو خطوں کے درمیان ایسی تعدد ہو گی جس سے کم تعدد نالی سے نہیں گزرے گی اور جس سے زیادہ تعدد نالی سے گزرے گی۔اس تعدد کو **پست انقطاعی تعدد**[3] کہا جاتا ہے۔

کھوکھلی نالی سے برقناطیسی طاقت کی منتقلی برقی ادوار حل کرنے کے علم سے ناقابل سمجھ مسئلہ ہے۔کھوکھلی نالی میں طاقت کی منتقلی، نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی میدان پر غور سے سمجھا جا سکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے پوئنٹنگ سمتیہ سے موج کی طاقت حاصل ہوتی ہے۔دراصل برقناطیسی طاقت نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی امواج سے منتقل ہوتی ہے نا کہ نالی کے موصل حصے میں۔برقی دباو اور برقی رو اس منتقلی کے محض اضافی اثرات ہیں۔

[3] low cutoff frequency

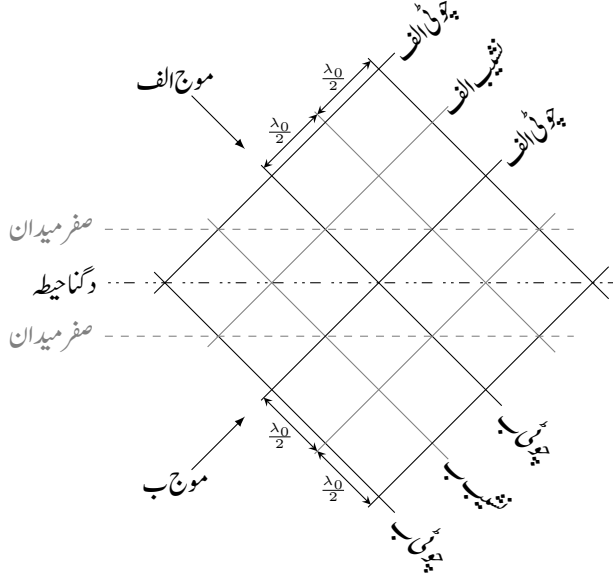
y E_y H_z x z سمت حرکت

شکل 13.1: دولامحدودوسعت کے متوازی موصل چادروں کا نظام۔

13.2 دولامحدودوسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج

شکل 13.1 میں دو لامحدود وسعت کے متوازی چادروں پر مبنی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے جو y سمتی عرضی برقناطیسی موج گزار سکتی ہے۔ اس تار کی خاص خاصیت یہ ہے کہ ایک مخصوص تعدد کے اوپر یہ دیگر **بلند رتبی انداز**[4] کی امواج بھی گزار سکتی ہے۔یوں ترسیلی تار سے شروع کرتے ہوئے مویج تک بحث کو پہنچانے کے لئے یہ بہترین مثال ہے۔

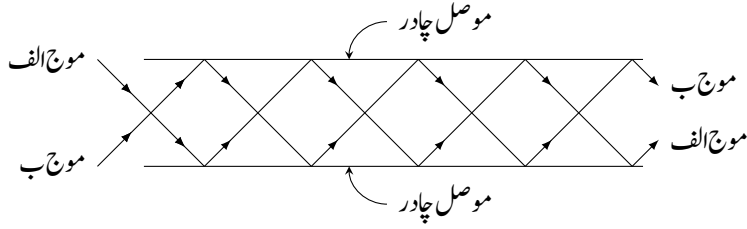
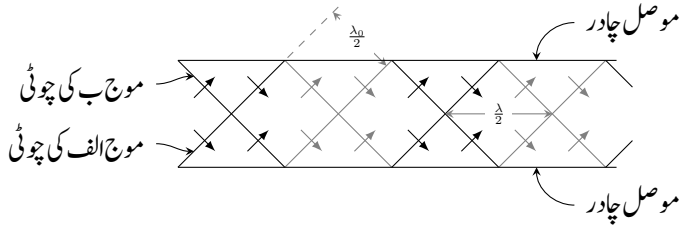
ایسی بلند رتبی انداز کی بات کرتے ہیں جس میں برقی میدان ہر نقطے پر y سمتی ہے جبکہ سمت حرکت a_{x} ہے۔چونکہ برقی میدان سمت حرکت کے عمودی ہے لہٰذا اس انداز کو **عرضی برقی انداز**[5] (TE) کہا جائے گا اور ایسی موج کو **عرضی برقی موج** کہا جائے گا۔اگرچہ اس موج میں برقی میدان عرضی ہے، مقناطیسی میدان عرضی اور طولی اجزاء پر مشتمل ہے۔کامل موصل چادروں کی صورت میں چادروں پر برقی میدان صفر ہو گا البتہ چادر سے دور اس کی کچھ بھی قیمت ممکن ہے۔ایسی عرضی برقی انداز موج کی خصوصیات باآسانی یوں حاصل کی جا سکتی ہیں کہ اسے دو عرضی برقناطیسی انداز TEM امواج کا مجموعہ تصور کیا جائے جو موصل چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی ہوں۔

آئیں پہلے شکل 13.2 پر غور کریں جہاں خلاء میں ایک ہی تعدد کے دو سطحی TEM امواج کے ملاپ کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔اس شکل میں امواج خطی قطبی تصور کئے گئے ہیں جن کا برقی میدان صفحہ کے عمودی فرض کیا گیا ہے۔موج الف کی شعاع اوپر بائیں ہاتھ سے نیچے دائیں ہاتھ کی طرف جبکہ موج ب کی شعاع نیچے بائیں ہاتھ سے اوپر دائیں ہاتھ کی جانب گامزن ہے۔یوں ان کا آپس میں ملاپ کسی زاویے پر ہوتا ہے۔شکل میں گہری سیاہی کی ٹھوس لکیر سے موج کی چوٹی جبکہ ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیر سے اس کا نشیب دکھایا گیا ہے۔یوں سطحی موج الف کی چوٹیاں اور نشیب، شعاع الف کے عمودی دکھائے گئے ہیں۔گہری سیاہی کی ٹھوس لکیر کو برقی میدان کی چوٹی تصور

higher order mode[4]
transverse electric mode, TE mode[5]

شکل 13.2: دو عرضی برقناطیسی امواج خلاء میں مختلف سمتوں میں حرکت کر رہی ہیں۔

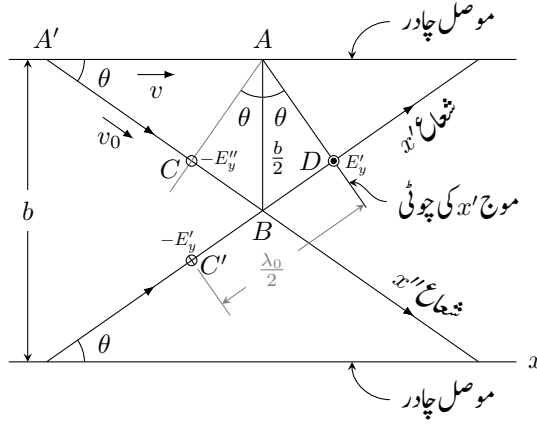
کیا جائے۔یوں اس لکیر پر برقی میدان زیادہ سے زیادہ قیمت رکھتا ہے اور اس کی سمت صفحہ سے عمودی باہر جانب کو ہے۔اسی طرح ہلکی ٹھوس لکیر میدان کی نشیب کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا یہاں میدان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی البتہ اس کی سمت صفحہ کے عمودی اندر جانب کو ہو گی۔چوٹی اور نشیب کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda_0}{2}$ کے برابر ہے۔

جس نقطے پر ایک موج کی چوٹی اور دوسری موج کا نشیب ملتے ہیں اس نقطے پر کل میدان صفر کے برابر ہو گا۔یوں جہاں گہری سیاہی اور ہلکی سیاہی کے لکیر ملتے ہیں وہاں میدان صفر ہو گا۔شکل میں ہلکی سیاہی میں ایسی دو نقطہ دار لکیریں کھینچی گئی ہیں جن پر میدان صفر کے برابر ہے۔آپ غور کر کے تسلی کر لیں کہ ان لکیروں کے ہر نقطے پر برقی میدان صفر ہی ہے۔مزید آپ ذہن میں دونوں امواج کو حرکت دیتے ہوئے تسلی کر لیں کہ امواج کی حرکت کے باوجود ان دو لکیروں پر میدان صفر ہی رہتا ہے۔اسی طرح جن نقطوں پر دونوں امواج کی چوٹیاں آپس میں ملتی ہوں یا دونوں کے نشیب آپس میں ملتے ہوں وہاں میدان دگنا ہو گا۔شکل میں ہلکی سیاہی اور دو نقطوں والی ایسی ایک عدد لکیر دکھائی گئی ہے جہاں میدان دگنا پایا جائے گا۔

صفر میدان دکھاتے نقطہ دار لکیر پر برقی میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا ان پر موصل سطح کے سرحدی برقی میدان

شکل 13.3: شعاعیں دو چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کرتی ہیں۔

شکل 13.4: موجوں کی چوٹیاں، نشیب، خلاء اور مویج میں طول موج۔

کا شرط پورا اترتا ہے۔یوں ان لکیروں پر، صفحہ کے عمودی موصل چادر رکھے جا سکتے ہیں۔البتہ ایسا کرنے سے موج کی سیدھی حرکت متاثر ہو گی چونکہ آمدی زاویے کے برابر، موصل سطح پر، انعکاسی زاویے سے موج انعکاس کرے گی۔یوں موج موصل سطح سے گزر نہیں پائے گی۔ہاں اگر دو موصل چادروں کے درمیان ان امواج کو بھیجا جائے، تب یہ دونوں موصل سطحوں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کریں گی۔شکل 13.3 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ شکل 13.4 میں مویج میں موج کی چوٹی اور نشیب دکھائے گئے ہیں۔خلاء میں طول موج اور مویج میں طول موج کا تعلق بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں موصل چادروں کے درمیان میدان ہوبہو شکل 13.2 میں دو متوازی نقطہ دار لکیروں کے درمیان میدان ہے۔یہاں بھی گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر $\boldsymbol{E}$ کی چوٹی اور ہلکی سیاہی میں لکیر اس کا نشیب ہے۔موصل چادر پر یہ دونوں مل کر صفر برقی میدان پیدا کرتے ہیں۔

اگرچہ ہم دو عدد عرضی برقناطیسی TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں، درحقیقت ان کا مجموعہ بلند رتبی TE انداز کی موج ہے۔بلند رتبی انداز کے موج کی اہم خصوصیت یہ ہے کہ اس کا طول موج ایک مخصوص حد سے کم ہونا لازم ہے۔ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ مویج سے نہیں گزر سکتی۔طول کی یہ حد **انقطاعی طول**[6] پکاری جاتی ہے۔ آئیں انقطاعی طول حاصل کریں۔

[6] cutoff wavelength

شکل 13.5: متوازی لامحدود وسعت کے چادروں کے مویج میں میدان کے اجزاء۔

شکل 13.5 میں TE موج کے دو TEM اجزاء دکھائے گئے ہیں جو x' اور x'' سمت میں گامزن ہیں۔دونوں جزو موصل چادر یعنی x محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ برقی میدان صفحہ کے عمودی y محدد کی سمت میں ہے۔چادروں کے درمیان فاصلہ b ہے۔نقطہ D پر موج x' کی چوٹی ہے لہٰذا یہاں برقی میدان E_y' مثبت قیمت رکھتا ہے جو صفحہ کے عمودی باہر کو ہے اور جسے گول دائرے میں بند نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر لکیر AD لہر کی چوٹی ظاہر کرتی ہے۔ عین اسی لمحہ نقطہ C پر موج x'' کا نشیب ہے جسے گول دائرے میں بند صلیبی نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس لہر کے نشیب کو ہلکی سیاہی میں لکیر AC سے ظاہر کیا گیا ہے۔ایک لہر کی چوٹی اور دوسرے لہر کا نشیب نقطہ A پر مل کر صفر میدان پیدا کرتے ہیں۔ہم جانتے ہیں کہ عین دو چادروں کے درمیان دونوں امواج کی چوٹیاں مل کر دگنا میدان پیدا کرتی ہیں۔اس نقطے کو شکل میں B سے ظاہر کیا گیا ہے۔یوں موج x'' کا نشیب C پر جبکہ اس کی چوٹی B پر ہے۔اس طرح ان نقطوں کے درمیان فاصلہ طول موج کا چوتھا حصہ ہو گا۔اسی طرح BD اور $C'B$ بھی طول موج کے چوتھائی برابر ہیں

$$BC = BC' = BD = \frac{\lambda_0}{4} \tag{13.1}$$

جہاں لامحدود خلاء میں TEM موج کا طول موج λ_0 ہے اور یہ خلاء اسی مادے سے بھری ہے جو دو چادروں کے درمیان پایا جاتا ہے۔موصل چادر پر ایک موج کی کوئی بھی چوٹی اور دوسری موج کا کوئی بھی نشیب مل کر صفر میدان پیدا کر سکتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات کی عمومی شکل

$$BC = \frac{n\lambda_0}{4} \tag{13.2}$$

ہے جہاں $n = 1, 2, 3, \cdots$ ہو سکتے ہیں۔جفت n کی صورت میں دو چادروں کے عین درمیان برقی میدان صفر حاصل ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں یہاں میدان دگنا ہو گا۔ان حقائق ہر تفصیلاً جلد بات کی جائے گی۔شکل 13.5 میں تکون ABC سے

$$AB \sin\theta = \frac{b}{2} \sin\theta = \frac{n\lambda_0}{4}$$

یعنی

$$\lambda_0 = \frac{2b}{n} \sin\theta \tag{13.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی BC کے لئے مساوات 13.2 استعمال کیا گیا۔اس مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ طول موج λ_{0c} کی قیمت $\sin\theta = 1$ یعنی $\theta = 90°$ پر

$$\lambda_{0c} = \frac{2b}{n} \tag{13.4}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے n کی ہر قیمت کے مقابل طول کی انقطاعی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔جب $n = 1$ ہو تب

$$\lambda_{0c} = 2b \tag{13.5}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ کم تر رتبہ کی TE موج کا انقطاعی طول ہے جو ان چادروں کے درمیان سفر کر سکتی ہے۔یہ مساوات کہتا ہے کہ چادروں کے درمیان فاصلہ کم از کم آدھے طول کے برابر ہو گا تو موج چادروں کے درمیان سے گزر پائے گی۔

$n = 1$ کو بلند رتبی TE امواج کا کم تر رتبہ کہا جاتا ہے۔$n = 2$ اس سے ایک قدم بلند رتبہ کی موج کہلائے گی اور اس کا انقطاعی طول

$$\lambda_{0c} = b \tag{13.6}$$

ہو گا۔یوں $n = 2$ رتبہ کی TE موج کے گزرنے کا لئے چادروں کے درمیان کم از کم فاصل موج کے طول کے برابر ضروری ہے۔اسی طرح $n = 3$ کے لئے $\lambda_{0c} = \frac{2b}{3}$ حاصل ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔

مساوات 13.4 اور مساوات 13.3 کو ملا کر

$$\lambda_0 = \lambda_{0c} \sin\theta \tag{13.7}$$

$\lambda_0 < \lambda_{0c} \qquad \theta < 90^\circ$

(ب) طول موج، انقطاعی طول موج سے قدر کم ہے۔

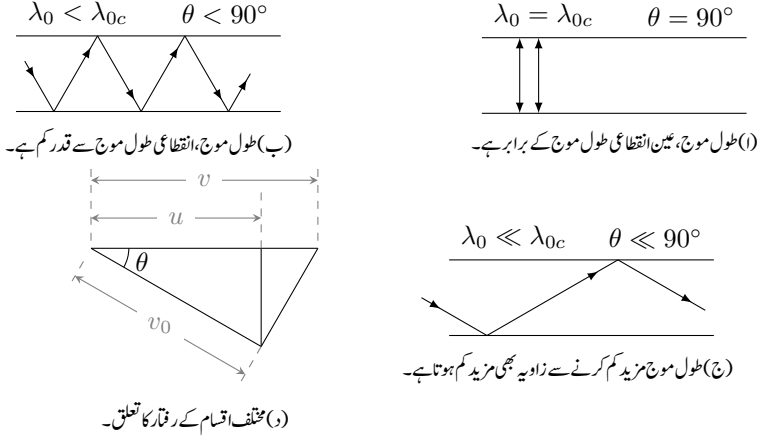
$\lambda_0 = \lambda_{0c} \qquad \theta = 90^\circ$

(ا) طول موج، عین انقطاعی طول موج کے برابر ہے۔

v, u, θ, v_0

(د) مختلف اقسام کے رفتار کا تعلق۔

$\lambda_0 \ll \lambda_{0c} \qquad \theta \ll 90^\circ$

(ج) طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ بھی مزید کم ہوتا ہے۔

شکل 13.6: طول موج اور انعکاس موج کے زاویے۔ مختلف اقسام کے رفتاروں کا آپس میں تعلق۔

یا

$$\theta = \sin^{-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}} \tag{13.8}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی رتبہ کی موج کا انقطاعی زاویہ $\theta = 90^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔اس زاویے پر موج دونوں چادروں کے مابین، x تبدیل کئے بغیر، انعکاس کرتی رہتی ہے۔یوں چادروں کے درمیان ساکن موج پیدا ہوتی ہے جو x سمت میں طاقت منتقل نہیں کر سکتی۔اگر طول موج λ_0 انقطاعی طول موج λ_{0c} سے قدر کم ہو تب θ کی قیمت 90° سے کم ہو گی اور موج، بار بار انعکاس کرتی ہوئی، چادروں کے درمیان x سمت میں حرکت کر پائے گی۔جیسے شکل 13.6 میں دکھایا گیا ہے، طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ مزید کم ہوتا ہے۔آخر کار انتہائی کم طول موج پر صورت حال لامحدود خلاء میں موج کی حرکت کی مانند ہو جاتی ہے اور یہ شعاع کی طرح چادروں کے درمیان سیدھا گزرنے کے قابل ہو جاتی ہے۔

شکل 13.5 میں TEM امواج کی دوری رفتار[7] v_0 لامحدود خلاء میں آزاد موج کی دوری رفتار

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \tag{13.9}$$

ہی ہے جہاں خلاء کا مقناطیسی مستقل μ اور اس کا برقی مستقل ϵ ہیں۔شکل 13.6-د میں TE موج کی x سمت میں دوری رفتار v ہے۔TE موج کی چوٹی یا نشیب یا کوئی اور زاویائی نقطہ اس رفتار سے x سمت میں حرکت کرتا نظر آئے

[7] phase velocity

گا۔ان دو اقسام کی رفتار کا تعلق شکل 13.6-د سے

$$\frac{v_0}{v} = \cos\theta \tag{13.10}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$v = \frac{v_0}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}\cos\theta} \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{13.11}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے تحت جیسے جیسے طول موج کو انقطاعی طول موج کے قریب لایا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار کی قیمت بڑھتی ہے حتٰی کہ عین λ_{0c} پر دوری رفتار لامحدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔اس کے برعکس جیسے جیسے طول موج کو کم کیا جائے، یعنی جیسے جیسے θ کو کم کیا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار TEM کے دوری رفتار کے قریب ہو گی حتٰی کہ انتہائی کم طول موج یعنی انتہائی بلند تعدد کے موج کی صورت میں یہ قیمت v_0 کے برابر ہو جائے گی۔ یوں موبیج میں بند، بلند رتبی موج کا دوری رفتار TEM موج کے دوری رفتار سے زیادہ یا اس کے برابر ممکن ہے۔طاقت کی منتقلی انعکاس کرتی موج کے مجموعی رفتار[8] سے ہوتی ہے جسے شکل میں u سے ظاہر کیا گیا ہے۔شکل 13.6-د سے

$$u = v_0\cos\theta \tag{13.12}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا طاقت کی منتقلی کی رفتار TEM کے رفتار سے کم یا اس کے برابر ممکن ہے۔طاقت کسی صورت بھی TEM موج کی رفتار سے زیادہ رفتار پر منتقل کرنا ممکن نہیں ہے۔یہ حقیقت آئن سٹائن کے قانون کے عین مطابق ہے جس کے تحت کوئی بھی چیز رفتار شعاع سے تجاوز نہیں کر سکتی۔یاد رہے کہ TE موج کی دوری رفتار درحقیقت کسی چیز کی منتقلی نہیں کرتی لہٰذا اس کی قیمت v_0 سے بڑھ سکتی ہے۔مساوات 13.11 اور مساوات 13.12 کو ملا کر

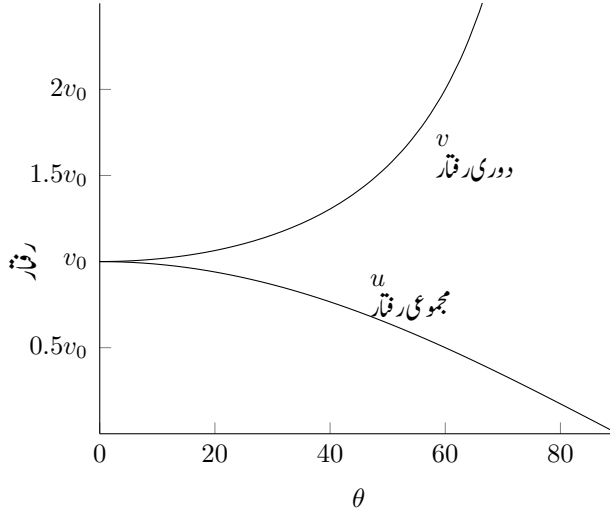
$$uv = v_0^2 \tag{13.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔

دو چادروں میں بند ہونے سے TEM موج کا تعدد تبدیل نہیں ہوتا۔اسی طرح ایسے دو یکساں تعدد کی امواج سے حاصل TE موج کا تعدد بھی وہی رہتا ہے۔چونکہ طول موج ضرب تعدد کا حاصل رفتار کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 13.11 کو

$$f\lambda = \frac{f\lambda_0}{\cos\theta}$$

---

[8] group velocity

شکل 13.7: دوری اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج۔

لکھا جا سکتا ہے جس سے

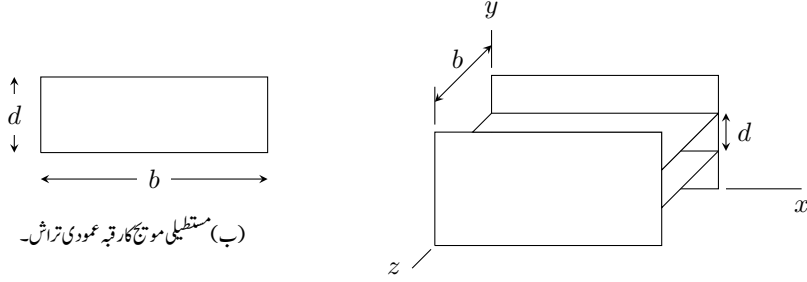
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\cos\theta}$$

حاصل ہوتا ہے جو بلند رتبی موج کے طول λ اور آزاد موج کے طول λ_0 کا تعلق ہے۔

شکل 13.7 میں دوری رفتار بالمقابل زاویہ موج اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج دکھائی گئی ہیں۔ جیسے جیسے θ کی قیمت $90°$ کے قریب آتی ہے ویسے ویسے دوری رفتار کی قیمت لامحدود جبکہ مجموعی رفتار کی قیمت صفر کے قریب تر ہوتی ہے۔

حقیقت میں دو متوازی لامحدود وسعت[9] کے چادروں پر مبنی موتج کہیں نہیں پایا جاتا۔ حقیقی موتج عموماً کھوکھلے مستطیل یا کھوکھلے نالی کی اشکال رکھتے ہیں۔ چونکہ برقی میدان کے عمودی موصل چادر رکھنے سے میدان متاثر نہیں ہوتا لہٰذا دو لامحدود وسعت کے متوازی چادر، جن کے درمیان فاصلہ b ہو، میں TE موج کے عمودی دو چادر رکھنے سے میدان میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی، لیکن ایسا کرنے سے مستطیل موتج حاصل ہوتا ہے۔ شکل 13.8-الف میں مستطیلی موتج بنتا دکھایا گیا ہے جہاں d فاصلے پر دو متوازی چادر رکھے گئے ہیں۔ مستطیل شکل کے علاوہ بقایا چادر ہٹانے سے

[9] حقیقی دنیا میں لامحدود وسعت کے چادر نہیں پائے جاتے۔

y b d x z

(ا) لامحدود متوازی چادر موج سے مستطیلی موج کا حصول۔

d b

(ب) مستطیلی موج کا رقبہ عمودی تراش۔

شکل 13.8: مستطیلی موج کا حصول اور اس کا رقبہ عمودی تراش۔

مستطیل موج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 13.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ دو لامحدود چادروں کا موج تو استعمال نہیں ہوتا لیکن اس کے TE امواج جوں کے توں مستطیل موج کے لئے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔موجودہ TE امواج کے نقطہ نظر سے مستطیل کی d لمبائی کچھ بھی ممکن ہے۔

لامحدود چادر کے موج پر غور کرنے سے انقطاعی طول موج کے علاوہ دوری رفتار اور مجموعی رفتار کی مساوات بھی حاصل کی گئی۔دیگر بلند رتبہ کی امواج پر معلومات حاصل کرنے کی خاطر میکس ویل کی مساوات حل کرنا لازم ہے۔آئیں مستطیل موج کے لئے میکس ویل مساوات حل کرتے ہیں۔

13.3 کھوکھلا مستطیل موج

مستطیل موج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط، کارتیسی محدد میں نہایت آسانی سے لاگو کئے جا سکتے ہیں۔اسی لئے مستطیلی موج کو کارتیسی نظام میں حل کیا جائے گا۔ہم کارتیسی نظام میں میکس ویل کے مساوات سے موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔موج کو x محدد پر رکھتے ہوئے ہم سمت موج کو اسی سمت حرکت کے پابند بناتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ اسے سائن نما تصور کرتے ہیں۔اس کے بعد بلند رتبی موج کی قسم کا انتخاب کرتے ہیں۔یوں ہم برقی میدان E کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے **عرضی برقی**[10] TE موج پر غور کر سکتے ہیں یا مقناطیسی میدان کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے **عرضی مقناطیسی**[11] TM موج پر غور کر سکتے ہیں۔TEM موج میں برقی اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔بلند رتبی موج میں میدان، سمت

[10] transverse electric, TE
[11] transverse magnetic, TM

حرکت کی سمت میں بھی پائے جاتے ہیں۔اب عرضی برقی TE موج کی صورت میں $E_x = 0$ ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں H_x صفر کے برابر نہیں ہو سکتا۔اگر H_x بھی صفر کے برابر ہو تب موج TEM قسم کی ہو گی نا کہ TE قسم کی۔TE کی صورت میں تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔حاصل موج پر سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے اسے H_x کے لئے حل کیا جاتا ہے۔حاصل H_x کو بقایا مساوات میں پر کرتے ہوئے E_y، E_z، H_y اور H_z حاصل کئے جاتے ہیں۔یوں برقی اور مقناطیسی میدان کے تمام کارتیسی اجزاء کی مکمل معلومات حاصل ہوتی ہے۔یہ عمومی طریقہ کار ہے جسے دیگر مسائل حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

اس طریقے کو مستطیلی مویج میں TE موج کے لئے تفصیلاً استعمال کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر مندرجہ ذیل قدم سلسلہ وار اٹھائے جائیں گے۔

- میکس ویل مساوات سے شروع کریں۔
- موج کو وقت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بنائیں۔
- موج کو x سمت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بناتے ہوئے حرکی مستقل بروئے کار لائیں۔
- بلند رتبی موج کا انتخاب کریں۔ہم عرضی برقی TE موج کا انتخاب کرتے ہوئے $E_x = 0$ اور $H_x \neq 0$ رکھیں گے۔
- بقایا چار اجزاء یعنی E_y، E_z، H_y اور H_z کی مساوات H_x کی صورت میں لکھیں۔
- موج کی مساوات H_x کی صورت میں حاصل کریں۔
- مستطیلی مویج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کی اس مساوات کو H_x کے لئے حل کریں۔
- E_y، E_z، H_y اور H_z کی مساوات میں حاصل H_x پر کرتے ہوئے ان کی مساوات بھی حاصل کریں۔

ان قدموں پر چلتے ہوئے مکمل حل حاصل ہو گا۔

آئیں پہلے قدم سے شروع کرتے ہوئے میکس ویل کی مساوات کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔صفحہ 415 پر مساوات 9.28 اور مساوات 9.29

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{13.14}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{13.15}$$

کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \tag{13.16}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \tag{13.17}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \tag{13.18}$$

اور

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \tag{13.19}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0 \tag{13.20}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \tag{13.21}$$

لکھے جائیں گے جہاں $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔اسی طرح خلاء میں $\rho_h = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13.22}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{13.23}$$

لکھے جائیں گے۔

اب دوسرا قدم کہتا ہے کہ موج وقت کے ساتھ سائن نما تعلق رکھتی ہے جبکہ تیسرا قدم کہتا ہے کہ موج x فاصلے کے ساتھ بھی سائن نما تعلق رکھتی ہے۔ساتھ ہی ساتھ x سمت میں حرکی مستقل بھی بروئے کار لانا ہے۔ان دو اقدام

کو استعمال کرتے ہوئے میدان کے تمام اجزاء لکھتے ہیں۔یوں E_y اور H_x کو مثال بناتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_y &= E_1 e^{j\omega t - \gamma x} \\ H_x &= H_1 e^{j\omega t - \gamma x} \end{aligned} \tag{13.24}$$

لکھے جائیں گے جہاں

γ حرکی مستقل $(\gamma = \alpha + j\beta)$

α تضعیفی مستقل

β زاویائی مستقل

ہیں۔مساوات 13.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 13.16

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x\right] e^{j\omega t - \gamma z} = 0$$

یا

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0 \tag{13.25}$$

لکھا جائے۔اسی طرح مساوات 13.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 13.17 تا مساوات 13.23 یوں لکھے جائیں گے۔

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z + j\omega\mu H_y = 0 \tag{13.26}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0 \tag{13.27}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_x = 0 \tag{13.28}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - (\sigma + j\omega\epsilon) E_y = 0 \tag{13.29}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_z = 0 \tag{13.30}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13.31}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{13.32}$$

مندرجہ بالا آٹھ مساوات میں ترسیلی تار کے برقی رکاوٹ Z اور برقی فراوانی Y کی طرز کے مستقل

$$Z = -j\omega\mu \qquad (\Omega/\mathrm{m}) \tag{13.33}$$

$$Y = \sigma + j\omega\epsilon \qquad (\mathrm{S/m}) \tag{13.34}$$

استعمال کرتے ہوئے انہیں قدر چھوٹا لکھتے ہیں۔

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0 \tag{13.35}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - ZH_y = 0 \tag{13.36}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - ZH_z = 0 \tag{13.37}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - YE_x = 0 \tag{13.38}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0 \tag{13.39}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0 \tag{13.40}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13.41}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{13.42}$$

یہ x سمت میں حرکت کرتی موج کی عمومی مساوات ہیں۔

ابھی تک نا تو موجیج کی شکل اور نا ہی بلند رتبی موج کا انتخاب کیا گیا ہے لہٰذا چوتھے قدم کا اطلاق کرتے ہوئے TE قسم کا انتخاب کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ $E_x = 0$ لیا جائے گا۔ایسا کرنے سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0 \tag{13.43}$$

$$\gamma E_z - ZH_y = 0 \tag{13.44}$$

$$-\gamma E_y - ZH_z = 0 \tag{13.45}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \tag{13.46}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0 \tag{13.47}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0 \tag{13.48}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13.49}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{13.50}$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں۔

پانچویں قدم پر تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ایسا کرنے کی خاطر پہلے مساوات 13.44 اور 13.45 سے

$$\frac{E_z}{H_y} = -\frac{E_y}{H_z} = \frac{Z}{\gamma} \tag{13.51}$$

لکھتے ہیں۔اب $\frac{E_y}{H_z}$ یا $\frac{E_z}{H_y}$ کی شرح قدرتی رکاوٹ کی مانند ہے لہٰذا اس شرح کو **عرضی برقی موج کی رکاوٹ**[12] Z_{yz} یا صرف **عرضی برقی رکاوٹ** کہا جائے گا جہاں

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \qquad (\Omega) \tag{13.52}$$

کے برابر ہے۔مساوات 13.52 کو مساوات 13.48 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرنے سے

$$H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{13.53}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 13.52 کو مساوات 13.47 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرنے سے

$$H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{13.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب مساوات 13.53 کو مساوات 13.52 میں پر کرتے ہوئے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{13.55}$$

---

[12] transverse electric wave impedance

اور مساوات 13.54 کو مساوات 13.52 میں پر کرتے ہوئے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{13.56}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 13.53 تا مساوات 13.56 تمام اجزاء کو H_x کی صورت میں پیش کرتے ہیں۔

چھٹے قدم پر ان مساوات سے موج کی مساوات کا حصول ہے۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 13.53 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 13.54 کا z کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے دونوں حاصل جواب کو مساوات 13.50 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma H_x - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \gamma \left(\gamma - YZ_{yz} \right) H_x = 0$$

حاصل کرتے ہیں جس میں

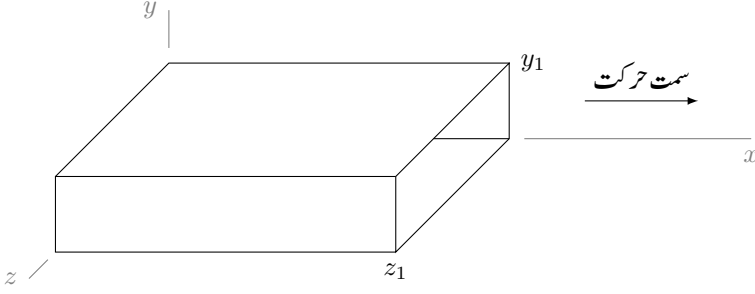
$$k^2 = \gamma \left(\gamma - YZ_{yz} \right) \tag{13.57}$$

پر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0 \tag{13.58}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 13.58 موج کے عرضی برقی موج کی عمومی مساوات ہے۔موج کا عمودی تراش کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے۔ یہاں چھٹا قدم پورا ہوتا ہے۔

ساتویں قدم میں موج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کو حل کرنا ہے۔شکل 13.9 میں کامل موصل چادروں سے بنایا گیا مستطیلی موج دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی z_1 اور اونچائی y_1 ہے۔موصل اور ہوا کے سرحدی برقی شرائط کے مطابق سرحد پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا موج کے اطراف پر متوازی E صفر ہو گا۔یوں موج کے نچلی اور بالائی سطحوں پر $E_z = 0$ ہو گا۔اسی طرح موج کے بائیں اور دائیں کھڑی سطحوں پر $E_y = 0$ ہو گا۔اب ان شرائط پر پوری اترتی مساوات 13.58 کا حل درکار ہے۔علیحدگی متغیرات کا طریقہ یہاں قابل استعمال ہے جس میں H_x کو دو متغیرات کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے یعنی

$$H_x = YZ \tag{13.59}$$

شکل 13.9: مستطیل مویج۔

جہاں Y ایسا متغیر ہے جو صرف y پر منحصر ہے جبکہ Z ایسا متغیر ہے جو صرف z پر منحصر ہے۔اصل میں ان متغیرات کو $Y(y)$ اور $Z(z)$ لکھنا چاہیے لیکن غیر ضروری علامات کم کرنے کی غرض سے انہیں Y اور Z ہی لکھا جائے گا۔مساوات 13.59 کے استعمال سے مساوات 13.58

$$Z\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+Y\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+k^2 YZ=0 \tag{13.60}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔دونوں اطراف کو YZ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=-k^2 \tag{13.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب بائیں ہاتھ پہلا جزو صرف y پر منحصر ہے جبکہ دوسرا جزو صرف z پر منحصر ہے۔یوں y کی تبدیلی سے صرف پہلے جزو میں تبدیلی کا امکان ہے لیکن پہلے جزو میں کسی بھی تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہ سکتے۔اس طرح صاف ظاہر ہے کہ پہلے جزو میں y کی تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو سکتی یعنی یہ جزو نا قابل تبدیل مستقل قیمت رکھتی ہے جسے ہم $-A_1$ لکھتے ہیں۔اسی منطق سے دوسرا جزو بھی اٹل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_2$ لکھتے ہیں۔یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-A_1 \tag{13.62}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=-A_2 \tag{13.63}$$

ہوں گے لہٰذا مساوات 13.61 سے

$$A_1+A_2=k^2 \tag{13.64}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 13.62 اور مساوات 13.63 ایک متغیرہ پر مبنی دو رتبی تفرقی مساوات ہیں جن کا حل آپ جانتے ہی ہوں گے۔مساوات 13.62 کا حل تجربے سے

$$Y = c_1 \cos b_1 y + c_2 \sin b_1 y \tag{13.65}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں m_1، c_2 اور b_1 مساوات کے مستقل ہیں۔ مساوات 13.65 کو واپس مساوات 13.62 میں پر کرنے سے

$$b_1 = \sqrt{A_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 13.62 کا حل

$$Y = c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y \tag{13.66}$$

ہے۔اسی طرح مساوات 13.63 کا حل

$$Z = c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \tag{13.67}$$

ہے۔ان دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.59 کو

$$H_x = \left(c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y \right) \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right) \tag{13.68}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسے مساوات 13.55 میں پر کرنے سے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} \left(-c_1 \sin \sqrt{A_1} y + c_2 \cos \sqrt{A_1} y \right) \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا نچلا چادر $y = 0$ پر پایا جاتا ہے جس پر، برقی سرحدی شرط کے مطابق، $E_z = 0$ ہو گا لہٰذا $y = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات صفر کے برابر ہو گا، جس سے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_2 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

یعنی

$$c_2 = 0 \tag{13.69}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$E_z = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا بالائی چادر $y = y_1$ پر پایا جاتا ہے جس پر برقی سرحدی شرط کے مطابق متوازی برقی دباو صفر کے برابر ہو گا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں y_1 پر $E_z = 0$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y_1 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتی ہے۔اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_1 مساوی صفر ہے جس سے $H_x = 0$ حاصل ہو گا۔اگرچہ یہ درست جواب ہے لیکن ہمیں زیادہ غرض حرکت کرتی موج سے ہے نا کہ ہر قسم کے میدان سے خالی موج سے، لہٰذا ہم

$$c_1 \neq 0 \tag{13.70}$$

لیتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_1} y_1 = n\pi$$

یعنی

$$\sqrt{A_1} = \frac{n\pi}{y_1} \tag{13.71}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔یوں

$$H_x = n_1 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right) \tag{13.72}$$

ہو گا۔اس مساوات کو مساوات 13.56 میں پر کرنے سے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left(-c_3 \sin \sqrt{A_2} z + c_4 \cos \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا دایاں کھڑا چادر $z = 0$ پر ہے، جہاں سرحدی شرط کے تحت متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہٰذا

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_4 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب چونکہ $c_1 \neq 0$ ہے لہٰذا

$$c_4 = 0 \tag{13.73}$$

حاصل ہوتا ہے اور یوں

$$E_y = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z$$

ہو گا۔ مستطیل کا بایاں کھڑا چادر $z = z_1$ پر پایا جاتا ہے جہاں سرحدی شرائط کے تحت E_y ہو گا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں یہ حقائق پر کرتے ہوئے

$$0 \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z_1$$

لکھا جائے گا۔ اب $c_1 \neq 0$ اور اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_3 برابر صفر ہے جس سے H_x کے علاوہ تمام میدان صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ ہم چونکہ حرکت کرتی موج کی تلاش میں ہیں لہٰذا ہم اس ممکنہ جواب کو رد کرتے ہوئے

$$c_3 \neq 0 \tag{13.74}$$

چنتے ہیں۔ اس شرط کے ساتھ مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_2} z_1 = m\pi \tag{13.75}$$

یعنی

$$\sqrt{A_2} = \frac{m\pi}{z_1} \tag{13.76}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔ یوں $c_1 c_3 = H_0$ لکھتے ہوئے

$$H_x(y, z) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} \tag{13.77}$$

حاصل ہوتا ہے جو غیر سمتی مساوات ہے۔ اس مساوات میں وقت t اور x سمت میں حرکت کا کوئی ذکر نہیں ہے۔ یاد رہے کہ اصل میدان مساوات 13.24 کی طرز کا ہے جس میں یہ معلومات بھی شامل ہیں لہٰذا

$$H_x(x, y, z, t) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{13.78}$$

لکھا جائے گا جو مکمل جواب ہے۔

مساوات 13.52 اور مساوات 13.57 کی مدد لیتے ہوئے آٹھویں قدم میں H_x کو مساوات 13.53 تا مساوات 13.56 میں پر کرتے ہوئے بقایا میدان حاصل کرتے ہیں یعنی

$$H_y = \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{13.79}$$

$$H_z = \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{13.80}$$

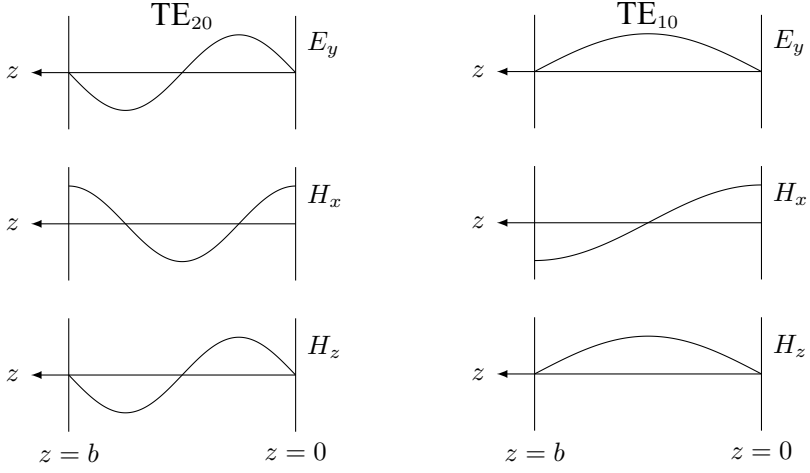
$$E_z = -\frac{j\omega\mu H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{13.81}$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu H_0}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{13.82}$$

$$E_x = 0 \tag{13.83}$$

جہاں آخر میں $E_x = 0$ بھی شامل کیا گیا ہے۔مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 مستطیلی مویج میں TE موج کا مکمل حل ہے۔یہاں آٹھواں قدم پورا ہوتا ہے۔

آئیں مستطیلی مویج میں m اور n مستقل پر غور کریں۔ اگر $m = 1$ اور $n = 0$ ہوں تب مندرجہ بالا مساوات میں H_y، E_z اور E_x صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔یوں مویج میں صرف H_x، H_z اور E_y میدان پائے جاتے ہیں۔ دائیں چادر، یعنی $z = 0$، پر $E_y = 0$ پایا جاتا ہے جبکہ دونوں چادروں کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر میدان کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ شکل 13.10-الف میں پہلا خط E_y ہی ہے۔اگر H_x کی بات کی جائے تو دائیں چادر، یعنی $z = 0$، پر H_x کی چوٹی جبکہ بائیں چادر، یعنی $z = z_1$، پر H_x کا نشیب پایا جاتا ہے۔ ان دو اطراف کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر $H_x = 0$ پایا جاتا ہے۔شکل 13.10-الف میں دوسرا خط H_x ہے۔مقناطیسی میدان H_z بھی دائیں اور بائیں چادروں پر صفر کے برابر ہے جبکہ ان کے عین درمیان اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یوں $m = 1$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا آدھا چکر پایا جاتا ہے۔

$m = 2$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان شکل 13.10-ب میں دکھائے گئے ہیں۔اب بھی میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا مکمل چکر، یعنی دو آدھے چکر، پائے جاتے ہیں۔ان سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ m کی قیمت z پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔آپ جلد دیکھیں گے کہ n بالکل اسی طرح y پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے بلند رتبی TE موج کو m اور n سے پہچانا جاتا ہے۔یوں شکل 13.10-الف کے امواج TE_{10} جبکہ شکل 13.10-ب کے امواج TE_{20} کہلاتے ہیں۔یوں عمومی بلند رتبی عرضی برقی موج TE_{mn} کہلائے گی جہاں z پر آدھے چکروں

ب: $m=2, n=0$

الف: $m=1, n=0$

شکل 13.10: بلند انداز TE امواج۔

کی تعداد m ہے جبکہ y پر آدھے چکروں کی تعداد n ہے۔ مستطیلی موج میں عموماً z سے لمبی طرف کو ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی طرح مقناطیسی امواج TM_{mn} کہلائے جاتے ہیں۔

آئیں TE پر تفصیلاً غور کریں۔

13.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور

بلندرتبی TE_{10} موج:

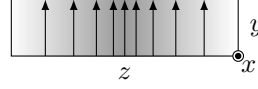
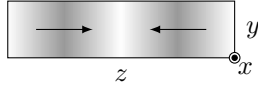
مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 میں $m=1$ اور $n=0$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE_{10} امواج حاصل ہوتی ہیں۔

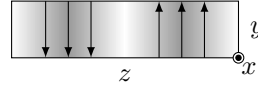
$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad \text{TE کا بنیادی شرط}\\
E_y &= \frac{j\omega\mu H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
E_z &= 0\\
H_x &= H_0\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_y &= 0\\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}
\end{aligned}
\tag{13.84}
$$

ان میں پہلی مساوات، یعنی $E_x=0$، درحقیقت TE موج کی تعریف ہے۔ان امواج کے حیطوں کو شکل 13.10-الف میں $t=0$ اور $x=0$ کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ان اشکال میں میدان بالمقابل z دکھایا گیا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں کوئی میدان بھی y پر منحصر نہیں ہے لہٰذا y کی تبدیلی سے یہ میدان تبدیل نہیں ہوں گے۔TE_{10} تمام اقسام کے بلند رتبی امواج میں سب سے لمبی انقطاعی طول موج رکھتی ہے لہٰذا اس کی انقطاعی تعدد سب سے کم ہے۔شکل 13.11 میں E_y اور H_z کو بطور سمتیہ دکھایا گیا ہے۔شکل-الف میں $z=\frac{z_1}{2}$ پر سمتیوں کی تعداد زیادہ دکھا کر گھنے میدان کو ظاہر کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ساتھ ہی ساتھ اس خطے کو گہرا رنگ بھی دے کر گھنے میدان کو ظاہر کیا گیا ہے۔شکل-ب میں مقناطیسی میدان کی سمت کو سمتیہ سے جبکہ میدان کو گہرے رنگ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بلندرتبی TE_{20} موج:

شکل 13.11 میں TE_{20} کے E_y اور H_z اشکال بھی دکھائے گئے ہیں۔

TE_{10} کا E_y میدان۔

TE_{10} کا H_z میدان۔

TE_{20} کا E_y میدان۔

TE_{20} کا H_z میدان۔

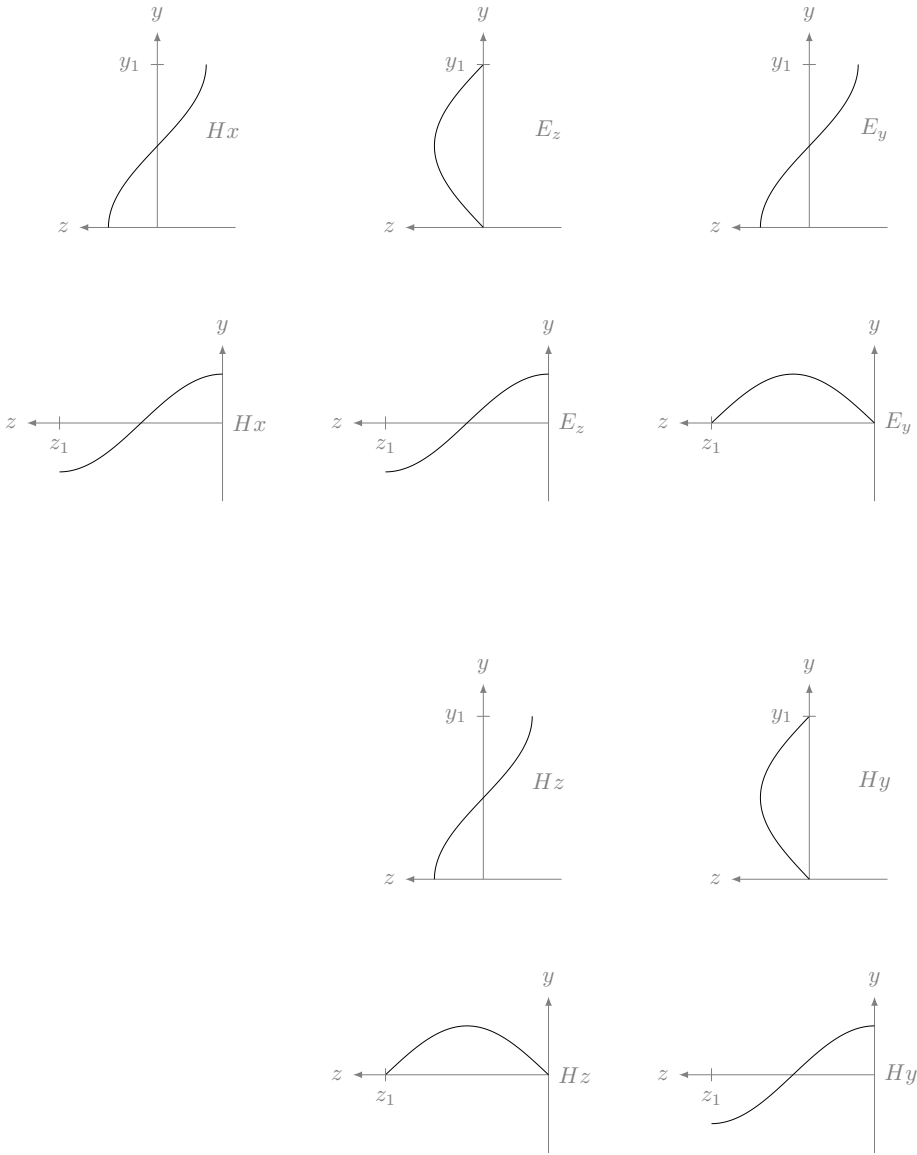
شکل 13.11: TE_{10} اور TE_{20} کے E_y اور H_z میدان۔

بلند رتبی TE_{11} موج:

مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 میں $m = 1$ اور $n = 1$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE_{11} امواج حاصل ہوتی ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad \text{TE کا بنیادی شرط}\\
E_y &= \frac{j\omega\mu H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\cos\frac{\pi y}{y_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
E_z &= -\frac{j\omega\mu H_0}{k^2}\frac{\pi}{y_1}\sin\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_x &= H_0\cos\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_y &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{y_1}\sin\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\cos\frac{\pi y}{y_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}
\end{aligned}
\tag{13.85}
$$

اس بلند رتبی انداز میں صرف E_x ہر نقطے پر تمام اوقات صفر کے برابر رہتا ہے۔ان میدان کو شکل 13.12 میں دکھایا گیا ہے۔

مستطیل موج کے حاصل حل میدان تمام ممکنہ میدان ہیں جو کسی موج میں پائے جا سکتے ہیں۔حقیقت میں کسی بھی موج میں پائے جانے والی امواج کا دارومدار موج کی جسامت، موج پیدا کرنے کا طریقہ اور موج میں ناہمواریوں پر ہے۔کسی بھی نقطے پر موجود تمام میدانوں کا مجموعی میدان پایا جائے گا۔

شکل 13.12: TE_{11} میدان۔

واپس اپنی گفتگو پر آتے ہوئے مساوات 13.64، مساوات 13.71 اور مساوات 13.76 کو ملا کر

$$k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{13.86}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 13.33، مساوات 13.52 اور مساوات 13.57 سے

$$k^2 = \gamma^2 - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \tag{13.87}$$

حاصل ہوتا ہے۔بے ضیاع ذو برق ($\sigma = 0$) کی صورت میں مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{13.88}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ایک مخصوص قیمت سے کم تعدد پر جذر میں آخری جزو پہلے دو اجزاء کے مجموعے سے کم ہو گا لہٰذا γ حقیقی ہو گا۔ حقیقی γ کی صورت میں موج گھٹے گی اور یہ موئج میں سفر نہیں کر پائے گی۔

اسی طرح اس مخصوص قیمت سے زیادہ تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہٰذا موئج میں موج سفر کرے گی۔

ان دو قیمتوں کے درمیان تعدد کی وہ قیمت ہو گی جس پر $\gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اس تعدد کو **انقطاعی تعدد**[13] کہتے ہیں۔انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج، بغیر گھٹے، موئج میں سفر کر سکتے ہیں جبکہ اس سے کم تعدد کے امواج گھٹتے ہیں لہٰذا یہ موئج میں سفر نہیں کر پاتے۔

ان تین تعددی خطوں کو ایک جگہ دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

- کم تعدد یعنی کم ω پر γ حقیقی ہوتا ہے۔موئج غیر شفاف ہوتا ہے جس میں امواج سفر نہیں کر سکتے۔
- مخصوص درمیانی تعدد پر $\gamma = 0$ ہوتا ہے۔یہ انقطاعی تعدد ہے۔
- زیادہ تعدد پر γ خیالی ہوتا ہے۔موئج شفاف ہوتا ہے جس میں امواج سفر کر سکتے ہیں۔

[13] cutoff frequency

مساوات 13.88 میں $\sqrt{\omega^2\mu\epsilon}$ درحقیقت ایسی لامحدود خطے کا زاویائی مستقل β_0 ہے جس میں وہی ذو برق ہو جو مویج میں پایا جاتا ہے۔یوں ہم

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \tag{13.89}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \sqrt{\omega^2\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} && \text{لامحدود خطے کا زاویائی مستقل}\\
\lambda_0 & && \text{لامحدود خطے میں طول موج}\\
k &= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}
\end{aligned}$$

ہیں۔یوں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $k < \beta_0$ ہو گا لہذا

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = j\beta \tag{13.90}$$

ہو گا جہاں

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} && \text{مویج میں زاویائی مستقل}\\
\lambda & && \text{مویج میں طول موج}
\end{aligned}$$

ہیں۔کافی بلند تعدد پر $k \ll \beta_0$ ہو گا اور یوں مویج کے زاویائی مستقل β کی قیمت لامحدود خطے کے زاویائی مستقل β_0 کی قیمت کے قریب ہو گی۔اس کے برعکس انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر $k > \beta_0$ ہو گا جس سے

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \alpha \tag{13.91}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں α تضعیفی مستقل ہے۔

کافی کم تعدد پر $k \gg \beta_0$ ہو گا لہذا تضعیفی مستقل کی قیمت k کے قریب ہو گی۔

عین انقطاعی تعدد پر $k = \beta_0$ ہو گا لہذا $\gamma = 0$ ہو گا۔یوں انقطاعی تعدد پر

$$\omega^2\mu\epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{13.92}$$

ہو گا جس سے **انقطاعی تعدد**[14]

$$f_c=\frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m}{z_1}\right)^2}\qquad \text{(Hz)} \tag{13.93}$$

اور انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c}=\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m}{z_1}\right)^2}}=\frac{2\pi}{k}\qquad \text{(m)} \tag{13.94}$$

یا

$$k=\frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \tag{13.95}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں λ_{0c} لامحدود خطے میں انقطاعی تعدد پر طول موج ہے جسے چھوٹا کر کے **انقطاعی طول موج**[15] پکارا جاتا ہے۔مساوات 13.93 اور مساوات 13.94 سے کھوکھلے مستطیلی موتج کے کسی بھی TE_{mn} موج کا انقطاعی تعدد اور انقطاعی طول موج حاصل کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر TE_{10} موج کا انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c}=2z_1 \tag{13.96}$$

حاصل ہوتا ہے جو وہی قیمت ہے جو مساوات 13.5 میں حاصل کی گئی تھی جہاں $z_1=b$ کے برابر ہے۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $(\beta_0>k)$ پر

$$\beta=\sqrt{\beta_0^2-k^2}=\sqrt{\omega^2\mu\epsilon-\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2} \tag{13.97}$$

کے برابر ہے۔اب $\beta_0=\frac{2\pi}{\lambda_0}$ اور مساوات 13.95 مندرجہ بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$\beta=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2-\left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2}=\beta_0\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{13.98}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا موتج میں طول موج

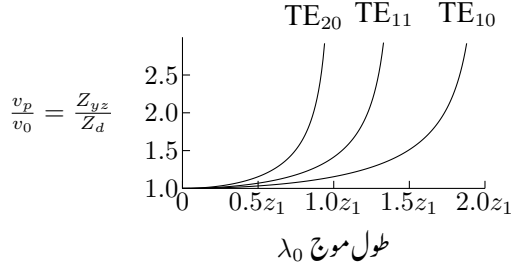
$$\lambda_{\text{موتج}}=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{13.99}$$

---

[14] cutoff frequency
[15] cutoff wavelength

TE$_{20}$ TE$_{11}$ TE$_{10}$

$\frac{v_p}{v_0} = \frac{Z_{yz}}{Z_d}$

2.5
2.0
1.5
1.0
0 $0.5z_1$ $1.0z_1$ $1.5z_1$ $2.0z_1$

طول موج λ_0

شکل 13.13: مختلف بلند رتبی امواج کے مستطیلی مویج میں دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0۔

اور مویج میں دوری رفتار[16] v_p

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2-\left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \tag{13.100}$$

یا

$$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{13.101}$$

حاصل ہوتی ہیں جہاں

v_o لامحدود خطے میں دوری رفتار $v_0 = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ ہے،

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج،

λ_{0c} انقطاعی طول موج (انقطاعی تعدد پر لامحدود خطے میں طول موج)

ہیں۔

شکل 13.13 میں مختلف بلند انداز امواج کے دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0 دکھائے گئے ہیں۔دوری رفتار کو لامحدود خطے کے دوری رفتار v_0 کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔ان اشکال میں مستطیلی مویج کے دونوں اطراف برابر لمبائی $(y_1 = z_1)$ کے تصور کئے گئے ہیں۔

---

[16] phase velocity

مندرجہ بالا تجزیے میں موج کے اطراف کامل موصل کے تصور کئے گئے اور ساتھ ہی ساتھ موج میں بے ضیاع ذو برق بھرا تصور کیا گیا۔اسی لئے انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر امواج بغیر گھٹے موج میں سفر کرتے ہیں۔حقیقت میں موج کے اطراف کے موصل کی موصلیت اور ذو برق میں طاقت کے ضیاع سے $\gamma = \alpha + j\beta$ ہو گا لہٰذا انقطاعی تعدد سے بلند تعدد امواج بھی سفر کے دوران کچھ نہ کچھ گھٹتے ہیں۔

کھوکھلا موج جس میں صرف ہوا بھری ہو میں ذو برق یعنی ہوا کا ضیاع قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ایسے موج میں طاقت کا ضیاع صرف موج کے چادروں کی موصلیت کی بنا ہے۔موصل چادر مکمل طور پر کامل نہ ہونے کا مطلب لے کہ حقیقت میں چادر کے متوازی برقی میدان E_m صفر نہیں ہو گا۔اچھے موصل مثلاً تانبے کی بنی چادر میں E_m کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔یوں تانبے یا دیگر اچھے موصل کی چادر سے بنی موج کے طول موج λ، زاویائی مستقل β یا دوری رفتار v_p حاصل کرتے وقت موج کی چادر کو کامل ہی تصور کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں تضعیفی مستقل α کا تخمینہ علیحدہ طور پر لگایا جاتا ہے۔

آخر میں مستطیلی موج میں عرضی برقی موج کی رکاوٹ Z_{yz} مساوات 13.52 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$Z_{yz} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{13.102}$$

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $\gamma = j\beta$ ہوتا ہے لہٰذا

$$Z_{yz} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{Z_z}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad (\Omega) \tag{13.103}$$

ہو گا جہاں

Z_z موج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ $Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$،

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج ،

λ_{0c} انقطاعی طول موج (انقطاعی تعدد پر لامحدود خطے میں طول موج)

ہیں۔ہوا کے لئے $Z_z = 120\pi = 376.7\,\Omega$ کے برابر ہے۔چونکہ Z_{yz} اور Z_z کی شرح بالکل v_p اور v_0 کی شرح کے برابر ہے لہٰذا شکل 13.13 $\frac{Z_{yz}}{Z_z}$ بالمقابل λ_0 بھی دیتا ہے۔

مشق 13.1: TE_{10}، TE_{20} اور TE_{11} امواج کی انقطاعی طول موج مندرجہ ذیل مستطیلی مویج کے لئے حاصل کریں۔

- ہوا سے بھرا مویج جس کے اطراف چار سنٹی میٹر اور دو سنٹی میٹر ہیں۔

- ہوا سے بھرا مویج جس کے دونوں اطراف چار سنٹی میٹر کے برابر ہیں۔

جوابات: پہلا مویج 8 cm، 4 cm، 3.577 cm۔ دوسرا مویج 8 cm، 4 cm، 5.656 cm

---

13.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج

عرضی برقی امواج حل کرنے کے آٹھ قدم صفحہ 650 پر بتلائے گئے۔انہیں آٹھ قدم سے شکل 13.9 کے مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی موج TM_{mn} بھی حاصل کئے جاتے ہیں۔فرق صرف اتنا ہے کہ یہاں $H_x = 0$ فرض کر کے مسئلہ حل کیا جاتا ہے۔TM_{mn} موج کہتے ہی اس موج کو ہیں جن میں $H_x = 0$ ہو۔آئیں TM_{mn} حاصل کرنے کے اہم نکات کا تذکرہ کریں۔

موج حاصل کرنے کے پہلے تین قدم میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی لہٰذا مساوات 13.14 تا مساوات 13.42 جوں

کے توں استعمال کئے جائیں گے۔ چوتھے قدم میں $H_x = 0$ پر کرنے سے

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \tag{13.104}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - Z H_y = 0 \tag{13.105}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - Z H_z = 0 \tag{13.106}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - Y E_x = 0 \tag{13.107}$$

$$\gamma H_z - Y E_y = 0 \tag{13.108}$$

$$-\gamma H_y - Y E_z = 0 \tag{13.109}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13.110}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{13.111}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 13.108 اور مساوات 13.109 سے

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{\gamma}{Y} \tag{13.112}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات کا مساوات 13.52 کے ساتھ موازنہ کریں۔ اگرچہ دونوں جگہ Z_{yz} کی تعریف $\frac{E_y}{H_z}$ ہی ہے لیکن دونوں جگہ اس شرح کی قیمت مختلف ہے۔ یہیں سے آپ توقع کر سکتے ہیں کہ TM_{mn} موج کی رکاوٹ TE_{mn} کے رکاوٹ سے مختلف ہو گی۔ یہاں Z_{yz} **عرضی مقناطیسی موج کی رکاوٹ**[17] کہلاتی ہے۔

پانچویں قدم میں تمام میدان کو E_x کی صورت میں حاصل کرنا ہے۔ مساوات 13.112 کو مساوات 13.105 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_y = \frac{Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{13.113}$$

اور اسی طرح مساوات 13.112 کو مساوات 13.106 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_z = \frac{-Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{13.114}$$

---

[17] transverse magnetic wave impedance

حاصل ہوتے ہیں۔ان دو مساوات اور مساوات 13.112 سے

$$E_y = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{13.115}$$

$$E_z = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{13.116}$$

لکھی جا سکتی ہے۔یوں پانچواں قدم پورا ہوتا ہے۔

چھٹے قدم میں E_x موج کی مساوات حاصل کرنے کی غرض سے مساوات 13.115 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 13.116 کا z کے ساتھ تفرق مساوات 13.110 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma E_x - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + (\gamma^2 + YZ) E_x = 0$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \tag{13.117}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$k^2 = \gamma^2 + YZ = \gamma \left(\gamma + \frac{Z}{Z_{yz}} \right) \tag{13.118}$$

کے برابر ہے۔مساوات 13.57 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کے k^2 مختلف قیمت رکھتے ہیں۔

ساتویں قدم پر مساوات 13.117 کا ایسا حل درکار ہے جو مستطیلی موج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط پر پورا اترتا ہو۔بالکل پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے

$$k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2 \tag{13.119}$$

اور میدان

$$E_x = E_0 \sin \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{13.120}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باری باری مساوات 13.113 تا مساوات 13.116 میں پر کرتے ہوئے

$$H_y = \frac{YE_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{13.121}$$

$$H_z = \frac{-YE_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{13.122}$$

$$E_y = \frac{-\gamma E_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{13.123}$$

$$E_z = \frac{-\gamma E_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{13.124}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان جوابات کے ساتھ

$$H_x = 0 \qquad \text{TM}_{mn} \text{ موج ہونے کا شرط} \tag{13.125}$$

شامل کرتے ہوئے تمام میدان حاصل ہوتے ہیں۔بے ضیاع ذو برق $(\sigma = 0)$ کی صورت میں مساوات 13.120 تا مساوات 13.125 میں $Y = j\omega\epsilon$ ہو گا۔

مساوات 13.120 تا مساوات 13.125 کی TM_{mn} امواج میں m یا n صفر کے برابر ہونے سے تمام میدان صفر ہو جاتے ہیں لٰہذا TM_{mn} کا کم سے کم تعددی موج TM_{11} ہے۔

بے ضیاع ذو برق $(\sigma = 0)$ تصور کرتے ہوئے، مساوات 13.118، مساوات 13.119 اور مساوات 13.33 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2 \mu\epsilon} \\ &= \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \end{aligned} \tag{13.126}$$

جہاں $\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ لامحدود وسعت کے خطے میں موج کا زاویائی مستقل β_0 ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں $k > \beta_0$ کی صورت میں $\gamma = \alpha + j\beta$ سے

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \qquad (k > \beta_0) \\ \beta &= 0 \end{aligned} \tag{13.127}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس صورت میں موج سفر نہیں کر پائے گی۔اس کے برعکس $k < \beta_0$ کی صورت میں

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \qquad (k < \beta_0) \end{aligned} \tag{13.128}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اس صورت میں موج، بغیر گھٹے موجِ میں سفر کرے گی۔انقطاعی تعدد ان دو تعددی خطوں کے عین درمیان پایا جائے گا جہاں γ کی قیمت حقیقی سے خیالی ہوتے ہوئے صفر سے گزرے گی۔مساوات 13.126 میں $\gamma = 0$ پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$\omega_c^2 \mu \epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{13.129}$$

یا

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \tag{13.130}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس طرح انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \tag{13.131}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \tag{13.132}$$

حاصل ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کی انقطاعی تعدد کی مساوات ہوبہو ایک جیسی ہیں۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $k < \beta_0$ کی صورت میں

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2} \tag{13.133}$$

ہو گا جس سے موج میں طول موج

$$\lambda_{\text{موج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{13.134}$$

اور موج میں دوری رفتار

$$\begin{aligned} v_p = \frac{\omega}{\beta} &= \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2-\left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \\ &= \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \end{aligned} \tag{13.135}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

v_0 لامحدود خطے میں دوری رفتار $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ جبکہ

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج (انقطاعی تعدد پر لامحدود خطے میں طول موج)

ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} کے دوری رفتار کی مساوات بھی ہوبہو یکساں ہیں۔

عرضی مقناطیسی موج کی رکاوٹ مساوات 13.112 سے

$$Z_{yz} = \frac{\gamma}{Y}$$

ہے جو انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $\gamma = j\beta$ کی صورت میں

$$Z_{yz} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = Z_z\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{13.136}$$

ہو گا جہاں

Z_z موج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ $Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$،

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

کے برابر ہیں۔ مساوات 13.136 کا مساوات 13.103 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کی رکاوٹ مختلف ہیں۔

ہم نے دیکھا کہ ہر بلند رتبی انداز کا اپنا مخصوص انقطاعی تعدد، رفتار اور رکاوٹ ہوتے ہیں۔ اگر تعدد اتنی ہو کہ مختلف بلند انداز موج میں سفر کر سکتے ہوں تب میدان ان تمام میدانوں کا مجموعہ ہو گا جو موج میں پائے جاتے ہوں۔

جدول 13.1 مستطیلی موج میں TE_{mn} موج کے متغیرات کے تعلق دیتا ہے۔ Z_{yz} کے علاوہ یہی تعلق TM_{mn} کے لئے بھی درست ہیں۔

جدول 13.1: مستطیلی موج میں TE_{mn} امواج کے متغیرات کے تعلق۔

نام تفاعل	اکائی	تعلق
انقطاعی تعدد	Hz	$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m}{z_1}\right)^2}$
انقطاعی طول موج	m	$\lambda_{0c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m}{z_1}\right)^2}}$
موج میں طول موج	m	$\lambda_{\text{موج}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$
دوری رفتار	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$
عرضی موج کی رکاوٹ	Ω	$Z_{yz} = \frac{Z_z}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$

13.5 کھوکھلی نالی موج

کھوکھلی نالی جس کا اندرونی رداس ρ ہو کے مسائل نلکی محدد میں باآسانی حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ایسے موج میں TE_{mn} یا TM_{mn} امواج حاصل کرنے کی خاطر نلکی محدد ہی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں بھی صفحہ 650 پر دیے آٹھ قدم لیتے ہوئے جواب حاصل کیا جائے گا۔ نلکی موج z محدد پر رکھا گیا ہے لہٰذا اس میں امواج z جانب حرکت کریں گے۔

میکس ویل کی گردش کی دو مساوات کو نلکی محدد میں لکھ کر

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi}-\frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{a}_\rho+\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi+\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -\mu\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial t}\boldsymbol{a}_\rho+\frac{\partial H_\phi}{\partial t}\boldsymbol{a}_\phi+\frac{\partial H_z}{\partial t}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)$$

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{a}_\rho+\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi+\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \sigma\left(E_\rho\boldsymbol{a}_\rho+E_\phi\boldsymbol{a}_\phi+E_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)+\epsilon\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial t}\boldsymbol{a}_\rho+\frac{\partial E_\phi}{\partial t}\boldsymbol{a}_\phi+\frac{\partial E_z}{\partial t}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)$$

محددی اجزاء علیحدہ علیحدہ لکھتے ہوئے مندرجہ ذیل چھ مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi}-\frac{\partial E_\phi}{\partial z}=-\mu\frac{\partial H_\rho}{\partial t} \tag{13.137}$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial \rho}=-\mu\frac{\partial H_\phi}{\partial t} \tag{13.138}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{13.139}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}=\sigma E_\rho+\epsilon\frac{\partial E_\rho}{\partial t} \tag{13.140}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial \rho}=\sigma E_\phi+\epsilon\frac{\partial E_\phi}{\partial t} \tag{13.141}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}=\sigma E_z+\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{13.142}$$

حاصل ہوتے ہیں جن کے ساتھ بار سے خالی $\rho_h = 0$ خطے میں پھیلاو کے دو مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{13.143}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho H_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \tag{13.144}$$

شامل کرتے ہیں۔

مساوات 13.137 تا مساوات 13.144 کو وقت کے ساتھ اور z فاصلے کے ساتھ سائن نما تعلق کا پابند ($E_\phi = E_1 e^{j\omega t - \gamma z}$) بناتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \gamma E_\phi - Z H_\rho = 0 \tag{13.145}$$

$$-\gamma E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - Z H_\phi = 0 \tag{13.146}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} - Z H_z = 0 \tag{13.147}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \gamma H_\phi - Y E_\rho = 0 \tag{13.148}$$

$$-\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - Y E_\phi = 0 \tag{13.149}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} - Y E_z = 0 \tag{13.150}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13.151}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho H_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \gamma H_z = 0 \tag{13.152}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}
Z &= -j\omega\mu \quad (\Omega/\mathrm{m}) && \text{سلسلہ وار رکاوٹ}\\
Y &= \sigma + j\omega\epsilon \quad (\mathrm{S/m}) && \text{متوازی فراوانی}\\
\gamma &= \alpha + j\beta && \text{حرکی مستقل}
\end{aligned}$$

ہیں۔

یہاں ہم عرضی برقی یا عرضی مقناطیسی موج منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ہم TE_{mn} منتخب کرتے ہوئے

آگے بڑھتے ہیں۔یوں $E_z = 0$ ہو گا جس سے

$$\gamma E_\phi - ZH_\rho = 0 \tag{13.153}$$
$$-\gamma E_\rho - ZH_\phi = 0 \tag{13.154}$$
$$\frac{E_\phi}{\rho} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} - ZH_z = 0 \tag{13.155}$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \gamma H_\phi - YE_\rho = 0 \tag{13.156}$$
$$-\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - YE_\phi = 0 \tag{13.157}$$
$$\frac{H_\phi}{\rho} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = 0 \tag{13.158}$$
$$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0 \tag{13.159}$$
$$\frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \gamma H_z = 0 \tag{13.160}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 13.147 میں $\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho}$ تفرق کو کھول کر $E_\phi + \rho\frac{\partial E_\phi}{\partial \rho}$ لکھا گیا ہے۔ایسا ہی بقایا تفرق کے ساتھ بھی کیا گیا ہے۔

تمام میدان کو H_z کی صورت میں لکھنے کی خاطر مساوات 13.153 اور مساوات 13.154 سے عرضی موج کی رکاوٹ $Z_{\rho\phi}$

$$Z_{\rho\phi} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = -\frac{E_\phi}{H_\rho} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{13.161}$$

لیتے ہیں۔ مساوات 13.161 سے E_ρ مساوات 13.156 میں پر کرتے ہوئے H_ϕ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_\phi = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} \tag{13.162}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 13.161 سے E_ϕ مساوات 13.157 میں پر کرتے ہوئے H_ρ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{13.163}$$

حاصل ہوتا ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات اور مساوات 13.161 سے

$$E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \tag{13.164}$$

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{13.165}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔یہ مساوات تمام میدان کو H_z کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

مساوات 13.164 کا ϕ تفرق، مساوات 13.165 کا ρ تفرق اور مساوات 13.165 کو مساوات 13.155 میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} - ZH_z = 0 \tag{13.166}$$

موج کی غیر سمتی مساوات حاصل ہوتی ہے۔اس میں

$$\frac{Z\left(\gamma - YZ_{\rho\phi}\right)}{Z_{\rho\phi}} = -k^2 \tag{13.167}$$

یعنی

$$k^2 = \gamma^2 + YZ \tag{13.168}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + k^2 H_z = 0$$

یا

$$\rho^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 H_z = -\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} \tag{13.169}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں

$$H_z(\rho, \phi) = M(\rho) N(\phi) \tag{13.170}$$

لکھ کر متغیرات کی علیحدگی ممکن ہے۔ایسا کرتے ہوئے

$$\rho^2 N \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho N \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 MN = -M \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔دونوں اطراف کو MN سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\rho^2}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2}+\frac{\rho}{M}\frac{\partial M}{\partial \rho}+k^2\rho^2=-\frac{1}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بایاں ہاتھ کا متغیرہ ρ ہے جبکہ دائیں ہاتھ کا متغیرہ ϕ ہے۔یوں دونوں اطراف کو مستقل n^2 کے برابر پر کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\frac{\rho^2}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2}+\frac{\rho}{M}\frac{\partial M}{\partial \rho}+k^2\rho^2=n^2 \tag{13.171}$$

$$-\frac{1}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}=n^2 \tag{13.172}$$

مندرجہ بالا میں نچلی مساوات کا حل

$$N=c_1\cos n\phi+c_2\sin n\phi \tag{13.173}$$

ہے جہاں c_1 اور c_2 مساوات کے مستقل ہیں۔

مساوات 13.171 کو

$$\rho^2\frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2}+\rho\frac{\partial M}{\partial \rho}+(k^2\rho^2-n^2)M=0 \tag{13.174}$$

لکھا جا سکتا ہے جو **بیسل مساوات**[18] کہلاتی ہے اور جس کا حل

$$M=c_3 J_n(k\rho)+c_4 N_n(k\rho) \tag{13.175}$$

لکھا جاتا ہے جہاں c_3 اور c_4 مساوات کے مستقل ہیں۔

یوں مساوات 13.170 سے

$$H_z=\left[c_3 J_n(k\rho)+c_4 Y_n(k\rho)\right]\left(c_1\cos n\phi+c_2\sin n\phi\right) \tag{13.176}$$

حاصل ہوتا ہے جس پر مندرجہ ذیل دو عدد سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

---

[18] Bessel's equation

کائنات میں کہیں پر بھی لا محدود میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا نلکی موج میں بھی میدان کی قیمت محدود ہو گی۔اس کے علاوہ موصل نلکی سطح پر برقی میدان صفر ہو گا، یعنی $(E_\phi(\rho_0) = 0)$، جہاں نلکی کا رداس ρ_0 کے برابر ہے۔

پہلی شرط کے تحت نلکی محدد میں میدان کی قیمت محدود ہے، لیکن $\rho = 0$ پر $Y_n \to \infty$ کی قیمت لا محدود ہوتی ہے لہٰذا مساوات 13.176 میں

$$c_4 = 0 \tag{13.177}$$

ہو گا۔اگر $c_2 = 0$ ہو تب میدان کی چوٹی $\phi = 0°$ پر ہو گی اور اگر $c_1 = 0$ ہو تب میدان کی چوٹی $n\phi = 90°$ پر ہو گی۔کسی اور زاویے پر چوٹی کی صورت میں دونوں مستقل پائے جائیں گے۔ہم چوٹی کو صفر زاویے پر تصور کرتے ہیں۔یوں

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k\rho) \tag{13.178}$$

ہو گا جہاں $c_1 c_3 = H_0$ لکھا گیا ہے۔اب چونکہ $\phi = 0$ اور $\phi = 2\pi$ ریڈیئن نلکی موج میں ایک ہی نقطے کو ظاہر کرتے ہیں لہٰذا دونوں زاویوں سے میدان برابر حاصل ہونا چاہیے۔یوں

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n = 1$ کی صورت میں نلکی میں $\phi = 0$ تا $\phi = 2\pi$ یعنی ایک چکر کاٹتے ہوئے H_z کی موج بوجہ $\cos n\phi$ کے ایک چکر کاٹے گا۔اسی طرح $n = 2$ کی صورت میں نلکی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان دو چکر کاٹتا ہے۔یوں نلکی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان کے چکر کی تعداد n دیتا ہے۔

نلکی موج میں موج کی مساوات

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{13.179}$$

ہو گی جہاں میدان کا وقت اور فاصلے کے ساتھ سائن نما تبدیلی کو بھی شامل کیا گیا ہے۔اس کو مساوات 13.165 میں پر کرتے ہوئے

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - Y Z_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d} J_n(k\rho)}{\mathrm{d}\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.180}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری سرحدی شرط کے تحت موصل نلکی سطح پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہٰذا مساوات 13.180 میں ρ_0 پر $E_\rho = 0$ پر کرتے ہوئے

$$\left. \frac{\mathrm{d} J_n(k\rho)}{\mathrm{d}\rho} \right|_{\rho_0} = 0 \tag{13.181}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$k\rho_0 = \alpha'_{nm} \tag{13.182}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں α'_{nm} **بیسل تفاعل** کے تفرق کے صفر[19] کہلاتے ہیں یعنی

$$\frac{\mathrm{d}J_n(\alpha'_{nm})}{\mathrm{d}\rho} = 0 \tag{13.183}$$

مساوات 13.182 سے حاصل k کو k'_{nm} لکھتے ہوئے یوں

$$k'_{nm} = \frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0} \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots) \tag{13.184}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 13.184 کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.185}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 13.162 تا مساوات 13.165 میں پر کرتے ہوئے بقایا تمام میدان

$$H_\phi = \frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.186}$$

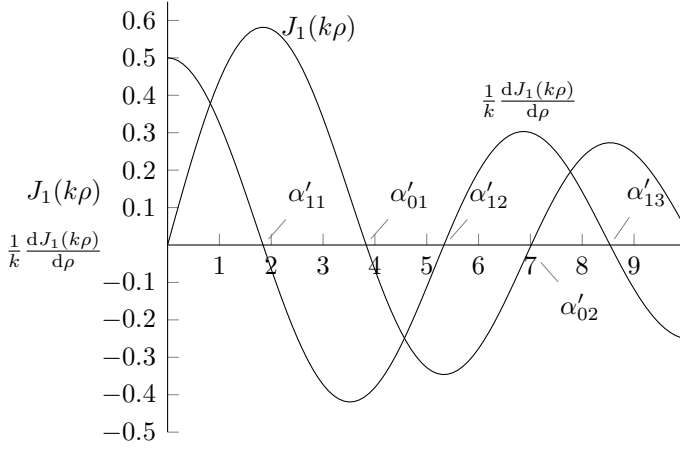
$$H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d}J_n(k'_{nm}\rho)}{\mathrm{d}\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.187}$$

$$E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.188}$$

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d}J_n(k'_{nm}\rho)}{\mathrm{d}\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.189}$$

$$E_z = 0 \tag{13.190}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں E_z بھی شامل کیا گیا ہے۔

آئیں k'_{nm} کو سمجھیں۔ اگر $n = 1$ ہو تب بیسل تفاعل J_1 اور اس کا تفرق $\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\rho}$ استعمال کئے جائیں گے۔ $\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\rho}$ کے پہلے تین صفر $\alpha'_{11} = 1.84$، $\alpha'_{12} = 5.33$ اور $\alpha'_{13} = 8.54$ ہیں جو بالترتیب TE_{11}، TE_{12} اور TE_{13} بلند عرضی

شکل 13.14: بیسل تفاعل۔

برقی امواج کے مستقل ہیں۔ شکل 13.14 میں انہیں دکھایا گیا ہے۔اسی طرح TE_{01} اور TE_{02} میں $n = 0$ ہے جبکہ $\alpha'_{01} = 3.832$ اور $\alpha'_{02} = 7.016$ ہیں۔بیسل تفاعل کے تفرق $\frac{dJ_0}{d\rho}$ اور J_1 کے صفر عین برابر ہوتے ہیں۔شکل میں یوں $\frac{dJ_0}{d\rho}$ کے صفر کو J_1 کے صفر سے حاصل کیا گیا دکھایا گیا ہے۔

کامل ذو برق کی صورت میں $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 13.184 کو مساوات 13.168 میں پر کرنے سے

$$\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

یا

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{13.191}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے تین صورتیں ممکن ہیں۔

- کم تعدد پر حقیقی γ ہو گا لہٰذا مویج غیر شفاف ہو گا اور موج اس میں سفر نہیں کر پائے گی۔
- مخصوص درمیانے تعدد پر $\gamma = 0$ حاصل ہو گا۔یہ انقطاعی تعدد ہو گی۔

[19] zeroes

- بلند تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہٰذا موتج شفاف ہو گا اور موج اس میں سفر کر پائے گی۔

مساوات 13.191 کو صفر کے برابر پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{k'_{nm}}{\rho_0} \qquad \text{(Hz)} \tag{13.192}$$

اور انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{k'_{nm}} \qquad \text{(m)} \tag{13.193}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں TE_{11} کے لئے $\alpha'_{11} = 1.84$ سے $\lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{1.84} = 3.41\rho_0$ حاصل ہو گا۔

انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر γ خیالی ہو گا لہٰذا اسے

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2} \qquad \text{(rad/m)} \tag{13.194}$$

لکھا جائے گا۔مندرجہ بالا دو مساوات کو ملا کر z سمت میں موتج میں طول موج

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad \text{(m)} \tag{13.195}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں

λ_0 موتج کے ذو برق سے بھرے لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔موتج میں دوری رفتار $v_p = f\lambda_g$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad \text{(m/s)} \tag{13.196}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ہے۔

مساوات 13.195 اور مساوات 13.196 ہوبہو مستطیلی موج کی مساوات ہیں۔یہی مساوات ہر شکل کے کھوکھلے موج کے لئے درست ثابت ہوتی ہیں۔

بیسل تفاعل کے صفر برابر فاصلوں پر نہیں پائے جاتے لہٰذا نلکی موج میں ممکنہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلے پر نہیں پائے جاتے۔اس کے برعکس مستطیلی موج میں یہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلوں پر پائے جاتے ہیں۔ نلکی موج میں TE_{11} تمام امواج، بشمول TM_{nm}، سے کم انقطاعی تعدد رکھتی ہے لہٰذا اسے غالب بلند رتبی انداز[20] کہتے ہیں۔TE_{01} بلند رتبی انداز نہایت کم تضعیف کا حامل ہے لہٰذا کم موصلیت کی چادر کی بنی موج میں اس کی اہمیت مزید بڑھ جاتی ہے۔

13.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف

ہم دیکھ چکے ہیں کہ انقطاعی تعدد سے کم تعدد کی موج تضعیف کا شکار ہوتی ہے اور یہ موج میں سفر کے قابل نہیں ہوتی۔آئیں تضعیف کی مقدار کا حساب لگائیں۔ مستطیلی موج میں مساوات 13.127

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2} \tag{13.197}$$

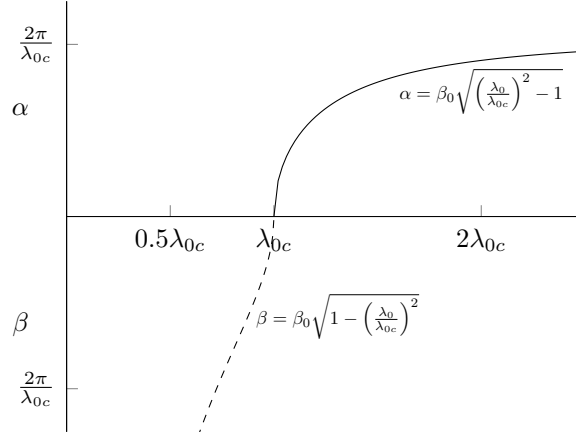
انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیفی مستقل دیتا ہے جسے مساوات 13.131 کی مدد سے

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2 - 1} = \beta_0\sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2 - 1} \quad (\text{Np/m}) \tag{13.198}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

λ_0 لا محدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

dominant mode[20]

شکل 13.15: حرکی مستقل بالمقابل طول موج۔ انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر تضعیفی مستقل صفر ہے جبکہ اس سے زیادہ طول موج پر زاویائی مستقل صفر ہے۔

ہیں۔ مساوات 13.198 ہر قسم کی شکل کے کھوکھلے موج کے لئے درست ہے۔

انقطاعی تعدد سے بہت کم تعدد $(\lambda_0 \gg \lambda_{0c})$ کی صورت میں مساوات 13.198 سے

$$\alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\,\text{Np/m} \tag{13.199}$$

$$= \frac{2\pi \times 8.69}{\lambda_{0c}} = \frac{54.6}{\lambda_{0c}}\,\frac{\text{dB}}{\text{m}} \tag{13.200}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 13.15 میں تضعیفی مستقل α بالمقابل لامحدود خطے میں طول موج λ_0 کو ٹھوس خط سے دکھایا گیا ہے۔ انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha = 0$ ہے۔

مثال 13.1: ایک موج کا انقطاعی طول موج $\lambda_{0c} = 50\,\text{mm}$ ہے۔ اس موج میں $\lambda_0 = 2\,\text{m}$ کی موج کی فی میٹر سفر کے دوران تضعیف دریافت کریں۔

حل: چونکہ $\lambda_0 \gg \lambda_{0c}$ ہے لہٰذا

$$\alpha = \frac{2\pi}{50 \times 10^{-3}} = 125.68\,\text{Np/m} \qquad \left(1092\,\frac{\text{dB}}{\text{m}}\right)$$

ہو گا۔یوں مویج میں بہت کم فاصلے پر موج کی قیمت انتہائی گھٹ جائے گی۔

13.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف

کامل موصل چادر سے بنا اور کامل ذو برق سے بھرا مویج بے ضیاع ہوتا ہے لہٰذا انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر $\alpha = 0$ ہو گا۔مساوات 13.128 سے

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2}\\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}\end{aligned}$$

یا

$$\beta = \beta_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{13.201}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 13.201 ہر قسم کی شکل کے کھوکھلے مویج کے لئے درست ہے۔شکل 13.15 میں نقطہ دار خط سے β دکھایا گیا ہے۔انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ ہے۔

شکل 13.15 میں طول موج کو افقی محدد اور حرکی مستقل کو عمودی محدد پر رکھا گیا ہے۔عین انقطاعی طول موج λ_{0c} پر $\gamma = 0$ یعنی $\alpha = 0$ اور $\beta = 0$ ہیں۔انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha = 0$ رہتا ہے جبکہ β کی قیمت طول موج کم کرنے سے لامحدود قیمت کی جانب بڑھتی ہے۔انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ رہتا ہے جبکہ α کی قیمت $\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}$ تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔

حقیقی مویج کامل نہیں ہوتے لہٰذا ان میں α صفر نہیں ہوتا۔بہتر موصل، مثلاً تانبہ، کی چادر سے بنے اور ہوا سے بھرے مویج میں α کی قیمت نہایت کم ہوتی ہے جبکہ β مندرجہ بالا مساوات کے عین مطابق ہوتا ہے۔آئیں حقیقی مویج میں α کی قیمت حاصل کریں۔

صفحہ 466 پر مساوات 10.56

$$\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}}$$

موج کی اوسط طاقت دیتی ہے۔کسی بھی موبیج میں میدان، مثلاً صفحہ 663 پر مساوات 13.85، میں حرکت کرتے میدان $e^{-\alpha x} e^{j(\omega t-\beta x)}$ خاصیت رکھتے ہیں۔یوں $\frac{E}{H} = Z$ لیتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{|E|^2}{Z_h}e^{-2\alpha x} = \frac{1}{2}Z_h|H|^2\, e^{-2\alpha x} = P_0 e^{-2\alpha x} \tag{13.202}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $x = 0$ پر اوسط طاقت P_0 کے برابر ہے، قدرتی رکاوٹ Z کے حقیقی جزو کو Z_h اور $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}^* = |E|^2$ لکھے گئے ہیں۔اس مساوات سے

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}}{P} \qquad (\mathrm{Np/m}) \tag{13.203}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ کو P لکھا گیا ہے۔مساوات 13.203 میں کسی بھی نقطے پر x سمت میں P طاقت منتقل ہو رہا ہے جبکہ اسی نقطے پر $-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ طاقت کے ضیاع کو ظاہر کرتا ہے۔تضعیفی مستقل کی اس مساوات میں طاقت کا ضیاع، موبیج کی دیواروں میں پیدا برقی رو سے مزاحمتی برقی ضیاع (I^2R_c) ہے جو حرارت میں تبدیل ہوتا ہے۔انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر موبیج کے تضعیفی مستقل پر طاقت کا ضیاع عمل درآمد نہیں ہوتا۔انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر امواج نہ گزارنے کی معزوری کو α سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں موبیج میں موج نہیں گزر پاتی بلکہ یہ انعکاس پذیر ہوتی ہے۔

مساوات 13.203 کو یوں پڑھا جا سکتا ہے

$$\alpha = \frac{\text{طاقت کا ضیاع فی اکائی لمبائی}}{\text{منتقل طاقت کا دگنا}}$$

کامل ذو برق سے بھرے موبیج میں ذو برق کا ضیاع صفر ہو گا۔ایسی صورت میں صرف موبیج کے چادروں میں مزاحمتی ضیاع پایا جائے گا لہٰذا اکائی لمبائی میں طاقت کا ضیاع

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x}\int\int \mathscr{P}_{\text{چادر}}\,\mathrm{d}S = \int \mathscr{P}_{\text{چادر}}\,\mathrm{d}l \tag{13.204}$$

ہو گا جہاں $\mathscr{P}_{\text{چادر}}$ سے مراد وہ اوسط طاقت (وقت کے مطابقت سے اوسط) ہے جو موجی کے دیواروں کے موصل چادروں میں منتقل ہو رہا ہے۔مساوات 13.204 میں سطح کا چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}S$ موجی کے اندرونی سطح پر لیا جاتا ہے۔اس رقبے کی لمبائی $\mathrm{d}x$ اور چوڑائی $\mathrm{d}l$ ہے جہاں l اندرونی سطح پر ایک چکر کے برابر ہے۔شکل 13.9 کے مستطیلی موجی کی صورت میں $l = 2(y_1 + z_1)$ کے برابر ہو گا۔مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ سے موصل چادر میں منتقل طاقت کو

$$\mathscr{P}_{\text{چادر}} = \frac{1}{2} Z_{c,h} |H_m|^2 \tag{13.205}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_m چادر کے متوازی میدان اور Z_c چادر کے موصل کی قدرتی رکاوٹ ہے جس کا حقیقی جزو $Z_{c,h}$ ہے۔چادر کے متوازی میدان کی مطلق قیمت $|H_m|$ ہے۔چونکہ موصل میں $\sigma \gg j\omega\epsilon$ ہوتا ہے لہٰذا

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} =\approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

ہو گا جس سے

$$Z_{c,h} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 13.204 کو

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{Z_{c,h}}{2} \int |H_m|^2 \,\mathrm{d}l \tag{13.206}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

موجی میں کسی بھی نقطے پر لمبائی کے جانب منتقل طاقت کو

$$P = \frac{Z_{yz,h}}{1} \int\int |H_\perp|^2 \,\mathrm{d}S \tag{13.207}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $H_\perp$ سے مراد وہ میدان ہے جو موج کی حرکت کے عمودی ہے۔اس میدان کو موجی کی سطح کے عمودی تراش کے متوازی بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں Z_{yz} موجی کی قدرتی رکاوٹ ہے جس کے حقیقی جزو کو $Z_{yz,h}$ لکھا گیا ہے۔اس طرح تضعیفی مستقل کو

$$\alpha = \frac{Z_{c,h} \int |H_m|^2 \,\mathrm{d}l}{2 Z_{yz,h} \int\int |H_\perp|^2 \,\mathrm{d}S} \qquad (\mathrm{Np/m}) \tag{13.208}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 13.208 تمام موج کے تمام بلند انداز کے لئے درست ہے۔کسی بھی بلند انداز کا تضعیفی مستقل حاصل کرتے وقت اسی بلند انداز کے میدان مساوات 13.208 میں پر کئے جائیں گے۔بہتر موصل سے بنے موج کی صورت میں کامل موصل کے لئے حاصل کردہ میدان ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔مساوات 13.208 کا استعمال مندرجہ ذیل مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 13.2: دو متوازی چادروں کے موج کو صفحہ 641 پر شکل 13.1 میں دکھایا گیا ہے۔اس موج میں 450 Hz کے TEM موج کا تضعیفی مستقل حاصل کریں۔چادروں کے درمیان فاصلہ 20 cm ہے۔

حل: مساوات 13.208 سے

$$\alpha = \frac{2Z_{c,h}\int_0^{y_1}\left|H_m\right|^2 \mathrm{d}y}{2Z_{yz,h}\int_0^{y_1}\int_0^{z_1}\left|H_\perp\right|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y}$$

لکھا جائے گا جہاں کسر کے بالائی حصے میں دونوں اطراف کی چادروں میں طاقت کے ضیاع کی وجہ سے ضرب دو لکھا گیا ہے۔اس موج میں TEM موج کے میدان حرکت کی سمت کے عمودی اور چادروں کے متوازی ہیں۔یوں مقناطیسی میدان $H\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ہے جو چادروں کے متوازی اور موج کی حرکت کے عمودی ہے۔یوں H_m اور $H_\perp$ دونوں $H\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ہی ہیں لہٰذا

$$\alpha = \frac{Z_{c,h}y_1}{Z_{yz,h}y_1z_1} = \frac{Z_{c,h}}{z_1Z_{yz,h}}$$

ہو گا۔تانبے میں 450 MHz پر

$$\begin{aligned}Z_c &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}\\ &= \sqrt{\frac{j2\times\pi\times 450\times 10^6\times 4\times\pi\times 10^{-7}}{5.8\times 10^7 + j2\times\pi\times 450\times 10^6\times 8.854\times 10^{-12}}}\\ &= 0.0055 + j0.0055\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا حقیقی جزو $Z_{c,h} = 0.0055$ اوہم ہے۔ہوا کے لئے $Z_{yz,h} = Z_{yz} = 376.7\,\Omega$ ہے۔ان نتائج کے تحت

$$\alpha = \frac{0.0055}{0.2 \times 376.7} = 73\,\mu\text{Np/m}$$

ہو گا۔یوں ایک کلو میٹر فاصلہ طے کرنے پر میدان کی قیمت ابتدائی قیمت کے $e^{-0.073} = 0.9296$ یعنی 92.96 فی صد ہو گی۔

مثال 13.3: تانبے کی وسیع چادر کے متوازی $2\,\text{cm}$ چوڑائی تانبے کی پٹی $1\,\text{mm}$ کے فاصلے پر پائی جاتی ہے۔پٹی اور چادر کے درمیان $\epsilon_R = 2.7$ کا ذو برق بھرا گیا ہے۔اس ذو برق میں $E_{\text{موثر}} = 200\,\frac{\text{mV}}{\text{m}}$ برقی شدت اور $600\,\text{MHz}$ تعدد کی TEM موج پائی جاتی ہے۔ الف) اوسط منتقل طاقت دریافت کریں۔ ب) فی میٹر فاصلہ طے کرتے ہوئے تانبے میں کل توانائی کا ضیاع دریافت کریں۔پ) تضعیفی مستقل حاصل کریں۔

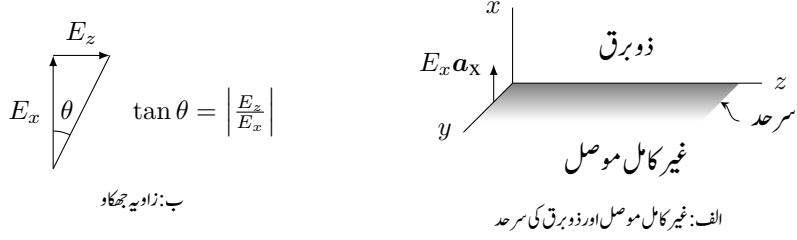
حل:ذو برق اور تانبے کے قدرتی رکاوٹ بالترتیب

$$Z_z = \frac{\mu_0}{2.7\epsilon_0} = 227\,\Omega$$
$$Z_c = \sqrt{\frac{j2 \times \pi \times 600 \times 10^6 \times 4 \times \pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7 + j2 \times \pi \times 600 \times 10^6 \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 0.00639(1 + j)\,\Omega$$

ہیں۔برقی میدان تانبے کے عمودی ہو گا لہٰذا تانبے کے متوازی مقناطیسی میدان کی موثر قیمت

$$H_{\text{موثر}} = \frac{E_{\text{موثر}}}{Z_z} = \frac{0.2}{227} = 0.881\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$$

ہو گی۔موتیج کا رقبہ عمودی تراش $S = 2\,\text{cm} \times 1\,\text{mm}$ ہے۔یوں منتقل طاقت

$$P_{\text{منتقل}} = \frac{E^2}{2Z_z}S = \frac{E_{\text{موثر}}}{Z_z}S = \frac{0.2^2}{227} \times 0.02 \times 0.001 = 3.49\,\text{nW}$$

شکل 13.16: دو خطوں کے سرحد پر امواج۔

ہو گی جبکہ تانبے کی پٹی اور تانبے کی چادر میں پٹی کے برابر حصے میں مل کر کل طاقت کا ضیاع

$$\begin{aligned} P_{\text{ضیاع}} &= 2\frac{Z_{c,h}H^2}{2}S = 2Z_{c,h}H^2_{\text{موثر}}S \\ &= 2 \times 0.00639 \times \left(0.881 \times 10^{-3}\right)^2 \times 0.02 \times 0.001 \\ &= 0.195\,\frac{\mathrm{nW}}{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

ہو گا۔ اس طرح تضعیفی مستقل

$$\alpha = \frac{0.195 \times 10^{-9}}{3.49 \times 10^{-9}} = 55\,\frac{\mathrm{mNp}}{\mathrm{m}} \qquad \left(0.48\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔

13.8 سطحی موج

غیر کامل موصل اور ذو برق کی سطح شکل 13.16-الف میں $x = 0$ پر دکھائی گئی ہے۔ سطح کے نیچے $(x < 0)$ غیر کامل موصل جبکہ اس کے اوپر $(x > 0)$ ذو برق ہے۔ سطح کے ساتھ ساتھ TEM موج z سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ آئیں اس مسئلے کو حل کریں۔

اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے تصور کیا جائے گا کہ موج میں y کی تبدیلی سے کوئی تبدیلی رو نما نہیں ہوتی۔ یوں $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ہو گا۔ چونکہ موج z سمت حرکت کر رہی ہے لہٰذا تمام میدان

$$H = H_0 e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.209}$$

خاصیت رکھتے ہیں۔ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے، سطح سے اوپر ذو برق میں مساوات 13.16 تا مساوات 13.23 مندرجہ ذیل صورت اختیار کر لیتے ہیں

$$\gamma_1 E_y + j\omega\mu_1 H_x = 0 \tag{13.210}$$

$$-\gamma_1 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_y = 0 \tag{13.211}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_z = 0 \tag{13.212}$$

$$\gamma_1 H_y - j\omega\epsilon_1 E_x = 0 \tag{13.213}$$

$$-\gamma_1 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_y = 0 \tag{13.214}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_z = 0 \tag{13.215}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_1 E_z = 0 \tag{13.216}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_1 H_z = 0 \tag{13.217}$$

جہاں زیر نوشت میں 1 سرحد سے اوپر ذو برق کے خطے کو ظاہر کرتا ہے۔مساوات 13.213 سے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ Z_z

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\gamma_1}{j\omega\epsilon_1} = Z_z \tag{13.218}$$

لکھی جا سکتی ہے۔موج کی غیر سمتی مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 13.213 سے E_x اور مساوات 13.215 سے E_z کو مساوات 13.211 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_1^2}{j\omega\epsilon_1} H_y - \frac{1}{j\omega\epsilon_1}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega\mu_1 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left(\gamma_1^2 + \omega^2\mu_1\epsilon_1\right) H_y = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_1^2 H_y \tag{13.219}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_1^2 = -\left(\gamma_1^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1\right) \tag{13.220}$$

کے برابر ہے۔مساوات 13.219 کا حل

$$H_y = c_1 e^{-k_1 x} + c_2 e^{k_1 x}$$

ہے۔ذو برق میں x کی قیمت 0 تا ∞ ممکن ہے۔اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے $x \to \infty$ پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لہٰذا اسے رد کرتے ہوئے $c_2 = 0$ لیا جاتا ہے۔ اور یوں

$$H_y = c_1 e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{ذو برق خطہ} \tag{13.221}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 13.209 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

موصل خطے کے لئے میکس ویل کی مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\gamma_2 E_y + j\omega\mu_2 H_x = 0 \tag{13.222}$$

$$-\gamma_2 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_2 H_y = 0 \tag{13.223}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_2 H_z = 0 \tag{13.224}$$

$$\gamma_2 H_y - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_x = 0 \tag{13.225}$$

$$-\gamma_2 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_y = 0 \tag{13.226}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_z = 0 \tag{13.227}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_2 E_z = 0 \tag{13.228}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_2 H_z = 0 \tag{13.229}$$

موج کی غیر سمتی مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 13.225 سے E_x اور مساوات 13.227 سے E_Z کو مساوات 13.223 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_2^2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} H_y - \frac{1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega\mu_2 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+\left[\gamma_2^2-j\omega\mu_2\left(\sigma_2+j\omega\epsilon_2\right)\right]H_y=0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}=k_2^2 H_y \tag{13.230}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_2^2=-\gamma_2^2+\gamma_m^2 \tag{13.231}$$
$$\gamma_m^2=j\omega\mu_2\left(\sigma_2+j\omega\epsilon_2\right) \tag{13.232}$$

کے برابر ہیں۔

مساوات 13.230 کا حل

$$H_y=c_3e^{-k_2x}+c_4e^{k_2x}$$

ہے۔موصل میں x کی قیمت 0 تا $-\infty$ ممکن ہے۔اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے $x\to-\infty$ پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لہٰذا اسے رد کرتے ہوئے $c_3=0$ لیا جاتا ہے اور یوں

$$H_y=c_4e^{k_2x}e^{j\omega t-\gamma_2 z}\qquad\text{موصل خطہ} \tag{13.233}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 13.209 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

مقناطیسی سرحدی شرط کے تحت سرحد کے دونوں اطراف تمام اوقات متوازی مقناطیسی میدان برابر ہوں گے لہٰذا $x=0$ پر کسی بھی z پر تمام t کے لئے مساوات 13.221 اور مساوات 13.233 برابر ہوں گے جس سے

$$\gamma_1=\gamma_2 \tag{13.234}$$
$$c_1=c_4=H_{y0} \tag{13.235}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں مستقل c_1 اور مستقل c_4 کو H_{y0} لکھا گیا ہے۔ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے ذو برق میں مساوات 13.213 سے E_x اور مساوات 13.215 سے E_z یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}E_x&=\frac{\gamma_1 H_{y0}}{j\omega\epsilon_1}e^{-k_1x}e^{j\omega t-\gamma_1 z}\\E_z&=\frac{-k_1 H_{y0}}{j\omega\epsilon_1}e^{-k_1x}e^{j\omega t-\gamma_1 z}\qquad\text{ذو برق خطہ}\end{aligned} \tag{13.236}$$

اسی طرح ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصل میں مساوات 13.225 سے E_x اور مساوات 13.227 سے E_z یوں حاصل ہوتے ہیں

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 H_{y0}}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{k_2 H_{y0}}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \end{aligned} \quad \text{موصل خطہ} \tag{13.237}$$

جہاں $H_{y0} = c_1 = c_4$ اور $\gamma_1 = \gamma_2$ پر کئے گئے ہیں۔

سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہونے کی شرط سے $x = 0$ پر دونوں اطراف E_z برابر ہوں گے جس سے

$$\frac{-k_1}{j\omega\epsilon_1} = \frac{k_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}$$

یعنی

$$k_1 = \frac{-j\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} k_2 \tag{13.238}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 13.220 سے

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 - k_1^2 \\ &= -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \right)^2 k_2^2 \\ &= -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \right)^2 \left(-\gamma_2^2 + \gamma_m^2 \right) \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں پہلے قدم پر مساوات 13.238 اور دوسرے قدم پر مساوات 13.231 کا استعمال کیا گیا ہے۔اس میں مساوات 13.234 سے $\gamma_1 = \gamma_2$ پر کرتے ہوئے

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{-\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \right)^2 \gamma_m^2}{1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \right)^2}} \tag{13.239}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 13.236 میں E_x سرحد کے عمودی ہے جبکہ E_z سرحد کے متوازی ہے۔کل برقی میدان ان دونوں کا سمتی مجموعہ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کل میدان حرکت کی سمت میں جھکا ہو گا۔شکل 13.16-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ جھکنے کا زاویہ

$$\theta = \tan^{-1} \frac{|E_z|}{|E_x|} = \tan^{-1} \left| \frac{-k_1}{\gamma_1} \right| \tag{13.240}$$

ہو گا۔

آئیں چند مخصوص سرحدوں پر موج کے جھکاو کا زاویہ حاصل کریں۔

ہوا اور تانبے کی سرحد پر $\omega = 100\,\mathrm{Mrad/s}$ تعدد کی موج کی بات کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_2 = \epsilon_0 \\
\mu_1 &= \mu_2 = \mu_0 \\
\sigma_2 &= 5.8 \times 10^7
\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = \gamma_2 &= j0.33356 \\
k_1 &= 0.9215(1-j) \times 10^{-6} \\
k_2 &= 6.038(1-j) \times 10^4
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{0.9215(1-j) \times 10^{-6}}{j0.33356} \right| = 0.00022385^\circ$$

زاویہ حاصل ہوتا ہے۔اس نتیجے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل کے سرحد پر برقی میدان تقریباً عمودی ہی ہوتا ہے۔برقی میدان کا عمودی یعنی E_x حصہ حرکت موج کی سمت میں طاقت منتقل کرتا ہے جبکہ E_z حصہ موصل میں طاقت منتقل کرتا ہے جو ضائع ہو جاتا ہے۔

ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کی سرحد پر $\omega = 100\,\mathrm{Mrad/s}$ تعدد کی موج کی بات کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_0 \\
\epsilon_2 &= 78\epsilon_0 \\
\mu_1 &= \mu_2 = \mu_0 \\
\sigma_2 &= 0
\end{aligned}$$

سے

$$\gamma_1 = \gamma_2 = j0.33144$$
$$k_1 = j0.037528$$
$$k_2 = 2.9272$$

حاصل ہوتے ہیں جو

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{j0.037528}{j0.33144}\right| = 6.46^\circ$$

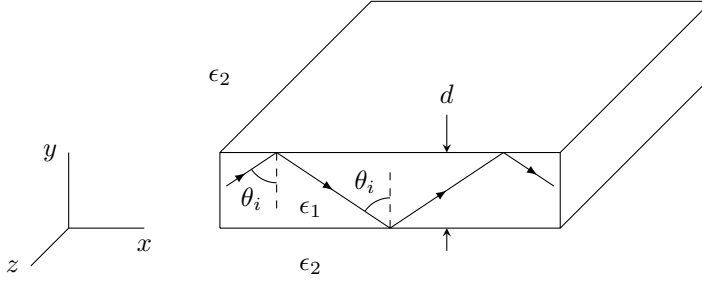
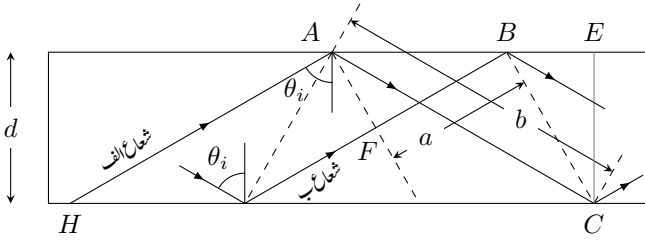
زاویہ دیتا ہے۔ہوا اور پانی کی سرحد پر برقی میدان کا جھکاو باآسانی ناپا جا سکتا ہے۔

13.9 ذو برق تختی مویج

اب تک ہم موصل چادروں سے بنائے گئے مویج پر غور کرتے رہے ہیں۔اس حصے میں ذو برق سے بنائے گئے مویج پر غور کیا جائے گا۔ شکل 13.17 میں d موٹائی اور لامحدود وسعت کے ذو برق کا تختہ دکھایا گیا ہے۔اس تختے میں بائیں طرف سے TEM موج داخل کی جاتی ہے۔ ہم تختے میں پیدا کردہ موج کی حرکت پر غور کریں گے۔یہ موج تختے میں بائیں سے دائیں یعنی بڑھتے x جانب حرکت کرے گی۔جب تک ذو برق کے نچلے اور بالائی سطحوں پر آمدی زاویہ کی قیمت فاصل زاویے سے زیادہ ہو، موج مکمل اندرونی انعکاس کرے گی۔یوں ذو برق میں بار بار انعکاس کرتے ہوئے موج سفر کرے گی۔ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج انعکاس کر رہی ہے۔حقیقت میں موصل چادروں کی صورت میں چادر پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا جبکہ ذو برق میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں ایسا نہیں ہوتا۔ ذو برق کے باہر میدان لامحدود فاصلے تک پہنچتا ہے البتہ ایسا میدان سرحد سے دور جلد قابل نظر انداز حد تک گھٹ جاتا ہے۔ یوں میدان ذو برق کے انتہائی قریب ہی رہتا ہے۔

اگرچہ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جب تک آمدی زاویہ، فاصل زاویے سے زیادہ ہو، موج ذو برق میں سفر کر پائے گی، حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا۔موج مخصوص زاویوں پر ہی سفر کر پاتی ہے۔آئیں اس کی وجہ پر غور کریں۔شکل کو دیکھتے ہوئے، دو TEM امواج پر نظر رکھیں جن کی تعدد برابر ہے۔دونوں فاصل زاویے سے زیادہ زاویے پر آمد ہیں یعنی $\theta > \theta_{ic}$ ہے۔یوں

$$\theta_i > \theta_{ic} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sin^{-1}\frac{n_2}{n_1} \tag{13.241}$$

ہو گا جہاں

شکل 13.17: ذو برق تختی موج میں اندرونی مکمل انعکاس سے موج سفر کرتی ہے۔

شکل 13.18: ذو برق تختے کے اندرونی سطح پر ممکنہ آمدی زاویے۔

اور $\epsilon_1 > \epsilon_2$

ϵ_1 ذو برق تختے کا برقی مستقل،

ϵ_2 ذو برق تختے کے اوپر اور نیچے خطوں کا برقی مستقل

ہیں۔

شکل 13.18 میں شعاعوں کو ٹھوس لکیر جبکہ موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔موج کی ترسیل کے لئے ضروری شرط یہ ہے کہ پہلی موج کا زاویائی ہٹاو a دوسری موج کے زاویائی ہٹاو b کے برابر ہو اور یا ان میں فرق $2m\pi$ ہو جہاں $m = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔زاویائی ہٹاو ناپتے وقت انعکاس سے پیدا زاویائی فرق کا بھی حساب رکھا جائے گا۔ اس شرط کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 (b - a) + \phi = 2m\pi \tag{13.242}$$

جہاں

$m = 0, 1, 2, \cdots$

n_1 پہلے خطے کا انعطافی مستقل $n_1 = \sqrt{\epsilon_{R1}}$ جبکہ

ϕ سطح سے انعکاس پر زاویائی فرق،

λ_0 خلاء میں طول موج

ہیں۔ شکل 13.18 کو دیکھ کر

$$b = \frac{d}{\cos\theta_i} \tag{13.243}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح تکون ΔAEC، تکون ΔBEC اور تکون ΔAFB سے بالترتیب

$$\begin{aligned} AB + BE &= d\tan\theta_i \\ \tan\theta_i &= \frac{d}{BE} \\ \sin\theta_i &= \frac{a}{AB} \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ یوں مساوات 13.242 کو

$$\frac{2\pi n_1 d}{\lambda_0}\left[\frac{1}{\cos\theta_i} - \sin\theta_i\left(\tan\theta_i - \frac{1}{\tan\theta_i}\right)\right] + \phi = 2m\pi \tag{13.244}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کی سادہ صورت

$$\frac{4\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0} + \phi = 2m\pi \tag{13.245}$$

ہے۔ عمودی برقی میدان $\boldsymbol{E}_\perp$ کو لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ صفحہ 610 پر مساوات 12.30 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - j\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos\theta_i + j\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = 1\underline{/\phi} \tag{13.246}$$

جہاں

$$\phi=-2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos\theta_i} \tag{13.247}$$

کے برابر ہے۔

اس طرح شرح انعکاس Γ کی مطلق قیمت اکائی ہے جبکہ انعکاس سے پیدا زاویائی فرق ϕ ہے۔مساوات 13.246 کو مساوات 13.245 میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{4\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0}-2m\pi=2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-\frac{\epsilon_2}{\epsilon-1}}}{\cos\theta_i} \tag{13.248}$$

یا

$$\tan\left(\frac{2\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0}-m\pi\right)=\frac{\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_i-n_2^2}}{n_1\cos\theta_i} \tag{13.249}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

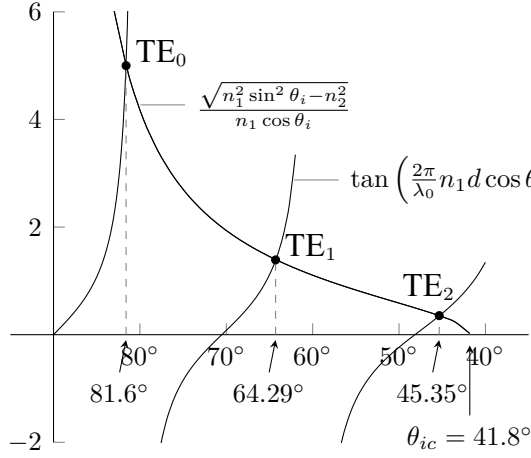
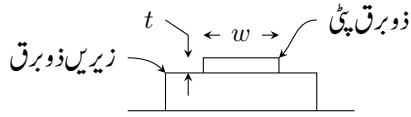
$m=0,1,2,3,\cdots$ جبکہ

n_1 پہلے خطے کا انعطافی مستقل $n_1=\sqrt{\epsilon_{R1}}$ ہے،

n_2 ذو برق تختے سے اوپر اور اس سے نیچے خطے کا انعطافی مستقل $n_2=\sqrt{\epsilon_{R2}}$ ہے،

d ذو برق تختے کی موٹائی،

θ_i آمدی زاویہ اور

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج

شکل 13.19: تختی مویج میں شعاع کے ممکن زاویے۔

شکل 13.20: ذوبرق پٹی مویج

ہیں۔

چادر کی چوڑائی کم کرتے ہوئے w کرنے سے ذو برقی پٹی مویج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 13.20 میں دکھایا گیا ہے جہاں $w \gg t$ ہے۔ ذو برق پٹی سے کم انعطافی مستقل کے زیریں ذو برق[21] پر عموماً یہ نسب کئے جاتے ہیں۔

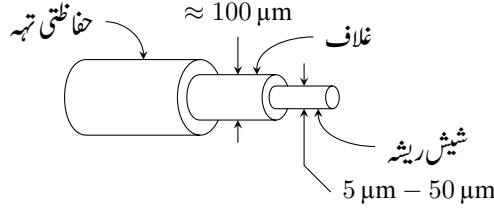
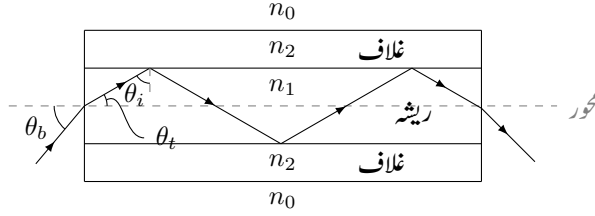
مثال 13.4: ذو برق کے $10\,\mathrm{mm}$ موٹی تختے کو بطور مویج استعمال کیا جا رہا ہے۔اس تختے کا انعطافی مستقل $n_1 = 1.5$ ہے جبکہ تختے سے اوپر اور نیچے خطے کا انعطافی مستقل $n_2 = 1$ ہے۔ برقی میدان تختے کے متوازی ہے یعنی شکل 13.17 میں x سمت کو ہے۔طول موج $\lambda_0 = 10\,\mathrm{mm}$ کی صورت میں آمدی زاویہ θ_i حاصل کریں۔

حل: برقی میدان تختے کے متوازی لیکن موج کی حرکت کی سمت کے عمودی ہے۔مساوات 13.241 سے زاویہ فاصل

$$\theta_{ic} = \sin^{-1}\frac{1}{1.5} = 41.8^\circ \tag{13.250}$$

حاصل ہوتا ہے۔زاویے کو θ_{ic} سے زیادہ رکھتے ہوئے، مساوات 13.249 کے بائیں اور دائیں ہاتھ کو شکل 13.19 میں کھینچا گیا ہے جس سے ممکنہ زاویے 45.35°، 64.29° اور 81.6° حاصل ہوتے ہیں۔یہ زاویے TE_0، TE_1 اور TE_2 امواج کے لئے ہیں۔تینوں امواج بیک وقت مویج میں پائے جا سکتے ہیں۔ تختے کی موٹائی کم یا زیادہ کرنے سے امواج کی ممکنہ تعداد بالترتیب زیادہ یا کم ہو گی۔اسی طرح طول موج زیادہ (کم) کرنے سے ممکنہ امواج کی تعداد کم (زیادہ) ہو گی۔ہاں کسی بھی صورت کم از کم ایک موج ضرور ممکن ہو گی لہٰذا تعدد کم کرتے کرتے صفر تک پہنچتے ہوئے بھی کوئی نہ کوئی موج ضرور ممکن ہو گی۔

---

[21] dielectric substrate

الف: شیش ریشے کی بنیادی ساخت

ب: شیش ریشے میں شعاع کے زاویے

شکل 13.21: شیش ریشے کی ساخت اور ممکنہ آمدی زاویے

13.10 شیش ریشہ

ذو برق تختی مویج پر غور کے بعد ذو برق نلکی مویج پر غور کرتے ہیں۔ذرائع ابلاغ کے نظام میں اس طرز کے نلکی مویج جنہیں *شیش ریشہ*[22] کہتے ہیں، عام استعمال ہوتا ہے۔ بصری طول موج یا اس کے قریب طول موج پر استعمال کئے جانے والی نلکی مویج کا رداس انتہائی کم ہوتا ہے۔یہ n_1 شرح انعطاف کے انتہائی شفاف شیشے سے بنایا جاتا ہے جسے قدر کم شرح انعطاف n_2 کے شیشے کا غلاف پہنایا جاتا ہے۔ان دونوں پر غیر شفاف حفاظتی تہہ چڑھائی جاتی ہے۔شیش ریشے کے مرکزی ریشے کا عمومی قطر $25\,\mu m$ ہے جو انسانی سر کے بال جتنی موٹائی ہے۔ایک شیش ریشہ ہزار سے زائد دو طرفہ گفتگو کی ترسیل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔روشنی یا *زیریں بصری*[23] شعاعوں کے لئے شیش ریشے کی تضعیفی مستقل $1.15 \times 10^{-4}\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ کے برابر ہوتی ہے جو ایک انتہائی کم مقدار ہے۔بصری اور زیریں بصری شعاعوں کے طول موج تقریباً $400\,\mathrm{nm}$ تا $1000\,\mathrm{nm}$ ہے۔

شکل 13.21-الف میں شیش ریشے کی ساخت دکھائی گئی ہے۔اندرونی شفاف ریشے کا انعطافی مستقل n_1 جبکہ غلاف کا انعطافی مستقل n_2 ہے۔ارد گرد خلاء کا انعطافی مستقل n_0 ہے۔جیسے شکل 13.21-ب میں دکھایا گیا ہے، بیرون

[22] optical fiber
[23] infrared

تار محور کے ساتھ θ_b زاویے پر آمدی شعاع تار کے اندر θ_t زاویے پر داخل ہو گا۔یوں شفاف ریشے اور غلاف کی سرحد پر شعاع کا زاویہ θ_i ہو گا۔بیرونی اور اندرونی زاویوں کا تعلق ابن سھل کا قانون

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_b}=\frac{n_0}{n_1} \tag{13.251}$$

دیتا ہے۔جب تک مرکزی ریشے اور غلاف کے سرحد پر آمدی زاویہ θ_i، فاصل زاویے θ_{ic} سے زیادہ ہو، شعاع مکمل اندرونی انعکاس کرے گی۔شیش ریشے اور غلاف کی سرحد پر قانون ابن سھل

$$\sin\theta_{ic}=\frac{n_2}{n_1} \tag{13.252}$$

سے فاصل زاویہ θ_{ic} حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$\sin\theta_b=\frac{n_1}{n_0}\sin\theta_t=\frac{n_1}{n_0}\sin(90^\circ-\theta_{ic})=\frac{n_1}{n_0}\cos\theta_{ic}$$

یا

$$\sin\theta_b=\frac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{n_0} \tag{13.253}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

θ_b بیرون تار، محور کے ساتھ آمدی زاویہ،

n_1 شیش ریشے کا انعطافی مستقل،

n_2 شیش ریشے پر چڑھی تہہ کا انعطافی مستقل اور

n_0 تار کے گرد خطے کا انعطافی مستقل

ہیں۔خلاء اور ہوا کی صورت میں $n_0=1$ ہو گا لہٰذا

$$\sin\theta_b=\sqrt{n_1^2-n_2^2} \tag{13.254}$$

ہو گا۔

شیش ریشے اور غلاف کے انعطافی مستقل تقریباً $n_1 = 1.5$ اور $n_2 = 1.485$ ہوتے ہیں جس سے $\theta_b = 12.2°$ حاصل ہوتا ہے۔یوں جو شعاع شیش ریشے کے محور پر $\theta_b < 12.2°$ زاویے سے آمد ہو شیش ریشے میں پھنس جائے گی۔یہ شعاع شیش ریشے میں بار بار مکمل اندرونی انعکاس کرتے ہوئے سفر کرے گی۔شیش ریشے میں کئی بلند انداز شعاع ممکن ہیں اور تختی موئیج کی طرح یہاں بھی ایک عدد بلند رتبی انداز ایسا ہے جس کا کوئی انقطاعی تعدد نہیں پایا جاتا۔یوں اگر

$$\lambda_0 > \frac{2\pi a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{k_{01}} = \frac{2\pi a n_1 \cos\theta_{ic}}{k_{01}} \tag{13.255}$$

ہو جہاں

k_{01} صفر رتبی بیسل تفاعل J_0 کا پہلا صفر $k_{01} = 2.405$ ہے،

λ_0 لامحدود خلاء میں طول موج

a شیش ریشے کا رداس

n_1 شیش ریشے کا انعطافی مستقل

n_2 شیش ریشے پر چڑھی تہہ کا انعطافی مستقل

θ_{ic} شیش ریشے اور اس پر چڑھی تہہ کے سرحد پر فاصل آمدی زاویہ

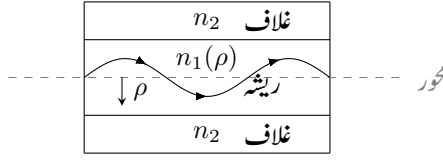
کے برابر ہیں تب صرف ایک عدد بلند رتبی موج شیش ریشے میں پائی جائے گی۔اس صورت میں شیش ریشہ اکائی بلند رتبی انداز رکھتی ہے۔

اگر شفاف ریشے کا انعطافی مستقل محور سے رداسی ρ سمت گھٹتا ہو تب شعاع کی راہ سرحد پر انعکاس سے اچانک تبدیل ہونے کی بجائے ہمواری کے ساتھ مڑے گی۔یوں شعاع کبھی بھی ریشے اور غلاف کی سرحد کو نہیں چھوئے گی۔ شکل 13.21-ب اور شکل 13.22 میں دونوں صورت حال دکھائی گئی ہیں۔

شیش ریشے پر مبنی ذرائع ابلاغ کا نظام شکل میں دکھایا گیا ہے۔ایک جانب نوری ڈایوڈ[24] یا لیزر[25] برقی اشارے کو شعاع میں تبدیل کرتے ہوئے شیش ریشے میں خارج کرتا ہے۔دوسری جانب یہی شعاع شیش ریشے سے خارج ہو کر نوری ٹرانزسٹر پر چمکتی ہے جو اسے واپس برقی اشارے میں تبدیل کرتا ہے۔

---

[24] light emitting diode, LED
[25] laser

غلاف n_2
$n_1(\rho)$
ریشہ
محور
ρ
غلاف n_2

شکل 13.22: رداسی سمت ρ میں انعطافی مستقل مسلسل کم ہونے سے موج ہمواری کے ساتھ مڑتی ہے۔

عمومی شیش ریشے میں کم سے کم تضعیف 700 nm تا 1100 nm زیریں بصری طول موج پر پائی جاتی ہے۔انسانی آنکھ 400 nm تا 700 nm طول موج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔

شیش ریشے 5 µm تا 50 µm قطر کے پائے جاتے ہیں جو کئی زیریں بصری طول موج کے برابر ہے لہٰذا اس سے شعاعی اخراج نہایت کم ہوتا ہے۔قطر کم کرنے یا طول موج بڑھانے سے شعاعی اخراج بڑھتا ہے۔ایسے شیش ریشے جن کا انعطافی مستقل 1.5 کے لگ بھگ ہو اور ان کا قطر اکائی طول موج سے زیادہ ہو بطور موج کردار ادا کرتے ہیں جبکہ اکائی طول موج سے کم قطر کے شیش ریشوں میں توانائی بیرون ریشہ سطح کے قریب رہتے ہوئے سفر کرتی ہے لہٰذا ان سے زیادہ شعاعی اخراج ہوتا ہے۔یوں اگر اکائی طول موج سے زیادہ قطر کے شیش ریشے کا قطر کم ہوتے ہوتے اکائی طول موج سے کم ہو جائے تو توانائی شیش ریشے کے اندر سے باہر منتقل ہو گی اور ساتھ ہی ساتھ محوری سمت میں شعاعی اخراج بھی پایا جائے گا۔ایسا شیش ریشہ بطور **محوری اینٹینا**[26] کردار ادا کرے گا۔

13.11 پردہ بصارت

انسانی آنکھ میں 10^8 سے زائد شیش ریشے پائے جاتے ہیں جو نا صرف بطور موج کام کرتے ہیں بلکہ یہ ضیائی ذرے یعنی **فوٹان**[27] پکڑنے کا کام بھی سرانجام دیتے ہیں۔آنکھ میں دو اقسام کے شیش ریشے پائے جاتے ہیں۔آنکھ کے درمیانے خطے میں مخروط شکل کے جبکہ اطراف پر نسبتاً زیادہ تعداد میں سلاخ نما شیش ریشے پائے جاتے ہیں جنہیں بالترتیب **مخروطے**[28] اور **سلاخ**[29] کہا جاتا ہے۔ تقریباً ہر مخروط علیحدہ علیحدہ انفرادی ترسیلی **عصبی ریشے**[30] کے ذریعہ دماغ کے ساتھ منسلک ہوتا ہے جہاں تصویر کشی کا عمل ہوتا ہے۔ مخروطے ہمیں باریک بینی اور رنگ پہچانے کی صلاحیت مہیا کرتے ہیں۔مخروطوں کے برعکس اشکال پہچانے میں سلاخ کم مدد کرتے ہیں لیکن ان کی زیادہ تعداد اور حساس پن

---

[26] end-fire antenna
[27] photon
[28] cones
[29] rods
[30] axon

تاریکی میں دیکھنا ممکن بناتی ہے۔دماغ سے جڑی ایک عدد ترسیلی تار کے ساتھ متوازی کئی سلاخیں جڑی ہوتی ہیں جس سے کم روشنی میں بینائی مزید بہتر کرتی ہے۔مرکز نگاہ سے ہٹ کر اطراف کی بینائی بھی سلاخ مہیا کرتی ہیں۔

شکل 13.23-الف میں آنکھ کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے جس میں عدسہ چشم[31]، پردہ بصارت[32] اور دماغ کو جاتا عصب بصری[33] دکھائے گئے ہیں۔شکل 13.23-ب میں پردہ آنکھ کی زیادہ تفصیل دکھائی گئی ہے۔آنکھ کا پردہ شفاف ہوتا ہے۔اس میں مخروطے، سلاخ، دو قطبی خلیے[34] اور عصبی خلیے[35] پائے جاتے ہیں۔عصبی خلیہ کے دو اہم جزو شجریہ[36] اور عصبی ریشہ کہلاتے ہیں۔پردے کے پچھلی سطح پر غیر شفاف تہہ پائی جاتی ہے۔شکل 13.23-پ میں مخروط کی مزید وضاحت کی گئی ہے۔مخروط اور سلاخ کے پچھلے دبلے سر کا قطر تقریباً 1 µm، لمبائی بیس گنا زیادہ اور اس کا انعطافی مستقل $n_1 = 1.39$ جبکہ گرد مواد کا انعطافی مستقل n_2 اس سے چند فی صد کم ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ذرائع ابلاغ میں استعمال شیش ریشوں کے انعطافی مستقل $n_1 = 1.46$ اور $n_2 = 1.44$ تقریباً یہی قیمتیں ہیں البتہ مخروط اور سلاخ کے دبلے سر کا قطر 1.5λ تا 2λ ہے جو شیش ریشے کے قطر سے نسبتاً کم ہے لہٰذا ان سے شعاعی اخراج زیادہ ہو گا۔

مخروط یا سلاخ کا مرکزہ[37] بطور عدسہ چشم کردار ادا کرتا ہے۔شعاع مخروط یا سلاخ میں بار بار مکمل اندرونی انعکاس سے سفر کرتی ہے اور جو فوٹان پچھلے دبلے حصے میں جذب نہ ہو پائے وہ پردے پر غیر شفاف تہہ تک پہنچتی ہے۔انسانی آنکھ میں غیر شفاف تہہ فوٹان جذب کرتی ہے جبکہ رات کی تاریکی میں شکار کرنے والے جانور، مثلاً بلی، کی آنکھ میں غیر شفاف تہہ کی جگہ انعکاسی مادے کی تہہ پائی جاتی ہے جو فوٹان کو واپس مخروط یا سلاخ میں بھیجتی ہے جس سے ان کی بینائی مزید بہتر ہوتی ہے۔

مخروط کے اگلے حصے میں $n_1 = 1.36$ جبکہ پچھلے حصے میں $n_1 = 1.39$ ہے۔یوں اگرچہ مخروط میں لمبائی کی جانب انعطافی مستقل تبدیل ہوتا ہے لیکن یاد رہے کہ اس کی قیمت بیرونی مادے کی انعطافی مستقل سے زیادہ رہتی ہے۔

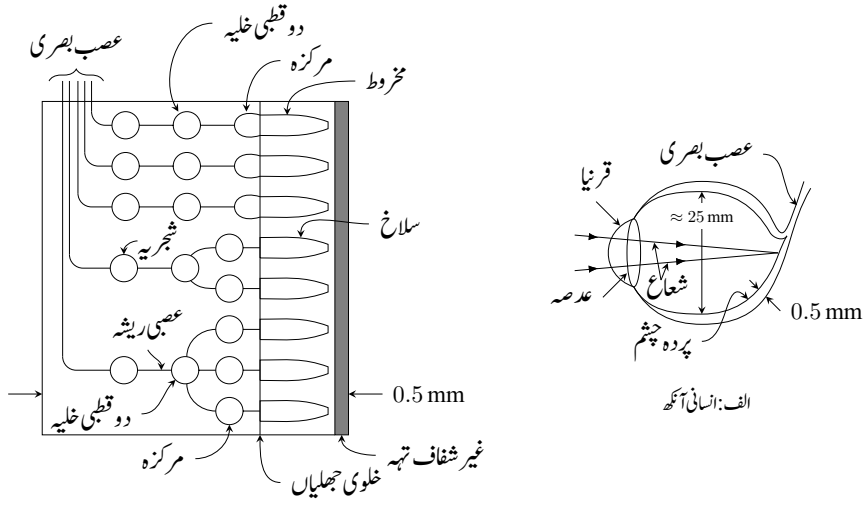
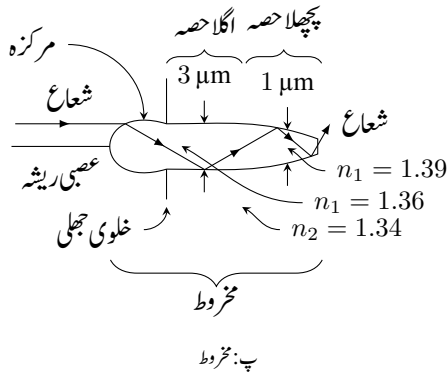
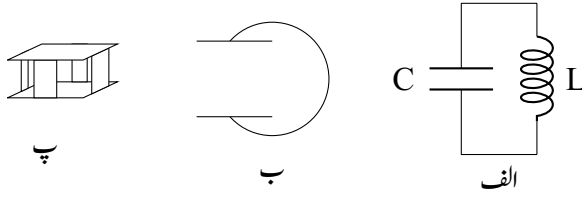
مخروط یا سلاخ کے پچھلے حصے کے مالیکیول ضیائی ذرہ پکڑتے ہیں۔فوٹان پکڑنے سے برقی رو پیدا ہوتی ہے جو دو قطبی خلیے تک پہنچتی ہے۔دو قطبی خلیہ مختصر دورانیے کی موج پیدا کرتی ہے جو عصب بصری کے ذریعہ دماغ تک اشارہ پہنچاتی ہے۔یوں مخروط یا سلاخ محوری اینٹینا کی طرح ہیں البتہ ان میں 10^{15} Hz تعدد کے فوٹان پکڑنے اور اس کے عوض مختصر دورانیے کا عددی اشارہ پیدا کرنے کی صلاحیت بھی پائی جاتی ہے۔

---

[31] lens
[32] retina
[33] optic nerve
[34] bipolar cells
[35] nerve cells
[36] dendrite
[37] nucleus

الف: انسانی آنکھ

ب: آنکھ کا پردہ

پ: مخروط

شکل 13.23: انسانی آنکھ اور اس کی تفصیل

شکل 13.24: سادہ امالہ۔کپیسٹر دور سے گمکیا کا حصول۔

13.12 گمکی خلاء

موج کا مقصد طاقت کی منتقلی ہے۔اس کے برعکس گمکیا طاقت ذخیرہ کرتا ہے۔ گمکیا کو امالہ اور برق گیر (کپیسٹر) کے گمکی دور[38] کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل 13.24-الف میں امالہ اور برق گیر (کپیسٹر) کا دور دکھایا گیا ہے جس کی گمکی تعدد $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ہے۔اس دور کے گمکی تعدد کو بڑھانے کی خاطر امالہ اور برق گیر (کپیسٹر) کی قیمت کم کرنی ہو گی۔ شکل-ب میں امالہ کے چکر کم کرتے کرتے ایک تک پہنچ گئے ہیں۔اسی طرح برق گیر (کپیسٹر) کی قیمت کم کرنے کی خاطر اس کے چادروں کے درمیان فاصلہ بڑھایا گیا ہے۔ متوازی امالہ جوڑنے سے کل امالہ کم ہوتی ہے۔ شکل-پ میں مزید امالہ متوازی جوڑ کر یہی کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ شکل-پ میں اتنے امالہ متوازی جوڑے جا سکتے ہیں کہ برق گیر (کپیسٹر) کے بالائی اور نچلی چادروں کے اطراف پر کوئی جگہ خالی نہ رہ پائے۔ایسی صورت میں بند مستطیلی ڈبیا حاصل ہوتی ہے جسے شکل 13.25 میں دکھایا گیا ہے۔یہی بند ڈبی گمکی خلاء[39] کہلاتی ہے۔

آئیں مستطیلی گمکی خلاء پر تفصیلی بحث کریں۔ صفحہ 659 پر مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 مستطیلی موج میں تمام TE_{mn} میدان دیتے ہیں۔ان میں $\gamma = j\beta$ پر کرتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔ مثبت x جانب حرکت کرتے میدان مثلاً H_x^+ پر زیر بالا $(+)$ لکھ کر حرکت کی سمت بتلائی گئی ہے۔

$$H_x^+ = H_{x0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{13.256}$$

$$H_y^+ = \frac{j\beta H_{x0}}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{13.257}$$

$$H_z^+ = \frac{j\beta H_{x0}}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{13.258}$$

---

[38] resonant circuit
[39] cavity resonator

$$E_z^+ = -\frac{j\omega\mu H_{x0}}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{13.259}$$

$$E_y^+ = \frac{j\omega\mu H_{x0}}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{13.260}$$

$$E_x^+ = 0 \qquad \text{TE} \tag{13.261}$$

جہاں مساوات 13.52 کے تحت

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta} \tag{13.262}$$

ہے۔اگر مویج کو دائیں جانب موصل چادر سے بند کر دیا جائے تو امواج اس بند سرے پر عمودی آمد ہوں گی۔ برقی میدان E_y^+ بند سرے کی چادر کے متوازی ہے۔ موصل سطح سے انعکاس کی صورت میں انعکاسی مستقل $\Gamma_{\parallel} = \Gamma_{\perp} = -1$ حاصل ہوتا ہے۔ برقی میدان انعکاس کے بعد منفی x جانب حرکت کرے گا۔انعکاسی برقی میدان

$$E_y^- = -\frac{j\omega\mu H_{x0}}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t+\beta x)} \tag{13.263}$$

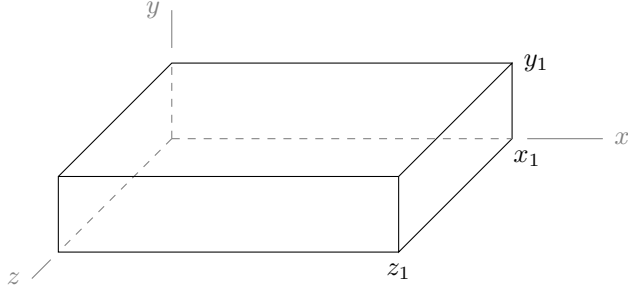
ہے۔آمدی اور انعکاسی میدان مل کر ساکن موج

$$\begin{aligned}E_y^+ + E_y^- &= \frac{j\omega\mu H_{x0}}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\left[\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} - \cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t+\beta x)}\right]\\ &= \frac{j\omega\mu H_{x0}}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t}\left(e^{-j\beta x} - e^{j\beta x}\right)\end{aligned}$$

یعنی

$$E_y = 2\frac{\omega\mu H_{x0}}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}\sin\beta x e^{j\omega t} \tag{13.264}$$

کو جنم دیتے ہیں۔موصل پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 13.264 کا برقی میدان مویج کے دائیں بند سرے پر صفر کے برابر ہو گا۔اسی طرح بند سرے سے $\frac{\lambda}{2}$ یا $\frac{l\lambda}{2}$ فاصلے پر بھی میدان صفر ہو گا جہاں $l = 1, 2, \cdots$ ہے۔ یوں بند سرے سے $\frac{l\lambda}{2}$ فاصلے پر موصل چادر رکھنے سے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑے گا، البتہ E_y^- مویج کے بائیں بند سرے سے انعکاس پذیر ہو گا۔ شکل 13.25 میں مستطیلی مویج کے دائیں اور بائیں سرے بند کرتے ہوئے بقایا مویج کو ہٹا لیا گیا ہے۔یہ بند ڈبہ مستطیلی گمکیا[40] ہے۔

[40] rectangular resonator

شکل 13.25: مستطیلی گمکیا

شکل 13.25 میں گمکیا کا بایاں سرا $x = 0$ اور دایاں سرا $x = x_1$ پر ہیں جہاں دونوں بند سروں کے درمیان فاصلہ

$$x_1 = \frac{l\lambda}{2} \qquad (l = 1, 2, 3, \cdots) \tag{13.265}$$

ہے۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے

$$\beta x_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{l\lambda}{2} = l\pi$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\beta = \frac{l\pi}{x_1} \tag{13.266}$$

ملتا ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.264

$$E_y = 2\frac{\omega\mu H_{x0}}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}\sin\frac{l\pi x}{x_1}e^{j\omega t} \tag{13.267}$$

لکھا جائے گا۔اس مساوات میں گمکیا کے x سمت میں l آدھے طول موج پائی جاتی ہیں، y سمت میں n آدھی طول

موج پائی جاتی ہیں اور z سمت میں m آدھی طول موج پائی جاتی ہیں۔ لمکیا میں بقایا میدان مندرجہ ذیل ہیں۔

$$E_x = 0 \qquad \text{TE}_{lnm} \tag{13.268}$$

$$E_z = -2\frac{\omega\mu H_{x0}}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}\sin\frac{l\pi x}{x_1}e^{j\omega t} \tag{13.269}$$

$$H_z = 2\frac{\beta H_{x0}}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}\sin\frac{l\pi x}{x_1}e^{j\omega t} \tag{13.270}$$

$$H_y = 2\frac{\beta H_{x0}}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}\sin\frac{l\pi x}{x_1}e^{j\omega t} \tag{13.271}$$

$$H_x = -j2H_{x0}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}\sin\frac{l\pi x}{x_1}e^{j\omega t} \tag{13.272}$$

مساوات 13.267 میں $x = 0$ یا $x = x_1$ پر کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں بند سطحوں پر برقی میدان صفر کے برابر ہے۔

مساوات 13.86 میں دئے k کو k_{yz} لکھتے

$$k_{yz}^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{13.273}$$

ہوئے اور کامل ذو برق کے لئے $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 13.87

$$k_{yz}^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

لکھا جائے گا جہاں $\alpha = 0$ کی صورت میں $\gamma = j\beta$ ہو گا لہٰذا

$$k_{yz}^2 = -\beta^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

یا

$$\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 = -\left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + (2\pi f)^2\frac{1}{(f\lambda)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے لمکی طول موج

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{لمکی}} = \lambda_{lnm} &= \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^+}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{l}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}}\end{aligned} \tag{13.274}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے گمکیا کا مستقل k یوں

$$k_{xyz}^2 = k_{lnm}^2 = \left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{13.275}$$

بیان کیا جاتا ہے جس سے

$$\lambda_{\text{گمکی}} = \frac{2\pi}{k_{xyz}} \tag{13.276}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

ڈبیا کے لمبے طرف کو x سے جبکہ چھوٹے طرف کو z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں لمبائی جانب گمکیا میں l نصف طول موج پائی جائیں گی جبکہ اس سے چھوٹی طرف کی جانب n نصف طول موج اور سب سے چھوٹے طرف کی جانب m نصف طول موج پائی جائیں گی۔

یوں $x_1 > y_1 > z_1$ کی صورت میں گمکی کے مندرجہ بالا امواج بلند رتبی TE_{lnm} کہلائیں گے اور گمکی طول موج λ_{lnm} لکھی جائے گی۔گمکیا $\lambda_{\text{گمکی}}$ طول موج یعنی $f = \frac{c}{\lambda_{lnm}}$ تعدد پر گمکنے کی خاصیت رکھتی ہے۔

مثال 13.5: ایک کھوکھلے ڈبے کے اطراف $15\,\text{mm}$ ، $15\,\text{mm}$ اور $5\,\text{mm}$ ہیں۔اس میں TE_{110} گمک کی طول موج λ_{lnm} دریافت کریں۔

حل: مساوات 13.274 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda_{110} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{0.015}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.015}\right)^2 + \left(\frac{0}{0.005}\right)^2}} = 21.21\,\text{mm}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے گمک کی تعدد

$$f_{110} = \frac{c}{\lambda_{110}} = \frac{3\times10^8}{0.02121} = 14.14\,\text{GHz}$$

حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی گمکیا کی معیار سے مراد

$$Q = 2\pi \frac{\text{ذخیرہ توانائی}}{\text{فی چکر توانائی کا ضیاع}} \tag{13.277}$$

ہے جہاں Q **معیاری مستقل**[41] کہلاتا ہے۔گمکیا میں کثافت توانائی $w_e = \frac{\epsilon E^2}{2}$ کے حجمی تکمل سے ذخیرہ توانائی حاصل کی جا سکتی ہے جہاں E برقی میدان کی بلند تر قیمت ہے۔اسی طرح $T = \frac{1}{f}$ دورانیے کے لئے ڈبے کے اطراف کی چادر پر پوئنٹنگ سمتیہ کے سطحی تکمل سے چادر میں طاقت کا ضیاع حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$Q = \frac{2\pi W}{T\left(-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{2\pi \iiint w_e \,\mathrm{d}h}{T\frac{Z_{c,h}}{2}\iint |H_m|^2 \,\mathrm{d}S} \tag{13.278}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_m چادر کے متوازی مقناطیسی میدان جبکہ $Z_{c,h}$ چادر کی قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو ہے۔

13.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل

اس حصے میں مستطیلی گمکی مکمل طور پر حل کی جائے گی۔امید کی جاتی ہے کہ آپ اس طریقے کو پسند کریں گے۔

کثافت بار سے خالی $\rho_h = 0$ خطے کے میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{13.279}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{13.280}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{13.281}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{13.282}$$

---

[41] quality factor

سے شروع کرتے ہیں۔مساوات 13.280 کی گردش لیتے ہوئے حاصل جواب میں مساوات 13.279 اور مساوات 13.282 پر کرنے سے موج کی مساوات

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E} \right) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \boldsymbol{H} \right)$$
$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ سمتی مساوات حقیقت میں تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ان میں سے E_x کی مساوات یوں

$$\nabla^2 E_x = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{13.283}$$

لکھی جائے گی جہاں برقی میدان $E_x(x, y, z, t)$ کے چار آزاد متغیرات ہیں۔**علیحدگی متغیرات**[42] استعمال کرتے ہوئے برقی میدان کو دو تفاعل کے حاصل ضرب کے برابر لکھا جاتا ہے

$$E_x(x, y, z, t) = M(x, y, z) T(t) \tag{13.284}$$

جہاں پہلے تفاعل M کے تین آزاد متغیرات x، y اور z ہیں جبکہ دوسرے تفاعل T کا صرف t آزاد متغیرہ ہے۔یوں مساوات 13.283 سے

$$T \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = M \left(\mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں اطراف کو MT سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{T} \left(\mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا بایاں ہاتھ خلاء کے متغیرات x، y اور z پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ وقت t پر منحصر ہے۔یوں خلاء کے متغیرات تبدیل کرنے سے صرف بایاں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن بائیں ہاتھ میں تبدیلی

[42] separation of variables

کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں ہوں گے لہٰذا یہ لازم ہے کہ مساوات کے دونوں اطراف قابل تبدیل نہ ہوں۔یوں انہیں مستقل k^2 کے برابر لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right)=\frac{1}{T}\left(\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)=-k^2$$

جس سے دو مساوات

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+k^2 T=0 \tag{13.285}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}+k^2 M=0 \tag{13.286}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 13.285 کا حل $T=e^{pt}$ فرض کرتے ہوئے

$$\left(\mu\epsilon p^2+\mu\sigma p+k^2 T\right)e^{pt}=0$$

سے

$$p=\frac{-\sigma\mp\sqrt{\sigma^2-4\frac{\epsilon}{\mu}k^2}}{2\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔کامل ذو برق کی صورت میں $\sigma=0$ ہو گا جس سے

$$p=\mp\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{13.287}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$T(t)=c_{t1}e^{-\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t}+c_{t2}e^{+\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_{t1}، c_{t2} مساوات کے مستقل ہیں۔اس میں

$$\omega=\frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{13.288}$$

لیتے ہوئے مساوات کی جانی پہچانی شکل

$$T(t)=c_{t1}e^{-j\omega t}+c_{t2}e^{j\omega t} \tag{13.289}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 13.286 کو بھی علیحدگی متغیرات کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔یوں

$$M(x,y,z) = X(x)N(y,z) \tag{13.290}$$

لیتے ہوئے

$$N\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + X\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + k^2 XN = 0$$

یا

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right) - k^2$$

حاصل ہوتا ہے جسے نئے مستقل $-k_x^2$ کے برابر لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X = 0 \tag{13.291}$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2)N = 0 \tag{13.292}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان میں دوسرے مساوات میں N کو مزید دو تفاعل کا حاصل ضرب

$$N(y,z) = Y(y)Z(z) \tag{13.293}$$

لکھتے ہوئے

$$Z\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2)YZ = 0$$

یا

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 + k_x^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کو نئے مستقل $-k_y^2$ کے برابر پر کرتے ہوئے دو مساوات

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 Y \tag{13.294}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -(k^2 - k_x^2 - k_y^2)Z = -k_z^2 Z \tag{13.295}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں آخری قدم پر $(k^2 - k_x^2 - k_y^2 = k_z^2)$ لکھا گیا ہے یعنی

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \tag{13.296}$$

مساوات 13.291، مساوات 13.294 اور مساوات 13.295 کے حل

$$X(x) = c_{x1}e^{-jk_x x} + c_{x2}e^{jk_x x} = c'_{x1}\cos k_x x + c'_{x2}\sin k_x x \tag{13.297}$$

$$Y(y) = c_{y1}e^{-jk_y y} + c_{y2}e^{jk_y y} = c'_{y1}\cos k_y y + c'_{y2}\sin k_y y \tag{13.298}$$

$$Z(z) = c_{z1}e^{-jk_z z} + c_{z2}e^{jk_z z} = c'_{z1}\cos k_z z + c'_{z2}\sin k_z z \tag{13.299}$$

ہیں۔

مساوات 13.290، مساوات 13.293 اور مساوات 13.284 سے ظاہر ہے کہ

$$E_x(x, y, z, t) = TXYZ \tag{13.300}$$

کے برابر ہے۔مساوات 13.300 میکس ویل مساوات کا عمومی حل ہے جو کسی ایک خطے میں ہر ممکنہ E_x موج کو ظاہر کرتی ہے۔اصل موج اس مساوات کا حقیقی جزو ہو گا۔

اب تک k پر کوئی شرط عائد نہیں کی گئی۔یوں $k_x = 0.32$ یا $k_x = -7.59$ ہو سکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں مکمل آزاد موج کو ظاہر کرتی ہے۔آئیں اب موج کو پابند کر کے دیکھیں۔

تصور کریں کہ لا محدود وسعت کے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج پیدا کی جاتی ہے۔صفحہ 641 پر شکل 13.1 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ان موصل چادروں پر متوازی برقی دباو صفر ہو گا۔یوں $z = 0$ اور $z = z_0$ پر E_x صفر ہو گا۔ہم اس ترکیب کو کئی مرتبہ استعمال کر چکے ہیں۔مساوات 13.299 میں ان شرائط کو پر کرتے ہوئے

$$c'_{z1} = 0 \tag{13.301}$$

$$k_z = \frac{m\pi}{z_1} \tag{13.302}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$m = 1, 2, 3\cdots \tag{13.303}$$

کے برابر ممکن ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ k_z اب صرف چنی گئی قیمت کا ہو سکتا ہے۔یوں $k_z = \frac{\pi}{z_1}$ یا $k_z = \frac{2\pi}{z_1}$ ہو سکتا ہے لیکن ان دو قیمتوں کے درمیان یہ کسی اور قیمت کا نہیں ہو سکتا۔یہی خصوصیت مقید موج کی نشانی ہے۔

اسی طرح $y=0$ اور $y=y_0$ پر بھی دو متوازی موصل چادر نسب کرنے سے صفحہ 649 پر دکھایا شکل 13.8 حاصل ہوتا ہے۔ان سطحوں پر بھی متوازی برقی میدان صفر ہو گا۔اس طرح مساوات 13.298 سے

$$c'_{y1}=0 \tag{13.304}$$

$$k_y=\frac{n\pi}{y_1} \tag{13.305}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$n=1,2,3,\cdots \tag{13.306}$$

کے برابر ممکن ہیں۔اب موج y اطراف سے بھی پابند ہے جس کی وجہ سے k_y بھی آزادانہ قیمت رکھنے سے قاصر ہے۔ یوں مستطیلی موتج میں موج کی مساوات

$$E_x=E_{x0}\sin\frac{n\pi y}{y_0}\sin\frac{m\pi z}{z_0}e^{j(\omega t\mp k_x x)} \tag{13.307}$$

ہو گی جہاں $e^{j(\omega t-k_x x)}$ بڑھتے x جانب موج جبکہ $e^{j(\omega t+k_x x)}$ گھٹتے x جانب موج ہے۔ k_y اور k_z کی قیمتیں مساوات 13.302 اور مساوات 13.305 کے تحت ہوں گی۔جیسے آپ جلد مساوات 13.321 میں دیکھیں گے، طول موج اور k کا ایک خاص تعلق ہے۔یوں جس تعدد کی موج مستطیلی موتج سے گزر رہی ہو مساوات 13.321 اس کا k دیتی ہے جو ایک اٹل قیمت ہو گی۔اب کسی بھی k_y اور k_z کے لئے مساوات 13.296 سے k_x کی قیمت مخصوص تعدد کی موج کے لئے حاصل کی جا سکتی ہے۔جب تک k_x کی قیمت حقیقی عدد حاصل ہو اس وقت تک مساوات 13.297 سے حرکت کرتی موج ہی حاصل ہو گی البتہ اگر k_y اور k_z کی جوڑی سے k_x کی قیمت خیالی حاصل ہو تب مساوات 13.297 سے

$$X(x)=c_{x1}e^{k_x x}+c_{x2}e^{-k_x x}$$

حاصل ہو گا۔ بڑھتے x جانب موج کی صورت میں $x\to\infty$ کی صورت میں اس مساوات سے لامحدود میدان حاصل ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں $c_{x1}=0$ لیا جائے گا۔مساوات کا بقایا حصہ حرکت کرتی موج کو ظاہر نہیں کرتا بلکہ یہ گھٹتے میدان کو ظاہر کرتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی مخصوص تعدد، k_y اور k_z سے مساوات 13.296 k_x کی مخصوص قیمت دیتا ہے۔

اگر $x=0$ اور $x=x_0$ پر بھی موصل چادر نسب کئے جائیں تو صفحہ 713 پر دکھایا شکل 13.25 حاصل ہو گا۔چونکہ E_x ان چادروں کے عمودی ہے لہٰذا ہمیں E_y یا E_z کی مساوات درکار ہو گی۔میں لکھتے لکھتے بہت تھک چکا

ہوں۔آپ بھی پڑھ پڑھ کر بہت تھک چکے ہوں گے لہٰذا میں ان چادروں سے حاصل نتیجہ لکھ لیتا ہوں

$$c'_{x2} = 0 \tag{13.308}$$

$$k_x = \frac{l\pi}{x_0} \tag{13.309}$$

جہاں

$$l = 1, 2, 3, \cdots \tag{13.310}$$

کے برابر ممکن ہے۔

ان نتائج کو جمع کرتے ہوئے شکل 13.25 میں دکھائے مستطیلی گمکیا کی مساوات

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{j\omega t} \\ &= E_{x0} \cos \frac{l\pi x}{x_0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{13.311}$$

حاصل ہوتی ہے جو ساکن موج ہے۔

آئیں ایک مرتبہ پھر مکمل آزاد موج کی بات کریں۔مساوات 13.297 دراصل دو ممکنہ جوابات $e^{-jk_x x}$ اور $e^{jk_x x}$ کا مجموعہ ہے۔اسی طرح مساوات 13.298 اور مساوات 13.299 بھی مجموعے ہیں۔مساوات 13.300 میں X، Y اور Z کے مختلف اجزاء پر کرتے ہوئے مختلف امواج کی مساوات حاصل ہوتی ہیں۔یوں مساوات 13.297، مساوات 13.298 اور مساوات 13.299 کے پہلے جزو چنتے ہوئے ایک ممکنہ حل

$$E_x = E_{x0} e^{j(\omega t - k_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - k_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - k_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})} \tag{13.312}$$

حاصل ہوتا ہے۔کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطہ (x, y, z) کو سمتیہ

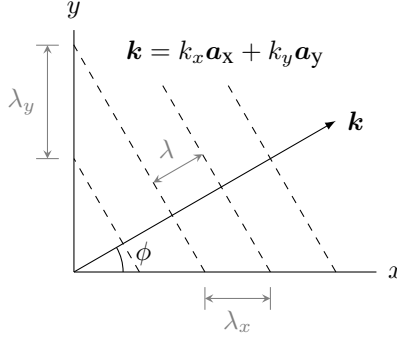
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{13.313}$$

ظاہر کرتی ہے۔ہم k_x، k_y، k_z اور k کو سمتیہ

$$\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + k_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + k_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{13.314}$$

لکھ سکتے ہیں جو مساوات 13.296 کی شرط پر پورا اترتی ہے۔اس طرح

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z \tag{13.315}$$

y $\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + k_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ λ_y $\boldsymbol{k}$ λ ϕ x λ_x

شکل 13.26: مختلف طول موج کا آپس میں تعلق

ہو گا لہٰذا مساوات 13.312 کو نہایت عمدگی کے ساتھ

$$E_x = E_{x0} e^{j(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})} \tag{13.316}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا حقیقی جزو

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) \tag{13.317}$$

اصل موج دیتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں موج کی عمومی مساوات ہے جو بڑھتے $\boldsymbol{k}$ کی جانب حرکت کرے گی۔

شکل 13.26 میں موج کی حرکت کی سمت، x محدد کے ساتھ ϕ زاویہ بناتی ہے۔یہ موج xy سطح پر پائی جاتی ہے یعنی $k_z = 0$ کے برابر ہے۔موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔کسی بھی نقطے پر ان چوٹیوں کو گن کر تعدد دریافت کی جا سکتی ہے۔یوں x محدد پر نقطہ $(x_0, 0)$ سے فی سیکنڈ گزرتے چوٹیوں کی تعداد موج کی تعدد f ہو گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ y محدد پر نقطہ $(0, y_0)$ سے بھی فی سیکنڈ اتنی ہی چوٹیاں گزریں گی۔اسی طرح $\boldsymbol{k}$ پر بھی کسی نقطے پر چوٹیاں گنتے ہوئے یہی تعدد حاصل ہوتی ہے۔

دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ طول موج کہلاتا ہے۔ وقت t کو روک کر x محدد پر رہتے ہوئے موج کی دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ λ_x ناپا جائے گا۔ اسی طرح y محدد پر طول موج λ_y ناپی جائے گی جبکہ حرکت کی سمت میں طول موج λ ناپی جائے گی۔ان تمام کو شکل 13.26 میں دکھایا گیا ہے۔

کسی بھی موج کی تعدد f اور طول موج λ جانتے ہوئے اس کی رفتار $v = f\lambda$ لکھی جا سکتی ہے۔ سمت حرکت کی جانب موج کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ کے برابر ہوتی ہے لہٰذا

$$f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{13.318}$$

ہو گا۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو 2π سے ضرب دیتے ہوئے

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{13.319}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 13.288 پر کرنے سے

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{13.320}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{13.321}$$

حاصل ہوتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کامل ذو برق $\sigma = 0$ کے لئے حاصل کئے گئے لہٰذا $\alpha = 0$ اور

$$\gamma = 0 + j\beta = jk \tag{13.322}$$

کے برابر ہے۔ اس طرح k کو β جبکہ k_x، k_y اور k_z کو بالترتیب β_x، β_y اور β_z لکھا جا سکتا ہے۔

ہم توقع کرتے ہیں کہ مساوات 13.321 کی طرح $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$ لکھنا ممکن ہو گا۔ آئیں اس حقیقت کو ثابت کریں۔ شکل 13.26 کو دیکھ کر $\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\phi}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں شکل کو دیکھتے ہوئے $\cos\phi = \frac{k_x}{k}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\phi} = \frac{\lambda k}{k_x}$$

لکھ کر $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} \tag{13.323}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح ہم

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} \tag{13.324}$$

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} \tag{13.325}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

سمت حرکت کی جانب رفتار جسے **مجموعی رفتار**[43] کہتے ہیں

$$v = f\lambda = \frac{\omega}{k} \tag{13.326}$$

کے برابر ہے۔موج اس رفتار سے توانائی ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرتی ہے۔اس کے برعکس کارتیسی محدد پر **دوری رفتار**[44]

$$v_x = f\lambda_x = \frac{\omega}{k_x}$$
$$v_y = f\lambda_y = \frac{\omega}{k_y}$$
$$v_z = f\lambda_z = \frac{\omega}{k_z}$$

ہوں گے۔شکل 13.26 میں ϕ کی قیمت کم کرنے سے λ_y اور یوں v_y کی قیمت بڑھتی ہے حتٰی کہ $\phi = 0$ پر $v_y = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔یوں دوری رفتار، روشنی کی رفتار سے زیادہ ہو سکتی ہے۔دوری رفتار صرف آنکھوں کا دھوکہ ہے، اس رفتار سے موج کا کوئی حصہ حرکت نہیں کرتا لٰہذا یہ آئن سٹائن کے قانون کی خلاف ورزی نہیں کرتا۔آئن سٹائن کا قانون کہتا ہے کہ کوئی چیز روشنی سے زیادہ تیز سفر نہیں کر سکتی۔

---

[43] group velocity
[44] phase velocity

سوالات

سوال 13.1: ہوا سے بھرے مستطیل مویج کے اطراف کی لمبائی $25\,\mathrm{mm}$ اور $50\,\mathrm{mm}$ ہے۔اس میں کمتر انقطاعی تعدد کے 1.7 گنا تعدد کی موج پائی جاتی ہے۔ الف) کم تر انقطاعی طول موج دریافت کریں۔ ب) مویج میں دوری رفتار حاصل کریں۔

جوابات: $100\,\mathrm{mm}$ ، $3.843 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

سوال 13.2: ہوا سے بھرے $50\,\mathrm{mm}$ لمبائی کے اطراف کے چکور مویج میں $40\,\mathrm{mm}$ سے زیادہ طول موج کے تمام ممکنہ TE اور TM امواج دریافت کریں۔

جوابات: TE_{10} ، TE_{01} ، TE_{11} ، TE_{20} ، TE_{02} ، TE_{21} ، TE_{12} ، TM_{11} ، TM_{21} ، TM_{12}

سوال 13.3: ہوا سے بھرے $100\,\mathrm{mm}$ اور $20\,\mathrm{mm}$ لمبائی کے اطراف کے مستطیل مویج میں $150\,\mathrm{mm}$ سے زیادہ طول موج کے تمام ممکنہ TE اور TM امواج دریافت کریں۔

جوابات: TE_{10}

سوال 13.4: ہوا سے بھرے نلکی مویج کا رداس $75\,\mathrm{mm}$ ہے۔اس میں کم ضیاعی TE_{01} موج کی انقطاعی طول موج اور غالب TE_{11} موج کی انقطاعی طول موج دریافت کریں۔

جوابات: $123\,\mathrm{mm}$ ، $256\,\mathrm{mm}$

سوال 13.5: ہوا سے بھرے نلکی مویج کا رداس $100\,\mathrm{mm}$ ہے۔ اس میں مندرجہ ذیل بلند رتبی امواج کے انقطاعی طول موج دریافت کریں۔ TM_{01} ، TM_{02} ، TM_{11} ، TM_{12} ، TM_{21} ، TM_{31} ، TM_{41}

جوابات: $261\,\mathrm{mm}$ ، $114\,\mathrm{mm}$ ، $164\,\mathrm{mm}$ ، $89\,\mathrm{mm}$ ، $122\,\mathrm{mm}$ ، $98\,\mathrm{mm}$ ، $83\,\mathrm{mm}$

سوال 13.6: ہوا سے بھرے نلکی مویج کا رداس $100\,\mathrm{mm}$ ہے۔ اس میں مندرجہ ذیل بلند رتبی امواج کے انقطاعی طول موج دریافت کریں۔ TE_{01} ، TE_{02} ، TE_{11} ، TE_{12} ، TE_{21} ، TE_{22} ، TE_{31} ، TE_{41}

جوابات: 164 mm ، 89 mm ، 341 mm ، 118 mm ، 206 mm ، 94 mm ، 149 mm ، 118 mm

سوال 13.7: ثابت کریں کہ کامل موصل کے نلکی موتج میں TE_{11} بلند رتبی انداز اوسطاً $\frac{\omega\mu\beta\rho_0^4|H_0|^2}{82}$ واٹ کی طاقت ترسیل کرتی ہے۔

سوال 13.8: ثابت کریں کہ متوازی دو عدد لامحدود موصل چادروں کے موتج میں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر TE_{10} موج کی تضعیفی مستقل

$$\alpha = \frac{2}{d}\frac{Z_{c,h}}{Z_{d,h}}\frac{\left(\frac{\lambda_0}{2d}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2d}\right)^2}} \qquad (\text{Np/m})$$

ہے جہاں

$Z_{c,h}$ مویجی موصل چادر کی قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

$Z_{d,h}$ موتج میں بھرے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

d دو لامحدود چادروں میں فاصلہ اور

λ_0 خلاء میں طول موج ہیں

سوال 13.9: ثابت کریں کہ متوازی دو عدد لامحدود موصل چادروں کے موتج میں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر TE_{m0} موج کی تضعیفی مستقل

$$\alpha = \frac{2}{d}\frac{Z_{c,h}}{Z_{d,h}}\frac{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad (\text{Np/m})$$

ہے جہاں

$Z_{c,h}$ مویجی موصل چادر کے قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

$Z_{d,h}$ موتج میں بھرے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

d دو لامحدود چادروں میں فاصلہ اور

λ_0 خلاء میں طول موج ہیں

سوال 13.10: لامحدود جسامت کے تانبے کے دو چادروں کے درمیان $18\,\mathrm{mm}$ کا فاصلہ ہے۔اس میں $10\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی TEM موج کا تضعیفی مستقل اور TE_{10} موج کا تضعیفی مستقل دریافت کریں۔

جواب: $\alpha = 3.85\,\frac{\mathrm{mNp}}{\mathrm{m}}$ ، $\alpha = 9.67\,\frac{\mathrm{mNp}}{\mathrm{m}}$

سوال 13.11: ثابت کریں کہ متوازی دو عدد لامحدود موصل چادروں کے موج میں انقطاعی طول موج سے کم طول موج λ_0 پر TM_{10} موج کی تضعیفی مستقل

$$\alpha' = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2d}\right)^2}}$$

ہے جہاں

α موج میں TEM موج کی تضعیفی مستقل اور

d چادروں کے درمیان فاصلہ ہے۔

سوال 13.12: ثابت کریں کہ ایسے مستطیل موج جس کی چوڑائی z_1 اور اونچائی y_1 ہو میں انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر TE_{m0} موج کی تضعیفی مستقل مندرجہ ذیل ہے۔

$$\alpha = \frac{2Z_{c,h}}{z_1 Z_{d,h}} \frac{\left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2 + \frac{z_1}{2y_1}\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{13.327}$$

سوال 13.13: تانبے کی $1\,\mathrm{cm}$ چوڑی پٹی تانبے کی وسیع چادر کے متوازی $1.2\,\mathrm{mm}$ فاصلے پر پائی جاتی ہے۔ ان کے درمیان $\epsilon_R = 2.6$ کا ذو برقی بھرا گیا ہے۔اس موج میں $450\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی TEM موج حرکت کرتی ہے۔موج میں برقی میدان کا حیطہ $300\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ الف) موج کتنی طاقت منتقل کر رہا ہے۔ ب) فی میٹر موج میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔ پ) موج کا تضعیفی مستقل دریافت کریں۔

جوابات: $2.3\,\mathrm{nW}$ ، $91\,\frac{\mathrm{pW}}{\mathrm{m}}$ ، $39.5\,\frac{\mathrm{mNp}}{\mathrm{m}}$ یا $0.343\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}$

سوال 13.14: موصل چادر $\sigma = 10^6\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ اور $3\,\mathrm{cm}$ چوڑی موصل پٹی $\sigma = 10^6\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ کے مابین $2\,\mathrm{mm}$ موٹائی کا ذو برق $\epsilon_R = 7$ پایا جاتا ہے۔ برقی میدان $E_{\text{موثر}} = 3.2\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور تعدد $500\,\mathrm{MHz}$ ہے۔ منتقل طاقت اور مویج کا تضعیفی مستقل حاصل کریں۔

جوابات: $4.3\,\mathrm{\mu W}$ ، $0.312\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ یا $2.7\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}$

سوال 13.15: کامل موصل سے بنے مستطیل مویج میں TE_{10} کے لئے ثابت کریں کہ اوسط منتقل طاقت مندرجہ ذیل ہے۔

$$P_{\text{اوسط}} = \frac{\omega\mu\beta|H_0|^2 y_1 z_1^3}{4\pi^2} \tag{13.328}$$

سوال 13.16: ہوا اور تانبے کے سرحد پر $1\,\mathrm{GHz}$ تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: 0.00177°

سوال 13.17: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر $1\,\mathrm{GHz}$ تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: 6.46°

سوال 13.18: تانبے کی چادر کے متوازی $150\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی موج حرکت کر رہی ہے۔ برقی میدان $E_{\text{موثر}} = 50\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ چادر کی سطح کے عمودی ہے۔ الف) چادر کے متوازی منتقل طاقت کا پوئنٹنگ سمتیہ دریافت کریں۔ ب) مقناطیسی میدان کی موثر قیمت حاصل کریں۔ پ) چادر کی سطح پر برقی میدان حاصل کریں۔ ت) چادر میں داخل طاقت کا پوئنٹنگ سمتیہ دریافت کریں۔

جوابات: $6.636\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$ ، $0.133\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $56.3\,\frac{\mathrm{\mu W}}{\mathrm{m^2}}$

سوال 13.19: موصل کی لامحدود سطح کے متوازی موج حرکت کر رہی ہے۔ سطح کے عمودی برقی میدان $E_{\text{موثر}} = 150\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ موصل کی قدرتی رکاوٹ کی مطلق قیمت $|Z_c| = 0.012\,\Omega$ ہے۔ الف) سرحد کے

متوازی فی میٹر رقبے سے گزرتی طاقت دریافت کریں۔ ب) موصل سطح کے فی میٹر رقبے میں داخل طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $59.7\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $1.9\,\frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$

سوال 13.20: موصل $\sigma = 10^7\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ کی سطح کے متوازی خلاء میں $1.2\,\text{GHz}$ تعدد اور $E_{\text{موثر}} = 50\,\frac{\text{mV}}{\text{m}}$ کی موج حرکت کر رہی ہے۔مقناطیسی میدان سرحد کے متوازی ہے جبکہ برقی میدان سرحد کے عمودی ہے۔ فی مربع میٹر موصل رقبے میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔

جواب: $0.38\,\frac{\text{nW}}{\text{m}^2}$

سوال 13.21: موصل سطح کے متوازی TEM موج حرکت کر رہی ہے۔ ثابت کریں کہ $K = \rho_S v_S$ کی صورت میں، جہاں K ایمپیئر فی میٹر میں سطحی کثافت برقی رو، ρ_S کولمب فی مربع میٹر میں سطحی کثافت بار اور v_S میٹر فی سیکنڈ میں موج کی رفتار ہو، $K = H$ ہو گا جہاں H موج کے مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ کا حیطہ ہے۔

سوال 13.22: مستطیل مویج میں TE_{10} موج کی صورت میں نچلے اور بالائی اطراف (کے وسط) کے درمیان برقی دباو V اور نچلی یا بالائی طرف کے اندرونی سطح پر محوری برقی رو I کی شرح برقی رکاوٹ Z

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{\pi y_1}{2z_1} Z_{yz} \tag{13.329}$$

دیتی ہے جہاں

y_1 مویج کے چھوٹے طرف کی لمبائی،

z_1 مویج کے لمبے طرف کی لمبائی اور

Z_{yz} مویج کی عرضی رکاوٹ ہے۔

سوال 13.23: مستطیل موج میں مجموعی رفتار کے تعلق

$$u=v_0\sqrt{1-\left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2-\left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}=v_0\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{13.330}$$

کو ثابت کریں جہاں v_0 دوری رفتار، λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور λ_{0c} انقطاعی تعدد پر لامحدود خطے میں طول موج ہیں۔

سوال 13.24: شیش ریشے کا انعطافی مستقل $n=1.53$ اور شیش ریشے پر چڑھائی گئی غلاف کا انعطافی مستقل $n=1.51$ ہے۔داخلی زاویہ θ_i کی ایسی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل کریں جس پر $1\,\mu\text{m}$ کی موج شیش ریشے میں مکمل طور پر پھنس جائے گی۔

جواب: 14.3

سوال 13.25: شیش ریشے کا انعطافی مستقل 1.54 اور غلاف کا انعطافی مستقل 1.535 ہیں۔شیش ریشے میں اکلوتی $1.1\,\mu\text{m}$ بلند رتبی موج کی صورت میں شیش ریشے کا رداس دریافت کریں۔ داخلی زاویے کی زیادہ سے زیادہ حد دریافت کریں۔

جوابات: $3.4\,\mu\text{m}$ ، 7.13

سوال 13.26: چکور گمکی کے دو اطراف x لمبائی رکھتے ہیں جبکہ تیسرا طرف $\frac{x}{4}$ لمبا ہے۔ اس میں TE_{110} کی $25\,\text{mm}$ موج کی صورت میں x دریافت کریں۔

جواب: $14.14\,\text{mm}$

سوال 13.27: مساوات 13.119 حاصل کریں۔

سوال 13.28: مساوات 13.120 حاصل کریں۔

سوال 13.29: مساوات 13.120 تا مساوات 13.125 حاصل کریں۔

سوال 13.30: نلکی گمکی کا رداس اور اس کی لمبائی برابر ہیں جبکہ اس میں $\lambda_0=10\,\text{mm}$ کی TM_{02} پائی جاتی ہے۔ الف) نلکی کا رداس دریافت کریں۔ ب) نلکی کے چادر کی موصلیت $\sigma=40\,\frac{\text{MS}}{\text{m}}$ ہونے کی صورت میں Q حاصل کریں۔

جوابات: $17.5\,\mathrm{mm}$ ، $Q = 9544$

سوال 13.31: مساوات 13.269 حاصل کریں۔

حل:اسے ہو بہو E_y کی طرز پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سوال 13.32: مساوات 13.270 تا مساوات 13.272 حاصل کریں۔

سوال 13.33: ایک سرنگ کا قطر $7\,\mathrm{m}$ ہے۔اس سرنگ سے کم سے کم کتنی تعدد کی موج گزر پائے گی۔

جواب: $25.1\,\mathrm{MHz}$

باب 14

اینٹینا اور شعاعی اخراج

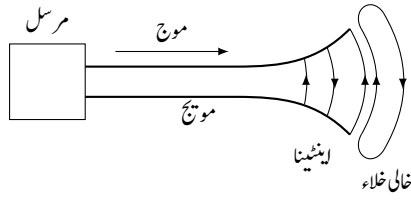
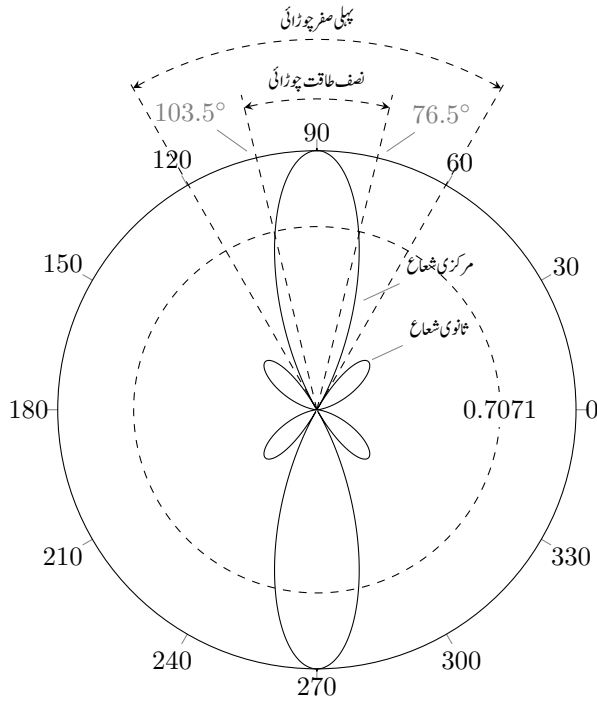
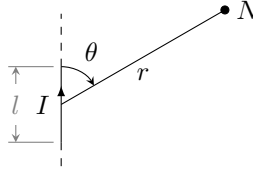
14.1 تعارف

ترسیلی تار پر غور کے دوران ہماری نظر تار کے ذریعہ منتقل ہونے والی طاقت پر تھی۔ایسی نظام میں تار سے خلاء میں خارج ہونے والی طاقت کو کم سے کم رکھنا مقصود ہوتا ہے۔موجودہ باب اینٹینا پر ہے جس میں خلاء میں طاقت کا اخراج (یا وصول) زیادہ سے زیادہ کرنا مقصد ہوتا ہے۔

شکل 14.1 میں دو تار ترسیلی نظام دکھایا گیا ہے جس کا بایاں سر بلند تعددی مرسل سے جوڑا گیا ہے۔مرسل کے قریب تاروں کے درمیان فاصلہ طول موج λ سے بہت کم ہے اور یوں تار کا یہ حصہ بطور موجیح کردار ادا کرتا ہے۔اس حصے کی قدرتی رکاوٹ مرسل کی قدرتی رکاوٹ Z_m کے برابر رکھی جاتی ہے۔دوسرے سر پر تاروں کے درمیان فاصلہ بڑھایا کر کوشش کی جاتی ہے کہ یہاں ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ خلاء کی قدرتی رکاوٹ Z_0 کے برابر ہو۔یوں چونکہ ترسیلی تار کا دایاں سر اور خلاء آپس میں ہمہ رکاوٹ ہیں لہٰذا ترسیلی تار کے دائیں سر سے خلاء میں پوری کی پوری طاقت منتقل ہو گی۔عین ترسیلی تار اور خلاء کے مابین وہ حصہ جو Z_m اور Z_0 کو ہمہ رکاوٹ بناتا ہے اینٹینا[1] کہلاتا ہے۔

اس کے برعکس ہم یوں بھی سوچ سکتے ہیں کہ چونکہ اینٹینا اور خلاء ہمہ رکاوٹ ہیں لہٰذا خلاء سے آنے والی موج کو اینٹینا پوری طرح وصول کرے گا۔

---

[1] antenna

شکل 14.1: اینٹینا وہ عبوری خطہ ہے جہاں منضبط موج ترسیلی نظام سے نکل کر خلاء میں بطور آزاد موج خارج ہوتی ہے۔

شکل 14.2: اینٹینا کے شعاع کا نقش

شکل 14.3: برقی رو گزارتی تار کی چھوٹی لمبائی

حقیقت میں ترسیلی تار کو اینٹینا ایک ایسا رکاوٹ نظر آتا ہے جس کا حقیقی جزو R_r ہوتا ہے جس کو اینٹینا کی اخراجی مزاحمت[2] کہتے ہیں۔ اینٹینا کی اخراجی شعاع کی نقش کے ذریعہ خلاء سے اینٹینا کی خاصیت دیکھی جاتی ہے۔ شکل 14.2 میں اخراجی شعاع کی نقش کی مثال دکھائی گئی ہے۔

اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r کا اس مادہ جس سے اینٹینا بنی ہو، کی موصلیت کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہوتا۔ در حقیقت R_r خلاء کی رکاوٹ کا وہ حصہ ہے جو اینٹینا کے داخلی سروں پر منتقل ہوتا ہے۔

14.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراجِ شعاع کے نظام میں موج کی ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔ یوں شکل 14.3 میں دکھائی گئی تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہو گا۔ خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8 \, \mathrm{m/s}$ خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔ یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$I = I_0 \cos \omega t \tag{14.1}$$

کی بجائے

$$[I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \tag{14.2}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $[I]$ **تاخیری برقی رو**[3] کہلاتی ہے۔ تاخیری تفاعل کو چکور قوسین میں بند لکھا جاتا ہے۔ تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت $(t - \frac{r}{c})$ استعمال کیا جاتا ہے۔

---

[2] radiation resistance
[3] retarded current

مساوات 14.2 کہتی ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $(t - \frac{r}{c})$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

گزشتہ ابواب میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t - \beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $c = \frac{\omega}{\beta}$ کے استعمال سے

$$\cos(\omega t - \beta x) = \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{14.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

مساوات 14.2 کی دوری سمتیہ شکل درج ذیل

$$[I] = I_0 e^{j\omega(t-r/c)} = I_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \tag{14.4}$$

ہے۔اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل درج ذیل

$$[\boldsymbol{J}] = \boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)} = \boldsymbol{J}_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \tag{14.5}$$

ہو گی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{[\boldsymbol{J}]}{r} \,\mathrm{d}h = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \,\mathrm{d}h \tag{14.6}$$

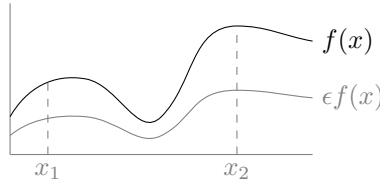
لکھا جائے گا۔اسی طرح تاخیری حجمی کثافت بار

$$[\rho_h] = \rho_0 e^{j\omega(t-r/c)} \tag{14.7}$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباو

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_h \frac{[\rho_h]}{r} \,\mathrm{d}h \tag{14.8}$$

لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.76 اور مساوات 9.75 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور قوسین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو کروی محدد کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتی ہیں۔

ہم یہاں اصل موضوع سے ہٹ کر ایک تکمل پر غور کرتے ہیں جو اس باب میں بار بار استعمال کیا جائے گا۔

شکل 14.4: تفاعل کا تکمل

14.3 تکمل

شکل 14.4 میں تفاعل $f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا x_1 تا x_2 تکمل خط کے نیچے دو عمودی نقطہ دار لکیروں کے مابین رقبے کے برابر ہے۔اس رقبے کو K کہتے ہوئے

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = K \tag{14.9}$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل میں ہلکی سیاہی میں $\frac{f(x)}{2}$ بھی دکھایا گیا ہے جسے $\epsilon f(x)$ لکھا گیا ہے جہاں $\epsilon = 0.5$ ہے۔چونکہ x_1 تا x_2 کے ہر نقطے پر تفاعل کی قیمت آدھی ہے لہٰذا ہلکی سیاہی کے خط کے نیچے رقبہ $\frac{K}{2}$ ہو گا لہٰذا

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{K}{2} = \epsilon K \tag{14.10}$$

لکھا جائے گا۔اب فرض کریں کہ $\epsilon(x)$ مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت x پر منحصر ہے۔مزید یہ کہ $\epsilon(x)$ کی قیمت 0 تا ϵ ممکن ہے۔ایسی صورت میں x_1 تا x_2 پر $\epsilon(x)f(x)$ کی قیمت 0 تا $\epsilon f(x)$ ممکن ہے لہٰذا $\epsilon(x)f(x)$ کا تکمل ϵK سے کم ہو گا یعنی

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) f(x)\,\mathrm{d}x \le \epsilon K \tag{14.11}$$

جہاں ہر جگہ $\epsilon(x) = 1$ کو بھی مد نظر رکھا گیا ہے۔اگر $\epsilon \to 0$ ہو تب تکمل قابل نظر انداز

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) f(x)\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad (\epsilon \to 0) \tag{14.12}$$

ہو گا۔

آئیں اب $\frac{f(x)}{1+\epsilon}$ کے تکمل

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon}\,\mathrm{d}x \tag{14.13}$$

پر غور کریں جہاں $\epsilon \to 0$ کے برابر ہے۔ ہم

$$\frac{1}{1+\epsilon} = (1+\epsilon)^{-1} = 1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots \tag{14.14}$$

لکھ سکتے ہیں لہٰذا تکمل

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots\right) f(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.15}$$

صورت اختیار کر لے گا۔ مساوات 14.12 کو استعمال کرتے ہوئے $\epsilon \to 0$ کی صورت میں اسے

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon}\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots\right) f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.16}$$

لکھا جا سکتا ہے جو K کے برابر ہے۔

14.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا

مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب[4] کہا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہو گی۔ لامحدود حد تک کم لمبائی کی صورت میں اسے صغاری جفت قطب[5] کہا جائے گا۔

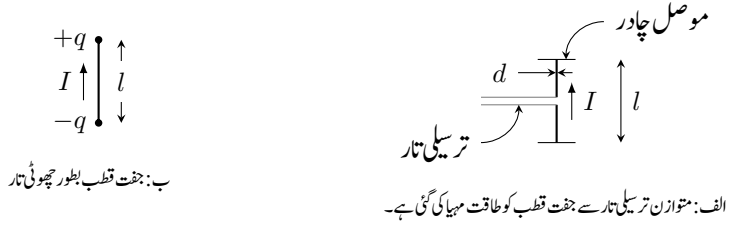
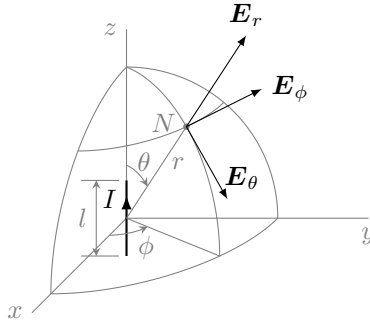
خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔

آئیں شکل 14.5-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $l \ll \lambda$ ہے۔ جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور برق گیر بوجھ کردار ادا کرتی ہے۔ جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتی ہیں۔ جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کی موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم

---

[4] short dipole
[5] infinitesimal

الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔

ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار

شکل 14.5: جفت قطب

شکل 14.6: جفت قطب محدد کے مبدا پر ہے۔ مبدا سے دور نقطہ N پر دور میدان کے اجزاء بھی دکھائے گئے ہیں۔

$\lambda \gg d$ ہے۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجزیے کی خاطر جفت قطب کو شکل 14.5-ب کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہو گا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے بار $\mp q$ ہوں۔ برق گیر پر بار q اور برقی رو I کا تعلق

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} \tag{14.17}$$

ہے۔

آئیں لامحدود وسعت کی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔ جیسے شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کے وسط کو کروی محدد کے مبدا اور لمبائی کو z محدد پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r، E_θ اور $E\phi$ پائے جائیں گے۔

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.71 اور مساوات 9.73 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{14.18}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{14.19}$$

جہاں

V نقطہ N پر غیر سمتی برقی دباو

$\boldsymbol{A}$ نقطہ N پر سمتی دباو

ہیں۔اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر غیر سمتی دباو V اور سمتی دباو $\boldsymbol{A}$ معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جا سکتے ہیں۔چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 14.6 اور مساوات 14.8 میں دئے تاخیری دباو قابل استعمال ہوں گے۔یوں ان مساوات کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times [\boldsymbol{A}] \tag{14.20}$$

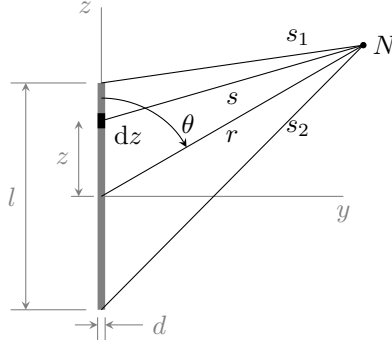
$$\boldsymbol{E} = -\nabla [V] - \frac{\partial [\boldsymbol{A}]}{\partial t} = -\nabla [V] - j\omega [\boldsymbol{A}] \tag{14.21}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.59 اور مساوات 9.60 سے تاخیری دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \, \mathrm{d}h \tag{14.22}$$

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \, \mathrm{d}h \tag{14.23}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

کسی بھی برقی بار اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 14.20 اور مساوات 14.21 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔مساوات 14.23 کے تحت تاخیری غیر سمتی دباو $[V]$ صرف ساکن باروں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 14.22 کے تحت تاخیری سمتی دباو $[A]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے باروں پر منحصر ہے۔مساوات 14.20 کے تحت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے باروں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 14.21 کے تحت برقی میدان $\boldsymbol{E}$ ساکن بار اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ہم جلد مساوات 14.46 میں دیکھیں گے کہ کسی بھی بار اور

شکل 14.7: جفت قطب اور دور میدان۔

برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباو ہی استعمال کئے جائیں گے لہٰذا انہیں چکور قوسین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکور قوسین کے دباو کو تاخیری دباو ہی سمجھا جائے۔

شکل 14.6 یا شکل 14.7 سے ظاہر ہے کہ سمتی دباو کا صرف $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ جزو

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{a}_{\text{z}}\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{I_0e^{j(\omega t-\beta s)}}{s}\,\mathrm{d}z \tag{14.24}$$

پایا جاتا ہے۔اگر جفت قطب کی لمبائی l، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $l \ll r$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $l \ll \lambda$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جا سکتا ہے[6] اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباو میں زاویائی فرق کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔اس طرح ان تمام کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔جفت قطب کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 کی صورت میں I_0 کو بھی تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{a}_{\text{z}}\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \tag{14.25}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محدد میں یوں

$$\boldsymbol{A}=A_r\boldsymbol{a}_{\text{r}}+A_\theta\boldsymbol{a}_\theta+A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

[6] جیسے حصہ 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔

لکھا جائے گا جہاں

$$
\begin{aligned}
A_r &= \boldsymbol{a}_\text{r} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\text{r} \cdot \boldsymbol{a}_\text{z} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\cos\theta \\
A_\theta &= \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\text{z} = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta \\
A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\text{z} = 0
\end{aligned} \tag{14.26}
$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفحہ 46 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔اس طرح

$$
\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\left(\cos\theta \boldsymbol{a}_\text{r} - \sin\theta \boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{14.27}
$$

لکھا جائے گا۔

ساکن بار جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہٰذا غیر سمتی دباو

$$
V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{e^{j(\omega t-\beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t-\beta s_2)}}{s_2}\right] \tag{14.28}
$$

ہو گا جہاں مساوات 14.17 کے تحت

$$
q = \int I \,\mathrm{d}t = \frac{I}{j\omega} \tag{14.29}
$$

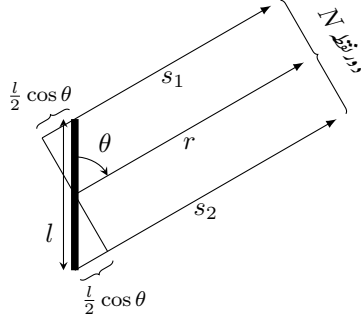
کے برابر ہے جہاں

$$
\begin{aligned}
I &= I_0 e^{j(\omega t-\beta s)} \\
q &= q_0 e^{j(\omega t-\beta s)}
\end{aligned}
$$

ہیں۔مساوات 14.29 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 14.28 میں پر کرتے ہیں۔

$$
V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{e^{j(\omega t-\beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t-\beta s_2)}}{s_2}\right] \tag{14.30}
$$

شکل 14.8 کو دیکھ کر

$$
\begin{aligned}
s_1 &= r - \frac{l}{2}\cos\theta \\
s_2 &= r + \frac{l}{2}\cos\theta
\end{aligned}
$$

شکل 14.8: جفت قطب اور دور نقطے کے تعلق۔

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 14.30 میں پر کرتے

$$V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{(r + \frac{l}{2}\cos\theta) e^{j\frac{\beta l}{2}\cos\theta} - (r - \frac{l}{2}\cos\theta) e^{-j\frac{\beta l}{2}\cos\theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta} \right] \tag{14.31}$$

ملتا ہے۔ چکور قوسین میں شرح کے نچلے حصے میں $l \ll r$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4}\cos^2\theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔ مسئلہ ڈی موے ور[7] کے استعمال سے

$$\begin{aligned} V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \bigg[& \left(r + \frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} + j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right) \\ & - \left(r - \frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} - j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right)\bigg] \end{aligned} \tag{14.32}$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ $l \ll \lambda$ ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} \cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} &= \cos\frac{\pi l\cos\theta}{\lambda} \approx l \\ \sin\frac{\beta l\cos\theta}{2} &\approx \frac{\beta l\cos\theta}{2} \end{aligned}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 14.32 میں پر کرنے سے

$$V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2}\right) \tag{14.33}$$

---

[7] de Moivre's theorem ($e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$)

حاصل ہوتا ہے جہاں

I_0 برقی رو کا حیطہ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A

l جفت قطب کی لمبائی، m

ω زاویائی تعدد $(\omega = 2\pi f)$ ، اکائی rad/s۔ جہاں ہرٹز Hz میں تعدد f ہے

β زاویائی مستقل $(\beta = \frac{2\pi}{\lambda})$، اکائی rad/m

t وقت، s

θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

ϵ_0 خلاء کا برقی مستقل، $8.854\,\mathrm{pF/m}$

c خلاء میں شعاع کی رفتار، $3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ، m

ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $\lambda \gg l$ اور $r \gg l$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 14.27 سمتی دباو اور مساوات 14.33 غیر سمتی دباو دیتے ہیں۔ کروی محدد میں غیر سمتی دباو کی ڈھلوان

$$\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi \\
&= \frac{I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c}\left[-\left(\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{2c\cos\theta}{j\omega r^3}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{r} - \left(\frac{\sin\theta}{r^2} + \frac{c\sin\theta}{j\omega r^3}\right)\boldsymbol{a}_\theta\right]
\end{aligned} \tag{14.34}$$

کے برابر ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{E} = E_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + E_\theta \boldsymbol{a}_\theta + E_\phi \boldsymbol{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 14.21 کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
E_r &= -j\omega A_r - \frac{\partial V}{\partial r} \\
E_\theta &= -j\omega A_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\
E_\phi &= -j\omega A_\phi - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

لکھے جا سکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right) \\
E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right) \qquad \text{عمومی میدان} \\
E_\phi &= 0
\end{aligned} \tag{14.35}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مقناطیسی میدان مساوات 14.20 سے حاصل ہو گی۔ کروی محدد میں سمتی دباو کی گردش

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta \\
+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned} \tag{14.36}
$$

میں مساوات 14.26 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$
\begin{aligned}
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right) \qquad \text{عمومی میدان} \\
H_r &= 0 \\
H_\theta &= 0
\end{aligned} \tag{14.37}
$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا۔

مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 کے تحت جفت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r، E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔جفت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں ایسے اجزاء جن میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ پایا جاتا ہو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔یوں E_r قابل نظر انداز ہو گا لہٰذا $E_r \approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$E_\theta = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{j\omega}{c^2 r} = j\frac{30 I_0 \beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.38}$$
$$H_\phi = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\frac{j\omega}{c r} = j\frac{I_0 \beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \qquad \text{دور میدان}$$

ہوں گے۔مساوات 14.38 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7\,\Omega \tag{14.39}$$

حاصل ہوتی ہے جو خلاء کی قدرتی رکاوٹ Z_0 ہے۔

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خلاء میں TEM موج کی طرح، جفت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔اس کے علاوہ دونوں میدان $\sin\theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جفت قطب کے محوری سمت $\theta = 0^\circ$ پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta = 90^\circ$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔اندرسہ[8] شکل کی ان میدان کو شکل 14.9-الف میں دکھایا گیا ہے جبکہ شکل-ب میں کارتیسی محدد کی سطح $x = 0$ پر دور میدان کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔شکل-الف میں اندرسے کے محور پر جفت قطب پایا جاتا ہے جسے شکل-ب میں z محدد پر موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ رکھتے اجزاء کو نظر انداز کیا گیا یعنی E_θ میں

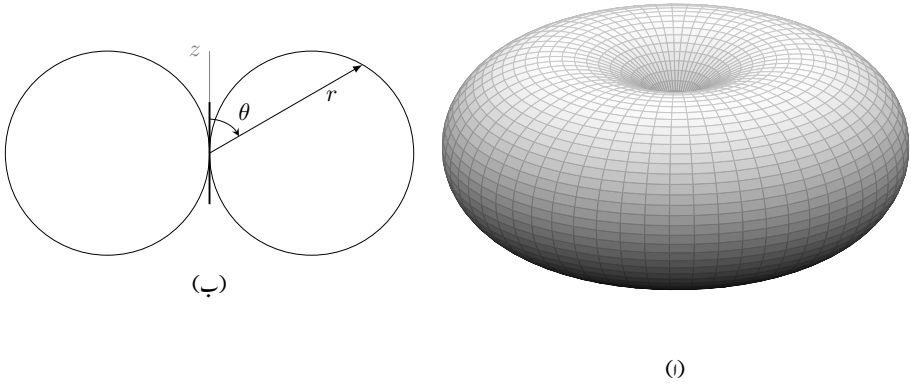
$$\left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right| \gg \frac{1}{c r^2}$$
$$\left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right| \gg \left|\frac{1}{j\omega r^3}\right|$$

یا

$$r \gg \frac{c}{\omega} \tag{14.40}$$

[8] doughnut

(ب)

(ا)

شکل 14.9: اندرسہ شکل کا دور فاصلے پر میدان۔

تصور کیا گیا۔اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$\left| j\frac{\omega}{cr} \right| \gg \frac{1}{r^2}$$

یا

$$r \gg \frac{c}{\omega} \tag{14.41}$$

تصور کیا گیا جسے

$$r \gg \frac{1}{\beta} \qquad \text{(دور میدان)} \tag{14.42}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $r \ll \frac{c}{\omega}$ یعنی $r \ll \frac{1}{\beta}$ لیا جائے گا۔یوں مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 میں

$$\frac{1}{cr^2} \ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right|$$

$$\left| \frac{j\omega}{c^2 r} \right| \ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right|$$

$$\frac{1}{cr^2} \ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right|$$

$$\left|\frac{j\omega}{cr}\right| \ll \frac{1}{r^2}$$

ہوں گے لہٰذا قریبی میدان

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\\
E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\\
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r^2} \quad \text{قریبی میدان}
\end{aligned}
\tag{14.43}
$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ کل قریبی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{a}_\text{r} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\text{r} + \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\theta\right]e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})} \tag{14.44}$$

ہو گا۔مساوات 14.44 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r)}$ پایا جاتا ہے۔یوں جفت قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لحاتی طور $\frac{\pi}{2}$ ریڈیئن کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہٰذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں 45° کا زاویہ ہو گا۔

یوں جفت قطب کے انتہائی قریب کسی بھی نقطے پر مقناطیسی اور برقی میدان میدان میں 90° کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے زاویائی فرق 45° ہو جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے بہت دور دونوں میدان ہم قدم ہوتے ہیں۔اسے تمام کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔

مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.38 سے دور میدان میں کثافت توانائی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2}E_\theta H_\phi^*\boldsymbol{a}_\text{r} = \frac{15 I_0^2\beta^2 l^2}{4\pi r^2}\sin^2\theta\boldsymbol{a}_\text{r} \quad \text{دور کثافت طاقت}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔یہی اینٹینا کی شعاعی اخراج ہے۔شعاعی اخراج $\theta = 90°$ پر زیادہ سے زیادہ ہے۔اسی طرح پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.43 سے قریبی میدان میں کثافت توانائی

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} &= \frac{1}{2}\left[(E_r\boldsymbol{a}_{\text{r}}+E_\theta\boldsymbol{a}_\theta)\times H_\phi^*\boldsymbol{a}_\phi\right]_{\text{حقیقی}}\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{I_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\theta+\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_{\text{r}}\right]\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔ مساوات 14.35 میں $I_0 = j\omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 14.37 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\ E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r}+\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\ H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}$$

$\left|e^{-j\beta r}\right| = 1$ لیتے ہوئے، صفر کے قریب تر تعدد $\omega \to 0$ پر ان مساوات سے میدان کی مطلق قیمت

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\\ E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\\ H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2} \qquad \text{نیم ساکن میدان}\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\text{r}}+\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{14.45}$$

جدول 14.1: مختصر جفت قطب کے میدان

نیم ساکن میدان	دور میدان	عمومی مساوات	جزو
$\frac{q_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$	0	$\frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	E_r
$\frac{q_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	$\frac{j60\pi I_0 \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	E_θ
$\frac{I_0 l \sin\theta}{4\pi r^2}$	$\frac{jI_0 \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)$	H_ϕ

لکھا جا سکتا ہے۔ان میدان کو نیم ساکن میدان[9] کہا جاتا ہے۔یہ صفحہ 159 پر حاصل کی گئی مساوات 4.67 ہی ہے۔اسی طرح مندرجہ بالا مقناطیسی میدان H_ϕ کی قیمت صفحہ 278 پر مساوات 7.3 ہی ہے۔چونکہ یہ میدان $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کے تعلق سے تبدیل ہوتے ہیں لہٰذا یہ جفت قطب کے قریب ہی پائے جاتے ہیں۔جفت قطب سے دور ان کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے لہٰذا ان کا شعاعی اخراج میں خاص کردار نہیں ہوتا۔بلند تعدد پر دور میدان جنہیں مساوات 14.38 پیش کرتی ہے، $\frac{1}{r}$ کے تعلق سے گھٹتی ہیں لہٰذا یہی شعاعی اخراج کو ظاہر کرتی ہیں اور یوں انہیں اخراجی میدان[10] کہا جاتا ہے۔

مختصر جفت قطب، $r \gg l$ اور $\lambda \gg l$، کے تمام میدان کو جدول 14.1 میں پیش کیا گیا ہے۔بقایا اجزاء $E_\phi = H_r = H_\theta = 0$ صفر کے برابر ہیں۔

مساوات 14.35 میں دیے E_θ میں $\frac{1}{r^2}$ اور $\frac{1}{r^3}$ رکھنے والے اجزاء برقی دباو V کے پیدا کردہ ہیں جو دور میدان میں قابل نظر انداز ہوتے ہیں۔اگر ہماری دلچسپی صرف دور میدان میں ہو تب مطلوبہ میدان کو نہایت آسانی کے ساتھ صرف $\boldsymbol{A}$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 14.21 اور مساوات 14.26 سے

$$E_\theta = -j\omega A_\theta = -j\omega\left(-\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta\right) = j\frac{30 I_0 \beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.46}$$

حاصل ہوتا ہے۔مقناطیسی میدان H_ϕ کو مساوات 14.20 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ اجزاء رد کئے جائیں گے۔مقناطیسی میدان کو نسبتاً زیادہ آسانی سے، لامحدود خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ استعمال

[9] quasi stationary fields
[10] radiation fields

کرتے ہوئے

$$H_\phi = \frac{E_\theta}{Z_0} = j\frac{30I_0\beta l}{120\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} = j\frac{I_0\beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.47}$$

سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ دور میدان کا دارومدار جفت قطب کے بار q_0 پر ہر گز نہیں لہٰذا ان بار کا جاننا غیر ضروری ہے۔کسی بھی اینٹینا کو متعدد مختصر جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی اینٹینا کے میدان تمام جفت قطب کے میدان کو جمع کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 14.38 میں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے دور برقی میدان کو

$$E_\theta = j60\pi I_0\frac{l}{\lambda}\frac{1}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کے اجزاء کو دور دور لکھتے ہوئے پہچاننے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$E_\theta = j \quad \underbrace{60\pi}_{\text{مقدار}} \quad \underbrace{I_0}_{\text{رو}} \quad \underbrace{\frac{l}{\lambda}}_{\text{لمبائی}} \quad \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{فاصلہ}} \quad \underbrace{\sin\theta}_{\text{شکل}} \quad \underbrace{e^{j(\omega t-\beta r)}}_{\text{زاویہ}} \tag{14.49}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 60π مساوات کا مستقل ہے، I_0 برقی رو، $\frac{l}{\lambda}$ جفت قطب کی لمبائی جسے طول موج میں ناپا گیا ہے، $\frac{1}{r}$ فاصلے کو ظاہر کرتا ہے، $\sin\theta$ میدان کا نقش اور $e^{j(\omega t-\beta r)}$ زاویائی فرق ہے۔کسی بھی اینٹینا کے میدان کو عموماً ان چھ اجزاء کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

جدول 14.1 مختصر جفت قطب کے میدان دیتا ہے۔

14.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

اینٹینا کے گرد کسی بھی بند سطح پر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ

$$\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} \tag{14.50}$$

کی سطحی تکمل

$$P = \int_S \boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (\mathrm{W}) \tag{14.51}$$

کل شعاعی اخراج P دے گی۔فی سیکنڈ خارج ہونے والی توانائی شعاعی اخراج کہلاتی ہے لہٰذا اس کی اکائی واٹ W ہے۔سادہ ترین بند سطح کرہ ہے۔یوں اینٹینا کو کروی محدد کے مبدا پر رکھتے ہوئے تکمل حاصل کیا جائے گا۔چونکہ دور میدان نسبتاً سادہ صورت رکھتے ہیں لہٰذا بند سطح کا رداس جتنا زیادہ رکھا جائے تکمل کا حصول اتنا آسان ہو گا۔یوں رداس زیادہ سے زیادہ رکھتے ہوئے، یعنی دور میدان استعمال کرتے ہوئے، جفت قطب کا شعاعی اخراج P حاصل کیا جاتا ہے۔

کامل اینٹینا کی صورت میں شعاعی اخراج اس برقی طاقت کے برابر ہو گا جو اینٹینا کے برقی سروں پر مہیا کی گئی ہو۔اینٹینا کو مزاحمت R تصور کرتے ہوئے اس برقی طاقت کو $P=\frac{1}{2}I_0^2R$ لکھا جا سکتا ہے جہاں I_0 سائن نما برقی رو کا حیطہ ہے۔یوں

$$R=\frac{2P}{I_0^2} \qquad (\Omega) \tag{14.52}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں R اینٹینا کی اخراجی مزاحمت[11] کہلاتی ہے۔

آئیں مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں لہٰذا شعاعی اخراج

$$P=\frac{1}{2}\int_S \left[E_\theta H_\phi^*\right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s \tag{14.53}$$

سے حاصل ہو گی جہاں H_ϕ^* مقناطیسی میدان H_ϕ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔اب $E_\theta=Z_0H_\phi$ ہے لہٰذا

$$P=\frac{1}{2}\int_S \left[H_\phi H_\phi^* Z_0\right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s=\frac{Z_0}{2}\int_S \left|H_\phi\right|^2 \mathrm{d}s \tag{14.54}$$

یا

$$P=\frac{1}{2Z_0}\int_S \left|E_\phi\right|^2 \mathrm{d}s \tag{14.55}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=120\pi$ ہے۔کروی محدد میں چھوٹی حجم اور چھوٹے رقبے لکھنا صفحہ 47 پر شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔کرہ کی سطح پر چھوٹے رقبے کو کروی محدد میں $\mathrm{d}s=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ لکھا جاتا ہے۔

---

[11] radiation resistance

جفت قطب کے میدان حاصل کرتے وقت فرض کیا گیا کہ اس کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 پائی جاتی ہے۔ساتھ ہی ساتھ لمبائی l کے مختلف نقطوں کے میدان کا زاویائی فرق نظر انداز کیا گیا۔جفت قطب کی پوری لمبائی پر برابر برقی رو نہ ہونے کی صورت میں مساوات 14.24 سے مساوات 14.25 حاصل ہونے کی بجائے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \frac{\boldsymbol{a}_{\text{z}}\mu_0 e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\int_{-l/2}^{l/2} i\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{\boldsymbol{a}_{\text{z}}\mu_0 l I e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\end{aligned}$$

حاصل ہو گا جہاں I اوسط برقی رو ہے۔اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 14.38 سے مقناطیسی میدان کا حیطہ

$$H_\phi = \frac{I\beta l}{4\pi r}\sin\theta \tag{14.56}$$

لکھتے ہوئے I_0 کی جگہ اوسط برقی رو I لکھی گئی ہے۔مقناطیسی میدان کے اس حیطے کو مساوات 14.54 میں پر کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ اخراجی طاقت

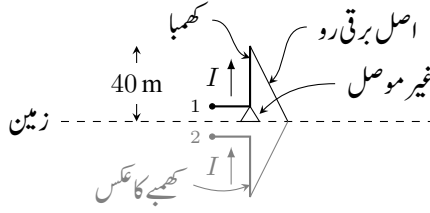
$$\begin{aligned}P &= \frac{120\pi}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{I\beta l}{4\pi r}\sin\theta\right)^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\ &= \frac{120\pi}{2}\left(\frac{\beta I l}{4\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\ &= 80\pi^2 I^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 14.54 یا مساوات 14.55 برقی رو کی چوٹی I کی صورت میں اخراجی طاقت دیتے ہیں جو سائن نما برقی رو کی صورت میں اوسط اخراجی طاقت کے دگنا ہوتی ہے۔یوں اوسط اخراجی طاقت

$$P_{\text{اوسط}} = 40\pi^2 I^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{14.57}$$

ہو گی۔مساوات 14.52 سے مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\left(\frac{I}{I_0}\right)^2 \qquad (\Omega) \tag{14.58}$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل 14.10: کھمبا اینٹینا

کسی بھی اینٹینا کی اخراجی مزاحمت

$$R=\frac{Z_0}{I_0^2}\int_S \lvert H\rvert^2 \,\mathrm{d}s=\frac{1}{Z_0I_0^2}\int_S \lvert E\rvert^2 \,\mathrm{d}s \tag{14.59}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے جہاں $Z_0=120\pi$ کے برابر ہے۔

مثال 14.1: چالیس میٹر لمبے کھمبے اینٹینا کو موصل سطح پر کھڑا کرتے ہوئے 300 kHz کی تعدد پر استعمال کیا جاتا ہے۔اسے برقی اشارہ نچلے سرے پر فراہم کیا جاتا ہے۔اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔اس کھمبے کو شکل 14.10 میں دکھایا گیا ہے۔کھمبے کو غیر موصل بنیاد پر کھڑا کیا گیا ہے۔

حل: موصل زمین میں کھمبا اینٹینا کا عکس بنتا ہے۔درکار تعدد پر $\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\times10^8}{300000}=1000\,\mathrm{m}$ ہے جو کھمبے کی لمبائی سے بہت زیادہ ہے۔یوں اینٹینا اور اس کا عکس بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں۔چونکہ کھمبے کے سر پر موصل چادر نسب نہیں کی گئی ہے لہٰذا اس کے پوری لمبائی پر برابر برقی رو تصور کرنا غلط ہو گا۔حقیقت میں، جیسے شکل میں وضاحت کی گئی ہے، کھمبے کے کھلے سر پر برقی رو صفر ہو گی جبکہ نچلے سر پر اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی۔جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، برقی رو بالمقابل لمبائی l کا خط تکونی ہے۔یوں اوسطاً برقی رو $I_{\text{اوسط}}=\frac{I_0}{2}$ ہو گی جہاں برقی رو کی زیادہ سے زیادہ قیمت I_0 ہے۔

یوں 40×2 میٹر لمبے فرضی جفت قطب کی اخراجی مزاحمت مساوات 14.58 سے

$$80\pi^2\left(\frac{2\times40}{1000}\right)^2\left(\frac{0.5I_0}{I_0}\right)^2=1.2633\,\Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ مزاحمت حقیقی کھمبے کے سر 1 اور عکسی کھمبے کے سر 2 کے مابین ہے۔یوں اصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت جو زمین اور 1 کے مابین ناپی جائے گی کی قیمت

$$R_{\text{اخراجی}} = \frac{0.63165}{2} = 0.63\,\Omega \tag{14.60}$$

ہو گی۔

حقیقی دھات کامل موصل نہیں ہوتے لہٰذا کسی بھی دھات سے بنائے گئے جفت قطب میں توانائی کا ضیاع ہو گا۔موصل کے علاوہ اینٹینا کے ساتھ منسلک ذو برق میں بھی طاقت کا ضیاع ہو گا۔ان ضیاع کو مزاحمت $R_{\text{ضیاعی}}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں اینٹینا کے برقی سروں پر کل مزاحمت

$$R = R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیاعی}} \tag{14.61}$$

ہو گی۔مندرجہ بالا مثال میں اگر $R_{\text{ضیاعی}} = 0.63\,\Omega$ ہوتا تب اینٹینا کی کار گزاری[12] k

$$k = \frac{\text{اخراجی طاقت}}{\text{داخلی طاقت}} = \frac{R_{\text{اخراجی}}}{R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیاعی}}} \frac{0.63}{0.63 + 0.63} = 50\,\% \tag{14.62}$$

پچاس فی صد ہو گی۔اگر طاقت کا ضیاع بڑھائے بغیر زیادہ لمبائی کا جفت قطب استعمال کیا جائے تو کار گزاری اس سے بہتر کی جا سکتی ہے۔

اینٹینا کو مکمل گھیرتی بند سطح پر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل لینے سے حقیقی طاقت کے ساتھ ساتھ خیالی طاقت بھی حاصل ہوتی ہے۔حقیقی طاقت اخراجی طاقت کو ظاہر کرتی ہے جبکہ خیالی طاقت متعامل جزو ہے۔سطح تکمل کی صورت اور مقام کا تکمل کے حقیقی جزو پر کوئی اثر نہیں البتہ خیالی طاقت کا دارومدار سطح کی صورت اور مقام پر ہے۔اینٹینا سے بہت دور خیالی جزو قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ اینٹینا کے قریب اس جزو کی مقدار بڑھ جاتی ہے۔نہایت پتلی ساخت کے خطی اینٹینا کی صورت میں اگر سطح تکمل کو بالکل سطح اینٹینا کے ساتھ ملا لیا جائے تب حاصل مخلوط طاقت تقسیم I_0^2 رکاوٹ $R + jX$ دیتا ہے جہاں R اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کو ظاہر کرتا ہے۔

---

[12] efficiency

14.6 ٹھوس زاویہ

اگلے حصے میں ٹھوس زاویہ[13] درکار ہو گا لہٰذا اسے پہلے سمجھتے ہیں۔

شکل 14.11-الف میں رداس r کے دائرے پر قوس کی لمبائی l اور رداس r کی شرح

$$\theta = \frac{l}{r} \qquad \text{(rad)} \tag{14.63}$$

زاویے θ دیتی ہے جس کی اکائی ریڈیئن[14] (rad) ہے۔یوں اکائی رداس کے دائرے پر اکائی لمبی قوس، دائرے کے وسط پر، ایک ریڈیئن (1 rad) کا زاویہ بنائے گی۔یہی اکائی ریڈیئن کی تعریف ہے۔چونکہ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہٰذا دائرے کے گرد ایک مکمل چکر 2π ریڈیئن کے زاویے کو ظاہر کرتا ہے۔اگرچہ مساوات 14.63 کے تحت θ دراصل بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی ریڈیئن میں ناپتے ہیں۔یوں x rad سے ظاہر ہوتا ہے کہ x زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

بالکل اسی طرح رداس r کے کرہ کی سطح پر کسی بھی رقبہ S اور کرہ کے رداس کے مربع r^2 کی شرح

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \qquad \text{(sr)} \tag{14.64}$$

ٹھوس زاویہ Ω دیتی ہے جسے مربع ریڈیئن یعنی سٹریڈیئن[15] (sr) میں ناپا جاتا ہے۔اکائی رداس کے کرہ پر اکائی رقبہ، کرہ کے وسط پر، ایک سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ بنائے گی۔یہی سٹریڈیئن کی تعریف ہے۔چونکہ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری کرہ 4π سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ دیتی ہے۔اگرچہ ٹھوس زاویہ بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی سٹریڈیئن میں ناپتے ہیں۔یوں مختلف اعداد کی بات کرتے وقت یہ جاننا ممکن ہوتا ہے کہ ٹھوس زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

شکل 14.11-ب میں عمومی رقبہ S' کا محدد کے مبدا پر ٹھوس زاویہ حاصل کرنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے۔مبدا سے دیکھتے ہوئے S' کا بیرونی خاکہ نظر آئے گا۔اگر اس خاکے کے بیرونی کناروں سے مبدا تک ربڑی چادر کھینچ کر لگائی جائے تو یہ چادر رداس r کے کرہ کو کاٹے گی۔کرہ کی سطح پر یوں رقبہ S گھیرا جائے گا۔ٹھوس زاویے

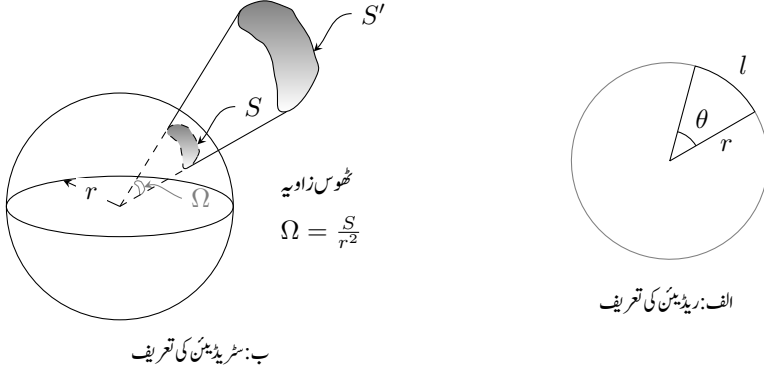
$$\Omega = \frac{S}{r^2} \tag{14.65}$$

---

[13] solid angle
[14] radian
[15] steradian

ٹھوس زاویہ $\Omega = \frac{S}{r^2}$

الف: ریڈیئن کی تعریف

ب: سٹریڈیئن کی تعریف

شکل 14.11: ریڈیئن اور سٹریڈیئن کی تعریف

کے برابر ہو گا۔اکائی رداس کے کرہ کی صورت میں رقبہ S کی قیمت ٹھوس زاویے کی قیمت کے برابر ہو گی۔

شکل 14.11-الف میں θ نظارے کے حدود کو ظاہر کرتا ہے۔اسی طرح شکل 14.11-ب میں Ω نظارے کے حدود تعین کرتا ہے۔

شکل 14.11-الف میں دکھایا گیا زاویہ سطحی نوعیت کا ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔اس کے برعکس شکل 14.11-ب میں دکھایا گیا زاویہ حجمی نوعیت کا ہے جسے سٹریڈیئن یا ریڈیئن کے مربع میں ناپا جاتا ہے۔یاد رہے کہ ایک مربع ریڈیئن کو ہی ایک سٹریڈیئن کہتے ہیں۔

$$1\,\mathrm{sr} = 1\,\mathrm{rad}^2 \tag{14.66}$$

کروی محدد میں r رداس کے کرہ کی سطح پر رقبے کو

$$S = \int_\theta \int_\phi r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \tag{14.67}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ رقبہ کرہ کے وسط پر

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \int_\theta \int_\phi \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \qquad (\mathrm{sr}) \tag{14.68}$$

ٹھوس زاویہ بنائے گی۔

14.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش

مختصر جفت قطب کے دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں جنہیں مساوات 14.38 میں پیش کیا گیا ہے۔کسی بھی اینٹینا کی طرح اس کے دور میدان $\frac{1}{r}$ کی شرح سے گھٹتے ہیں لہٰذا پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{Z_0}{2}|H|^2\,\boldsymbol{a}_{\text{r}} = \frac{1}{2Z_0}|E|^2\,\boldsymbol{a}_{\text{r}} \tag{14.69}$$

$\frac{1}{r^2}$ کی شرح سے گھٹے گی۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ کے رداسی جزو کو r^2 سے ضرب دینے سے $P(\theta,\phi)$

$$P(\theta,\phi) = r^2\mathscr{P} = \frac{Z_0}{2}|H|^2\,r^2 = \frac{1}{2Z_0}|E|^2\,r^2 \qquad (\text{W/sr}) \tag{14.70}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت فاصلہ r بڑھانے سے نہیں گھٹتی۔$P(\theta,\phi)$ **اخراجی شدت**[16] کہلاتی ہے۔اخراجی شدت کے بُعد پر غور کریں۔پوئنٹنگ سمتیہ طاقت کی کثافت یعنی طاقت فی رقبہ دیتی ہے۔مساوات 14.64 سے رقبے کو $S = \Omega r^2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ ضرب مربع رداس کا بُعد طاقت فی ٹھوس زاویہ W/sr بنتی ہے۔

اخراجی شدت کو **قابل پذیر**[17] بنانے کی خاطر $P(\theta,\phi)$ کو اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت $P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}} = r^2\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{14.71}$$

بے بُعد[18] مقدار $P_n(\theta,\phi)$ حاصل ہوتی ہے جو اینٹینا کی **قابل پذیر نقش طاقت**[19] ہے۔

اینٹینا کی کل اخراج

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathscr{P}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{14.72}$$

ہے۔اگر کثافت طاقت $\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}$ ہو تب اتنی اخراج مکمل کرہ کی سطح کے بجائے کرہ کی سطح پر رقبہ S سے خارج ہو گی یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathscr{P}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{14.73}$$

---
[16] radiation intensity
[17] normalized
[18] dimensionless
[19] normalized power pattern

ہو گا۔اس میں مساوات 14.64 کی مدد سے کرہ کی سطح پر رقبے کو ٹھوس زاویے کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\mathscr{P} r^2}{\mathscr{P}_{\text{بلند تر}} r^2} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$$

یعنی

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_n(\theta,\phi) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = \iint_{4\pi} P_n(\theta,\phi) \,\mathrm{d}\Omega \qquad \text{(sr)} \tag{14.74}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے تحت Ω_A ٹھوس زاویے پر یکساں زیادہ سے زیادہ طاقت خارج کرتے ہوئے اینٹینا پوری طاقت خارج کر سکتا ہے۔Ω_A کو **اخراجی ٹھوس زاویہ**[20] کہتے ہیں۔

مرکزی شعاع[21] پر تکمل

$$\Omega_M = \iint_{\text{مرکزی شعاع}} P_n(\theta,\phi) \,\mathrm{d}\Omega \qquad \text{(sr)} \tag{14.75}$$

لیتے ہوئے **مرکزی ٹھوس زاویہ**[22] حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں **ثانوی شعاع**[23] کے ٹھوس زاویہ Ω_m کو اخراجی ٹھوس زاویے اور مرکزی ٹھوس زاویے کے فرق

$$\Omega_m = \Omega_A - \Omega_M \tag{14.76}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔**غیر سمتی**[24] اینٹینا ہر سمت میں برابر اخراج کرتا ہے لہٰذا ہر سمت میں اس کا $P_n(\theta,\phi) = 1$ اور $\Omega_A = 4\pi$ ہو گا۔

اینٹینا کی دوسری اہم خاصیت اس کی **سمتیت**[25] ہے۔اخراجی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت اور اوسط اخراجی شدت کی شرح

$$D = \frac{\text{زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{اوسط اخراجی شدت}} = \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{14.77}$$

---

[20] beam solid angle
[21] main lobe
[22] major lobe solid angle
[23] minor lobe
[24] isotropic
[25] directivity

اس کی سمتیت کہلاتی ہے۔ کل اخراج W کو 4π سٹریڈیئن سے تقسیم کرنے سے اوسط اخراجی شدت $P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ اخراجی شدت $P(\theta,\phi)$ کا 4π سٹریڈیئن پر تکمل لینے سے اینٹینا کی کل اخراج حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} D &= \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{W/4\pi} = \frac{4\pi P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{\iint\limits_{4\pi} P(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}\,\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \end{aligned} \tag{14.78}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ مساوات 14.74 کے ساتھ موازنے کے بعد اسے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \qquad \text{بے بُعد} \tag{14.79}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اینٹینا کی سمتیت سے مراد، کرہ کا ٹھوس زاویہ 4π تقسیم اینٹینا کی اخراجی ٹھوس زاویہ Ω ہے۔ سمتیت اینٹینا کی ایک منفرد خاصیت ہے۔ مخصوص ٹھوس زاویے میں طاقت مرکوز کرنے کی صلاحیت کی ناپ سمتیت ہے۔ سمتیت جتنی زیادہ ہو گی اینٹینا اتنی کم ٹھوس زاویے میں طاقت کو مرکوز کر پائے گا۔

مثال 14.2: غیر سمتی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتا ہے لہٰذا اس کا $P_n(\theta,\phi)=1$ اور $\Omega_A=1$ ہوں گے۔ یوں

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 1 \tag{14.80}$$

حاصل ہو گا۔ کسی بھی اینٹینا کی یہ کم سے کم ممکنہ سمتیت ہے۔

مثال 14.3: مختصر جفت قطب کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.38 استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش طاقت

$$P_n(\theta,\phi)=\frac{H_\phi^2(\theta,\phi)}{H_\phi^2(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}=\sin^2\theta \tag{14.81}$$

لکھی جا سکتی ہے۔مساوات 14.74 سے

$$\Omega_A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\frac{8\pi}{3} \tag{14.82}$$

اور یوں مساوات سے

$$D=\frac{4\pi}{\Omega}=\frac{3}{2} \tag{14.83}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے مختصر جفت قطب کی زیادہ سے زیادہ اخراج $\frac{3}{2}$ گنا زیادہ ہے۔

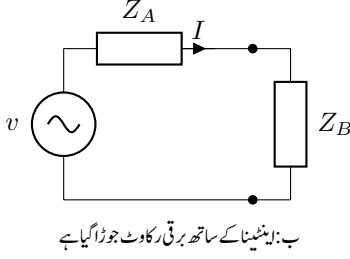
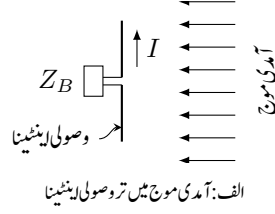
سمتیت کا دارومدار صرف اور صرف دور میدان کی نقش پر ہے۔اس میں اینٹینا کی کار گزاری شامل نہیں ہے۔اس کے بر عکس اینٹینا کی کار گزاری، اینٹینا کی افزائش طاقت یا **افزائش**[26] پر اثر انداز ہوتی ہے۔اینٹینا کی افزائش سے مراد

$$\text{افزائش}=G=\frac{\text{آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{حوالہ اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}} \tag{14.84}$$

ہے جہاں دونوں اینٹینوں کی داخلی طاقت برابر ہے۔کسی بھی اینٹینا کو بطور حوالہ اینٹینا لیا جا سکتا ہے۔اگر ہم بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کو حوالہ تصور کریں تب

$$G_0=\frac{P_m'}{P_0} \tag{14.85}$$

ہو گا جہاں

[26] gain

شکل 14.12: وصولی اینٹینا آمدی موج سے طاقت حاصل کر کے برقی رکاوٹ کو فراہم کرتی ہے۔

P'_m آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت،

P_0 بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کی اخراجی شدت

ہیں۔یاد رہے کہ غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتا ہے لہٰذا اس کی زیادہ سے زیادہ شدت اور اوسط اخراجی شدت برابر ہوتے ہیں۔آزمودہ اینٹینا کی اخراجی شدت P'_m اور کامل اینٹینا کی اخراجی شدت P_m کی شرح اینٹینا کی کارگزاری k دیتی ہے۔یہ وہی k ہے جسے مساوات 14.62 میں بھی حاصل کیا گیا۔یوں

$$G_0 = \frac{kP_m}{P_0} = kD \tag{14.86}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی کامل اینٹینا ($k = 100\,\%$) کی افزائش، کامل غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے، اسی اینٹینا کی سمتیت کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل $k < 100\,\%$ اینٹینا کی صورت میں افزائش کی قیمت سمتیت سے کم ہو گی۔

سمتیت کی قیمت 1 تا ∞ ممکن ہے۔سمتیت کی قیمت اکائی سے کم نہیں ہو سکتی۔اس کے برعکس افزائش کی قیمت صفر تا لا محدود ممکن ہے۔

$$\begin{aligned} 1 \leq & D \leq \infty \\ 0 \leq & G \leq \infty \qquad \text{ممکنہ قیمت} \end{aligned}$$

اخراجی اینٹینا[27] شعاعی اخراج کرتا ہے۔اس کے برعکس **وصولی اینٹینا**[28] شعاع سے طاقت وصول کرتا ہے۔برقناطیسی امواج جب وصولی اینٹینا پر پہنچتی ہیں تو وصولی اینٹینا ان سے طاقت حاصل کرتی ہے۔اگر اینٹینا کے برقی سروں پر

[27] transmitting antenna
[28] receiving antenna

بیرونی مزاحمت R_B نسب کی جائے تو حاصل کردہ طاقت کا کچھ حصہ اس مزاحمت میں ضائع ہو گا۔ہم چونکہ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $W = I^2 R_B$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہٰذا اسی کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $I^2 R_B$ کے برابر طاقت آمدی موج کے رقبہ S میں پائی جاتی ہے۔یوں

$$\mathscr{P} S = I^2 R_B \tag{14.87}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ اینٹینے کا رقبہ S ہی ہے اور اینٹینا اتنے رقبے پر آمدی موج سے مکمل طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی برقی سروں تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔اس فرضی رقبے کو وصولی رقبہ[29] کہا جاتا ہے۔یوں وصولی رقبے کو

$$S = \frac{I^2 R_B}{\mathscr{P}} \tag{14.88}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں

S اینٹینا کا فرضی رقبہ، $\mathrm{m^2}$

I موثر برقی رو، A

$\mathscr{P}$ آمدی موج کا پوئنٹنگ سمتیہ، $\mathrm{W/m^2}$

R_L برقی مزاحمت، Ω

ہیں۔حقیقت میں اینٹینا $I^2 R_B$ سے زیادہ طاقت حاصل کرتا ہے جس کا کچھ حصہ اینٹینا کے اندر ہی ضائع ہو جاتا ہے۔ہمیں اینٹینا کے اندر ضائع ہونے والی طاقت سے کوئی دلچسپی نہیں ہے۔

شکل 14.12-الف میں آمدی موج میں تر اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بیرونی برقی رکاوٹ Z_B کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔اینٹینا کا تھونن[30] مساوی دور استعمال کرتے ہوئے، شکل-ب میں اسی کا مکمل برقی دور دکھایا گیا ہے۔اس دور میں سلسلہ وار برقی رو

$$I = \frac{v}{Z_A + Z_B} = \frac{v}{R_A + R_B + j(X_A + X_B)}$$

ہو گی جہاں

[29] antenna aperture
[30] Thevenin equivalent circuit

v اینٹینا میں آمدی موج سے پیدا موثر برقی دباو،

R_A اینٹینا کے تھونن مساوی دور میں اینٹینا کی مزاحمت،

X_A تھونن دور میں اینٹینا کی متعاملیت،

R_B بیرونی مزاحمت،

X_B بیرونی متعاملیت

ہیں۔یوں بیرونی مزاحمت کو مہیا طاقت

$$|I|^2 R_B = \frac{v^2 R_B}{(R_A + R_B)^2 + (X_A + X_B)^2} \tag{14.89}$$

ہو گا جس سے اینٹینے کا رقبہ وصولی

$$S = \frac{v^2 R_B}{\mathscr{P}\left[(R_A + R_B)^2 + (X_A + X_B)^2\right]} \tag{14.90}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آمدی موج کی نسبت سے ایک مخصوص انداز میں رکھے ہوئے اینٹینا میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو پیدا ہو گا۔اسی جگہ اینٹینا کو رکھتے ہوئے بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت اس صورت منتقل ہو گی جب

$$R_B = R_A \tag{14.91}$$
$$X_B = -X_A \tag{14.92}$$

ہوں۔بے ضیاع اینٹینا کی تھونن مزاحمت دراصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r ہی ہے۔اس طرح بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرتے وقت زیادہ سے زیادہ وصولی رقبہ

$$S_{\text{اخراجی}} = \frac{v^2}{4\mathscr{P} R_r} \tag{14.93}$$

حاصل ہو گا جسے اینٹینا کا اخراجی رقبہ[31] $S_{\text{اخراجی}}$ پکارا جاتا ہے۔ہر اینٹینا مخصوص قیمت کا اخراجی رقبہ رکھتا ہے۔

[31] effective aperture

مثال 14.4: پورے مختصر جفت قطب پر یکساں برقی رو تصور کرتے ہوئے، اس کا اخراجی رقبہ حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.93 سے ظاہر ہے کہ اخراجی رقبہ دریافت کرنے کے لئے، اینٹینا میں پیدا برقی دباو v، اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r اور آمدی موج میں کثافت طاقت $\mathscr{P}$ درکار ہوں گے۔ جفت قطب میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو اس صورت پیدا ہو گی جب اینٹینا کی تار اور آمدی موج کا برقی میدان متوازی ہوں۔ایسی صورت میں اینٹینا میں

$$v = El \tag{14.94}$$

برقی دباو پیدا ہو گی۔آمدی موج کی پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P} = \frac{E^2}{Z_0} \qquad (\text{W/m}^2) \tag{14.95}$$

ہے جہاں $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔مساوات 14.58 میں $I = I_0$ پر کرنے سے موجودہ جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{14.96}$$

حاصل ہوتی ہے۔ان تمام کو مساوات 14.93 میں پر کرتے ہوئے

$$S_{\text{اخراجی}} = \frac{E^2 l^2}{4\frac{E^2}{Z_0} 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0.119\lambda^2 \qquad (\text{m}^2) \tag{14.97}$$

یوں کامل مختصر جفت قطب کی لمبائی جتنی بھی کم کیوں نہ ہو یہ ہر صورت $0.119\lambda^2$ اخراجی رقبے پر آمدی موج سے تمام طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی مزاحمت تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ حقیقی جفت قطب غیر کامل ہو گا لہٰذا اس کی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضائع}}$ ہو گی۔یوں کامل جفت قطب کا اخراجی رقبہ کچھ کم ہو گا۔

آئیں ایسے اینٹینا کی بات کریں جس کا اخراجی رقبہ $S_{\text{اخراجی}}$ اور اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A ہو۔اخراجی رقبے پر یکساں برقی میدان E_m کی صورت میں اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_m^2}{Z} S_{\text{اخراجی}} \tag{14.98}$$

ہو گا جہاں Z انتقالی خطے کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اگر r فاصلے پر میدان E_r ہو تب اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_r^2}{Z} r^2 \Omega_A \tag{14.99}$$

ہو گا۔

ہم آگے جا کر مساوات 14.155 حاصل کریں گے جس کے تحت $E_r = \frac{E_m S_{\text{اخراجی}}}{r\lambda}$ ہے۔اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو برابر لکھتے ہوئے

$$\lambda^2 = S_{\text{اخراجی}} \Omega_A \qquad (\mathrm{m}^2) \tag{14.100}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

λ طول موج،

$S_{\text{اخراجی}}$ اینٹینا کا اخراجی رقبہ اور

Ω_A اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ

ہیں۔اس مساوات کے تحت اینٹینا کا اخراجی رقبہ ضرب اخراجی ٹھوس زاویہ برابر ہوتا ہے طول موج کا مربع۔یوں اگر ہمیں اخراجی رقبہ معلوم ہو تب ہم اخراجی ٹھوس زاویہ حاصل کر سکتے ہیں اور اگر اخراجی ٹھوس زاویہ معلوم ہو تب اخراجی رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 14.79 میں مساوات 14.100 پر کرنے سے

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}} \tag{14.101}$$

لکھا جا سکتا ہے۔سمتیت کی یہ تیسری مساوات ہے۔تینوں کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند ترین}}}{P_{\text{اوسط}}} \\
D &= \frac{4\pi}{\Omega} \\
D &= \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}}
\end{aligned}
\tag{14.102}
$$

جہاں پہلی دو مساوات میں سمتیت اخراجی شعاع کے نقش سے حاصل کی گئی ہے جبکہ تیسری مساوات میں اسے اخراجی رقبے سے حاصل کیا گیا ہے۔

14.8 قطاری ترتیب

مسئلہ اینٹینا دراصل اینٹینا کے مختلف حصوں سے پیدا میدانوں کا درست مجموعہ حاصل کرنا ہے۔اینٹینا کے مختلف حصوں کے میدان جمع کرتے ہوئے ان کے انفرادی حیطے اور زاویائی فرق کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

14.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع

دو عدد نقطہ منبع کو شکل 14.13-الف میں دکھایا گیا ہے۔دونوں منبع غیر سمتی ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ d ہے۔نقطہ منبع سے مراد ایسا فرضی منبع ہے جس کا حجم صفر کے برابر ہو۔ ہم آگے چل کر مسئلہ متکافیت[32] دیکھیں گے جس کے تحت نقطہ منبع کے قطاروں کا اخراجی نقش اور انہیں کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں منبع برابر حیطے اور ہم قدم میدان پیدا کرتے ہیں۔دونوں میدان کے خطی تقطیب ہیں۔مزید یہ کہ دونوں کے $\boldsymbol{E}$ میدان صفحے کے عمودی ہیں۔دونوں منبع سے برابر فاصلے پر ان کے بالکل درمیانے مقام پر زاویائی صفر تصور کرتے ہوئے، دور میدان کو

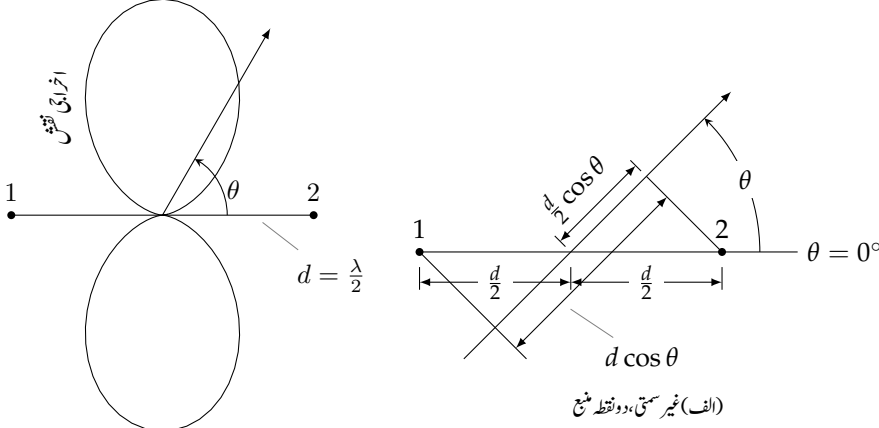
$$
E = E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} + E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} \tag{14.103}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$
\psi = \beta d \cos\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta \tag{14.104}
$$

ہے۔ان مساوات میں

[32] reciprocity

(الف) غیر سمتی، دو نقطہ منبع

(ب) برابر حیطہ اور ہم زاویہ غیر سمتی دو عدد نقطہ منبع جن کے درمیان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلہ ہو کا نقش

شکل 14.13: غیر سمتی، دو نقطہ منبع

E_1 منبع-1 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان،

E_2 منبع-2 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان اور

ψ دونوں اشارات کا زاویہ θ کی سمت میں زاویائی فرق

ہیں۔ دونوں دور میدان برابر $(E_1 = E_2)$ ہونے کی صورت میں یوں

$$E = E_1\left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}}\right) = 2E_1\cos\frac{\psi}{2} \tag{14.105}$$

ہو گا۔ فاصلہ $d = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں میدان کو شکل 14.13-ب میں دکھایا گیا ہے۔

اگر زاویائی صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام کی جگہ منبع-1 پر چنا جاتا تب دور میدان

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 e^{j\psi} \\ &= \left(E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} + E_2 e^{j\frac{\psi}{2}}\right) e^{j\frac{\psi}{2}} \end{aligned} \tag{14.106}$$

حاصل ہوتا جو $E_1 = E_2$ کی صورت میں

$$E = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} e^{j\frac{\psi}{2}} = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} \angle \frac{\psi}{2} \tag{14.107}$$

حاصل ہوتا۔میدان کا نقش چونکہ میدان کے حیطے پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اس میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوئی البتہ میدان کا زاویہ تبدیل ہو گیا ہے۔میدان کے زاویے کی تبدیلی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے زاویے کے صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام سے ہٹا کر منبع-1 پر چنا ہے۔

14.8.2 ضرب نقش

گزشتہ حصے میں بالکل یکساں دو عدد غیر سمتی نقطہ منبع کے میدان پر غور کیا گیا۔اگر نقطہ منبع سمتی ہوں اور دونوں کے نقش بالکل یکساں ہوں تب بھی مساوات 14.105 (یا مساوات 14.107) ہی ان کا مجموعی میدان دے گا پس فرق اتنا ہے کہ اب E_1 از خود θ کا تفاعل $E(\theta)$ ہے۔ انفرادی منبع کے نقش $E(\theta)$ کو **انفرادی نقش**[33] جبکہ $\cos \frac{\psi}{2}$ کو **قطاری نقش**[34] کہا جائے گا۔یوں

$$E = E(\theta) \cos \frac{\psi}{2} \tag{14.108}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 14.108 **ضرب نقش**[35] کا اصول بیان کرتا ہے جس کے تحت انفرادی منبع کا نقش اور غیر سمتی نقطہ منبع کے قطار کا نقش ضرب دینے سے سمتی منبع کے قطار کا نقش حاصل ہوتا ہے۔یہاں فرض کیا گیا ہے کہ قطار میں انفرادی نقطہ منبع کا نقش وہی ہے جو اس نقطہ منبع کا تنہائی میں نقش ہوتا ہے۔

14.8.3 ثنائی قطار

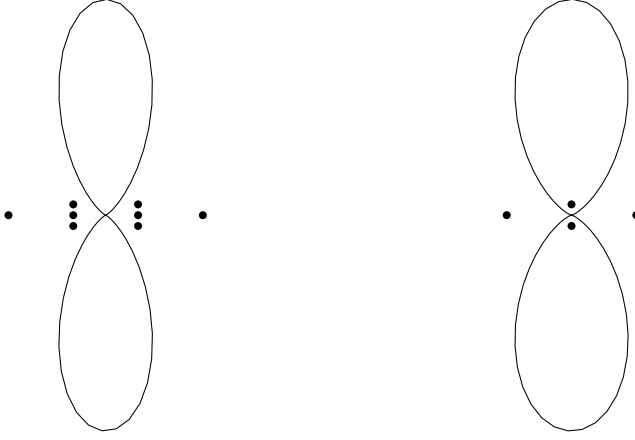
مساوات 14.107 دو غیر سمتی زاویائی طور پر ہم قدم نقطہ منبع کے جوڑی کا دور میدان دیتا ہے۔نقطہ منبع کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ اور $E_1 = \frac{1}{2}$ ہونے کی صورت میں اس مساوات کو

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \tag{14.109}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس نقش کو شکل 14.13-ب میں دکھایا گیا ہے جس میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پائی جاتی۔ اس جوڑی منبع کے سیدھ میں $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر منبع کی دوسری جوڑی رکھنے سے 14.14-الف حاصل ہوتا ہے۔اس شکل میں

---

[33] primary pattern
[34] array pattern
[35] pattern multiplication

(الف) ثنائی قطار میں منبع کے حیطے 1:2:1 تناسب سے ہیں۔

(ب) ثنائی قطار میں منبع کے حیطے 1:3:3:1 تناسب سے ہیں۔

شکل 14.14: ثنائی قطار

دو درمیانے منبع دراصل ایک ہی نقطے پر پائے جائیں گے لیکن وضاحت کی خاطر انہیں اوپر نیچے دکھایا گیا ہے۔ضرب نقش کے اصول کے تحت ان کا مجموعی میدان

$$E = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.110}$$

ہو گا جسے شکل 14.14-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس مساوات پر شک کرنے والوں کے لئے مثال 14.5 میں تفصیلی ثبوت پیش کیا گیا ہے۔ اس قطار کو تین عدد منبع کی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں قطار میں بالترتیب، منبع کی طاقت $(1:2:1)$ نسبت سے ہے۔اس تین رکنی قطار کے سیدھ میں لیکن $\frac{\lambda}{2}$ ہٹ کر بالکل ایسی ہی تین رکنی قطار رکھنے سے شکل 14.14-ب حاصل ہوتی ہے۔اس نئی قطار کو چار رکنی تصور کیا جا سکتا ہے جہاں بالترتیب منبع کی طاقت $(1:3:3:1)$ نسبت سے ہے۔ اس چار رکنی قطار کا میدان

$$E = \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.111}$$

ہے۔اس نقش میں بھی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔اسی طرح بڑھتے ہوئے، ثانوی شعاع سے پاک، زیادہ سے زیادہ سمتیت کا نقش حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں زیادہ منبع پر مبنی قطار میں منبع کی طاقت ثنائی تسلسل[36] کے ثنائی سر[37] کی

[36] binomial series
[37] binomial coefficient

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

شکل 14.15: پاسکل تکون

نسبت سے ہوتے ہیں۔ ثنائی سروں کو شکل 14.15 میں دکھائے گئے **پاسکل تکون**[38] کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس میں ہر اندرونی عدد، اوپر کے قریبی دو اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے۔متعدد منبع کے قطار کے نقش

$$E = \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.112}$$

کے برابر ہو گا جہاں قطار میں منبع کی تعداد n ہے۔

اگرچہ مندرجہ بالا n رکنی قطار کے نقش میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پائی جاتی اس کے باوجود اس کی سمتیت برابر طاقت کے n رکنی منبع کے قطار سے کم ہوتی ہے۔ حقیقی قطار عموماً ان دو صورتوں (ثنائی قطار اور یکساں قطار) کی درمیانی شکل رکھتے ہیں۔

مثال 14.5: مساوات 14.110 کو ثابت کریں۔

حل: مساوات 14.106 کی طرح زاویائی صفر کو قطار کے پہلی رکن پر چنتے ہوئے

$$\begin{aligned}
E &= E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} \\
&= E_0\left(1 + e^{j\psi}\right) + E_0 e^{j\psi}\left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0\left(1 + e^{j\psi}\right)\left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0\left(1 + e^{j\psi}\right)^2
\end{aligned}$$

---

[38] Pascal triangle

جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \frac{\pi}{2}\cos\theta$ پر کرتے ہوئے

$$E = \left[\left(\frac{e^{-j\frac{\psi}{2}} + e^{j\frac{\psi}{2}}}{2}\right)e^{j\frac{\psi}{2}}\right]^2 = \cos^2\frac{\psi}{2}\,\underline{/\psi}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کا حیطہ $\cos^2\frac{\psi}{2}$ نقش کی مساوات ہے۔

مثال 14.6: مساوات 14.112 کو تفصیل سے ثابت کریں۔

ثنائی قطار میں رکن کی طاقت ثنائی تسلسل کے سر کی نسبت سے ہوتے ہیں۔یوں $n+1$ رکنی قطار میں بالترتیب رکن کے طاقت $(1+x)^n$ کی ثنائی تسلسل

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{14.113}$$

کے سر سے حاصل کئے جاتے ہیں۔یوں تین رکنی قطار کے سر ثنائی تسلسل

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \tag{14.114}$$

کے سر کی نسبت $1:2:1$ سے ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے تین رکنی قطار کا دور میدان مندرجہ بالا مساوات کے بائیں یا دائیں ہاتھ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$E = E_0\left(1 + e^{j\psi}\right)^2 = E_0(1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi}) \tag{14.115}$$

تین رکنی قطار کو دیکھ کر دور میدان مندرجہ بالا مساوات کی دائیں ہاتھ دیتی ہے جسے ثنائی تسلسل کی مدد سے مساوات کی بائیں ہاتھ کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔مساوات کے بائیں ہاتھ سے نقش $\cos^2\frac{\psi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح n رکنی قطار کو $(1+x)^{n-1}$ کی ثنائی تسلسل کی مدد سے اکٹھے کرتے ہوئے

$$E = E_0\left(1 + e^{j\psi}\right)^{n-1} \tag{14.116}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \pi \cos \theta$ پر کرتے ہوئے صرف حیطہ لیتے ہوئے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.117}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

14.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار

ثنائی قطار غیر یکساں رکنی قطار ہے۔آئیں شکل 14.16 میں دکھائے گئے n رکنی، غیر سمتی یکساں طاقت کے منبع کی قطار کا دور میدان حاصل کریں۔یہاں فرض کیا جاتا ہے کہ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔یوں

$$\psi = \beta d \cos\theta + \delta \tag{14.118}$$

ہو گا۔قطار کا دور میدان

$$E = E_0\left(1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{j(n-1)\psi}\right) \tag{14.119}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

d قطار میں رکن کے درمیان فاصلہ،

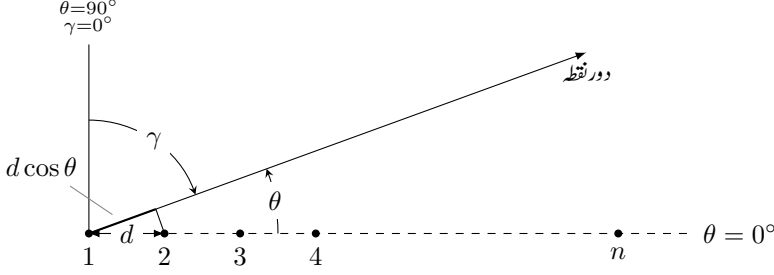
δ ہر دو قریبی رکن کے درمیان زاویائی فرق اور

ψ دو قریبی رکن میں کل زاویائی فرق یعنی $\psi = \beta d \cos\theta + \delta$

ہیں۔

اس میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے جانی پہچانی تسلسل

$$E_0\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

$\theta = 90^\circ$
$\gamma = 0^\circ$
دور نقطہ
γ
$d\cos\theta$
θ
d
1 2 3 4 n
$\theta = 0^\circ$

شکل 14.16: یکساں حیطہ کے n ارکان کی قطار

حاصل ہوتی ہے جس کا مجموعہ

$$E_0 \left(\frac{1 - x^n}{1 - x} \right)$$

کے برابر ہے۔

مساوات 14.119 کو $e^{j\psi}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$Ee^{j\psi} = E_0 \left(e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{jn\psi} \right) \tag{14.120}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.119 سے مساوات 14.120 منفی کر کے E کے لئے حل کرتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}} = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \,\angle (n-1)\frac{\lambda}{2} \tag{14.121}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر قطار کے درمیانے نقطے کو زاویائی صفر چنا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات میں زاویہ $\angle (n-1)\frac{\lambda}{2}$ نہ پایا جاتا۔ تمام رکن غیر سمتی ہونے کی صورت میں E_0 ہر رکن کا انفرادی نقش ہو گا جبکہ $\frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$ قطاری نقش ہے۔

غیر سمتی منبع اور زاویائی صفر کا مقام قطار کے درمیانے نقطے پر رکھتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \tag{14.122}$$

ہو گا۔ قطار کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\psi \to 0$ کی صورت میں پائی جائے گی۔ چونکہ $\psi = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات $E = \frac{0}{0}$ دیتا ہے جو بے معنی[39] ہے لہٰذا ہمیں ال ہوسپٹل[40] کا قاعدہ استعمال کرنا ہو گا جس کے تحت اگر تفاعل $y = \frac{m(x)}{n(x)}$ کی قیمت $x \to a$ پر $y = \frac{0}{0}$ حاصل ہو تب قیمت $y = \frac{\partial m/\partial x}{\partial n/\partial x}$ سے حاصل ہو گی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے $\psi \to 0$ پر

$$E = E_0 \frac{\frac{\partial \sin \frac{n\psi}{2}}{\partial \psi}}{\frac{\partial \sin \frac{\psi}{2}}{\partial \psi}} \Bigg|_{\psi \to 0}$$

$$= E_0 \frac{\frac{n}{2} \cos \frac{n\psi}{2}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2}} \Bigg|_{\psi \to 0}$$

یعنی

$$E = nE_0 \tag{14.123}$$

حاصل ہوتا ہے جو قطار کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ میدان ہے۔ یہ میدان قطار میں انفرادی منبع کے طاقت سے n گنا زیادہ ہے۔ اس قطار کے نقش کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس زاویے پر پائی جائے گی جس پر $\psi = 0$ یعنی

$$\beta d \cos \theta + \delta = 0 \tag{14.124}$$

ہو جس سے

$$\theta_{\text{بلند تر طاقت}} = \cos^{-1} \left(-\frac{\delta}{\beta d} \right) \tag{14.125}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح اخراجی نقش کا صفر اس مقام پر ہو گا جہاں مساوات 14.122 صفر کے برابر ہو یعنی جہاں $\frac{n\psi}{2} = \mp k\pi$ کے برابر ہو یعنی

$$\frac{n}{2} \left(\beta d \cos \theta + \delta \right) = \mp k\pi \tag{14.126}$$

جس سے صفر اخراج کا زاویہ

$$\theta_0 = \cos^{-1} \left[\left(\mp \frac{2k\pi}{n} - \delta \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \tag{14.127}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

---

[39] indeterminate
[40] L Hospital's rule

θ_0 صفر اخراج کا زاویہ،

k اعداد $k = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے جہاں $k \neq mn$ کی شرط لاگو ہے جس میں $m = 1, 2, 3, \cdots$ کے برابر ہے۔

مساوات 14.122 کو مساوات 14.123 سے تقسیم کرتے ہوئے تقابل پذیر میدان E_n

$$E_n = \frac{E}{nE_0} = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \tag{14.128}$$

حاصل ہوتا ہے۔

14.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار

نقش کی چوٹی اس مقام پر پائی جاتی ہے جس پر $\beta d \cos \theta = -\delta$ ہو۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر، چوڑائی جانب ($\theta = 90°$) زیادہ سے زیادہ اخراج $\delta = 0$ کی صورت میں ہو گا یعنی جب تمام انفرادی منبع ہم قدم ہوں۔ اگر θ کی جگہ اس کا زاویہ تکملہ[41] γ استعمال کیا جائے تب نقش کے صفر

$$\gamma_0 = \sin^{-1} \left(\mp \frac{k\lambda}{nd} \right) \tag{14.129}$$

پر پائے جائیں گے۔ لمبی قطار $nd \gg k\lambda$ کی صورت میں γ_0 کم قیمت کا ہو گا لہٰذا اسے

$$\gamma_0 = \frac{k}{nd/\lambda} \approx \frac{k}{L/\lambda} \tag{14.130}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں قطار کی لمبائی $L = (n-1)d$ ہے۔ لمبائی کو $n \gg 1$ کی صورت میں

$$L = (n-1)d \approx nd$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 14.130 میں $k = 1$ پر کرتے ہوئے نقش کا پہلا صفر γ_{01} حاصل ہوتا ہے۔ یوں گوشے کے دونوں اطراف پر پہلے صفروں کے درمیان نقش کی چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = \gamma_{01} \approx \frac{2}{L/\lambda} \,\text{rad} \; = \frac{114.6°}{L/\lambda} \tag{14.131}$$

---

[41] complementary angle

حاصل ہوتی ہے۔ نقش میں زیادہ سے زیادہ طاقت کے زاویے کے دونوں اطراف وہ زاویے پائے جاتے ہیں جن پر طاقت نصف ہوتی ہے۔ان کے درمیان زاویے کو **نصف طاقت چوڑائی**[42] ، کہتے ہیں۔لمبے یکساں **چوڑائی جانب اخراجی قطار**[43] کے نصف طاقت چوڑائی کی قیمت **پہلی صفر چوڑائی**[44] کے تقریباً آدھی ہوتی ہے۔یوں

$$\text{نصف طاقت چوڑائی} \approx \frac{\text{پہلی صفر چوڑائی}}{2} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} \;=\frac{57.3^\circ}{L/\lambda} \tag{14.132}$$

ہو گی۔

شکل 14.17 میں چوڑائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر نقش دکھایا گیا ہے۔یہ نقش مساوات 14.128 سے حاصل کیا گیا ہے۔اس قطار میں منبع $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر رکھے گئے ہیں۔ بیس عدد برابر طاقت کے منبع پر مبنی اس قطار کی نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^\circ = 5.1^\circ$ ہے۔شکل میں نقش کا تراش دکھایا گیا ہے۔یہ حقیقت میں چرخی مانند ہے لہٰذا $\phi = 0^\circ$ تا $\phi = 360^\circ$ گھومتے ہوئے اس کی صورت یہی نظر آئے گی۔یوں ϕ زاویے پر اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^\circ = 360^\circ$ ہے۔

14.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار

زیادہ سے زیادہ اخراج کا زاویہ مساوات 14.124

$$\beta d\cos\theta+\delta=0 \tag{14.133}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر سیدھا آگے $(\theta=0)$ لمبائی کی جانب زیادہ سے زیادہ اخراج اس صورت ہو گا جب ہر دو قریبی منبع کے مابین

$$\delta=-\beta d \tag{14.134}$$

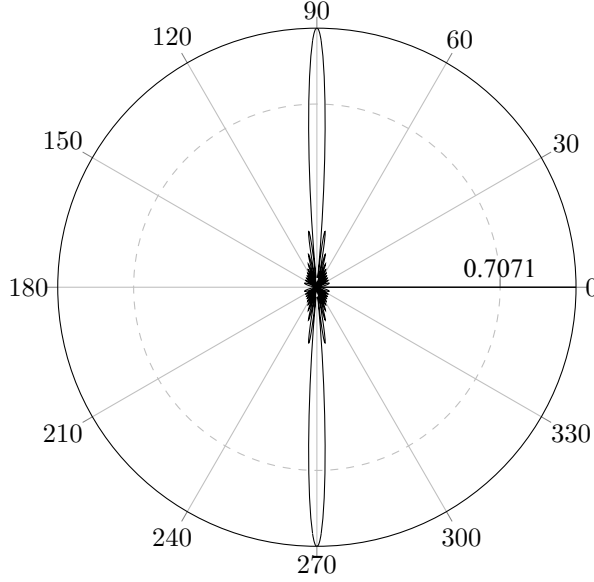
زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔یوں ایسی قطار کی صفریں مساوات 14.126 کے تحت

$$\frac{n}{2}\beta d\left(\cos\theta_0-1\right)=\mp k\pi$$

یعنی

$$\cos\theta_0-1=\mp\frac{k}{nd/\lambda}$$

---

[42] half power beam width, HPBW
[43] broadside array
[44] beam width between first nulls, BWFN

شکل 14.17: چوڑائی جانب اخراجی قطار

سے حاصل ہوں گے۔اس سے

$$\frac{\theta_0}{2} = \sin^{-1}\left(\mp\sqrt{\frac{k}{2nd/\lambda}}\right) \tag{14.135}$$

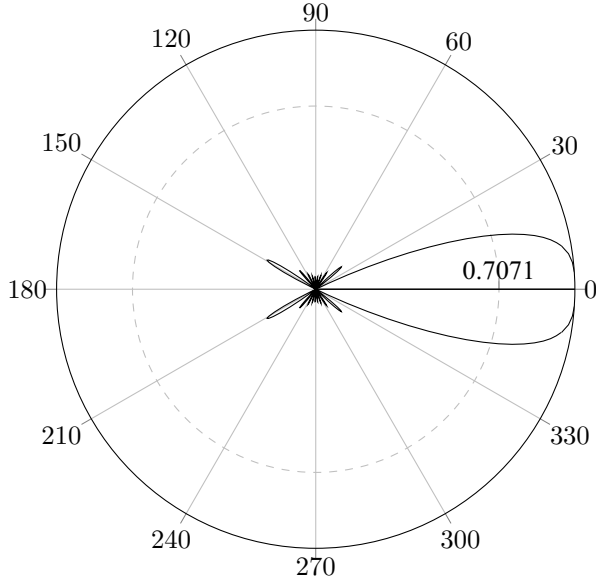
لکھا جا سکتا ہے۔لمبی قطار $(nd \gg k\lambda)$ کی صورت میں اسے

$$\theta_0 = \mp\sqrt{\frac{2k}{nd/\lambda}} \approx \mp\sqrt{\frac{2k}{L/\lambda}} \tag{14.136}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی $L = (n-1)d$ کو $(nd \gg k\lambda)$ کی صورت میں $L \approx= nd$ لکھا گیا ہے۔پہلا صفر $k = 1$ پر حاصل ہو گا جس سے پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\theta_{01} \approx 2\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}}\,\text{rad} = 114.6^\circ\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}} \tag{14.137}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیس منبع پر مبنی، لمبائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر اخراجی نقش شکل 14.18 میں دکھایا گیا ہے۔یہ نقش مساوات 14.128 سے حاصل کیا گیا ہے۔منبع کے درمیانی فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ ہے۔مساوات 14.128 سے پہلی صفر چوڑائی 52° اور

شکل 14.18: لمبائی جانب اخراجی قطار

نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^{\circ} = 34^{\circ}$ حاصل ہوتی ہے۔یہ نقش جتنا چوڑا ہے یہ اتنا صفحہ کے عمودی جانب موٹا بھی ہے۔یوں ϕ جانب بھی اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^{\circ} = 34^{\circ}$ ہی ہے۔لمبائی جانب اخراجی لمبی قطار کی نصف طاقت چوڑائی اس کے پہلے صفر چوڑائی کے تقریباً $\frac{2}{3}$ گنا ہوتی ہے۔

جیسے مثال 14.7 اور مثال 14.8 میں آپ دیکھیں گے کہ n عدد منبع پر مبنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت n عدد منبع پر مبنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت سے زیادہ ہوتی ہے۔

مساوات 14.79 اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \tag{14.138}$$

دیتا ہے جہاں ٹھوس زاویہ مساوات 14.74 سے حاصل ہوتا ہے۔اگر ثانوی شعاعوں کو نظرانداز کیا جائے تب مرکزی شعاع کے θ سمت میں نصف طاقت زاویے θ_{HP} اور ϕ سمت میں نصف طاقت زاویے ϕ_{HP} کا ضرب تقریباً ٹھوس زاویے کے برابر ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 14.74 حل کرنا ضروری نہیں اور سمتیت کو

$$D \approx \frac{4\pi}{\phi_{HP}\phi_{HP}} \tag{14.139}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں نصف طاقت زاویے ریڈیئن میں ہیں۔اس مساوات میں

$$4\pi \,\mathrm{sr} = 4\pi \,\mathrm{rad}^2 = 4\pi \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \,\mathrm{deg}^2 = 41\,253 \,\mathrm{deg}^2$$

پر کرتے ہوئے

$$D \approx \frac{41\,253}{\theta^{\circ}_{HP}\phi^{\circ}_{HP}} \tag{14.140}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 14.7: بیس رکنی، چوڑائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta^{\circ}_{HP} = 5.1^{\circ}$ اور $\phi^{\circ}_{HP} = 360^{\circ}$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.140 سے

$$D \approx \frac{41\,253}{5.1 \times 360} = 22.5$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.8: بیس رکنی، لمبائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta^{\circ}_{HP} = \phi^{\circ}_{HP} = 34^{\circ}$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.140 سے

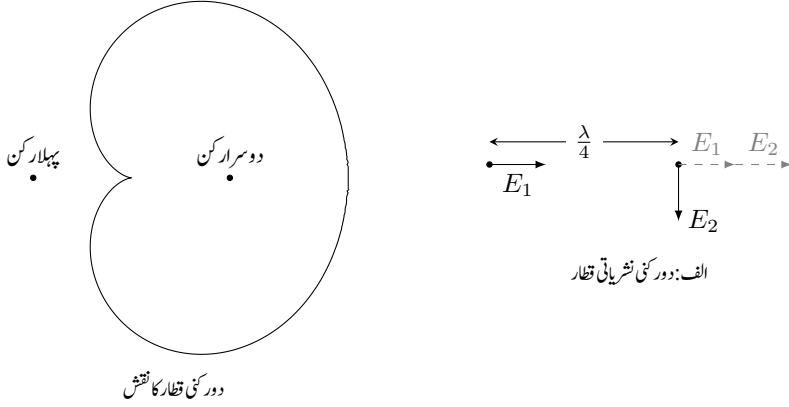
$$D \approx \frac{41\,253}{34 \times 34} = 35.7$$

پہلا رکن

دوسرا رکن

دور کنی قطار کا نقش

$\frac{\lambda}{4}$ E_1 E_2

الف: دور کنی نشریاتی قطار

شکل 14.19: دور کنی اشاعتی قطار اور اس کا نقش

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.9: دو ارکان پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{4}$ ہے۔ دائیں رکن (دوسرا رکن) کو $90°$ پیچھے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ دونوں برقی رو کی مطلق قیمت برابر ہے۔ دونوں ارکان افقی سطح پر سیدھے کھڑے ہیں۔ افقی میدان پر اخراجی نقش حاصل کریں۔

حل: برقی رو کی مطلق قیمت برابر ہونے کی صورت میں $|E_1| = |E_2| = E$ ہوں گے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر بائیں رکن (پہلا رکن) کا برقی میدان $0°$ میکانی زاویے پر ہو تب اسی لمحہ دائیں رکن (دوسرا رکن) کا میدان $-90°$ میکانی زاویے پر ہو گا۔ شکل 14.19-الف میں ان میدان (E_1 اور E_2) کو گاڑھی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ دونوں ارکان میں $\frac{\lambda}{4}$ کا فاصلہ ہے لہٰذا جتنی دیر میں بائیں رکن کے میدان کی موج E_1 چل کر دائیں رکن تک پہنچے گی اتنی دیر میں دوری عرصے کے $\frac{1}{4}$ برابر وقت گزر چکا ہو گا لہٰذا دوسرے رکن میں برقی رو $\frac{1}{4} \times 360° = 90°$ آگے بڑھ چکی ہو گی اور یوں اس لمحہ پر دوسرا رکن $0°$ میکانی زاویے پر ہی میدان پیدا کرے گا۔ یوں دوسرے رکن کے مقام پر دونوں میدان ہم قدم پائے جائیں گے لہٰذا یہاں برقی میدان $E_1 + E_2$ یعنی دگنا ہو گا۔ شکل 14.19-الف میں

کچھ دیر بعد کے ان میدان کو ہلکی سیاہی میں ہم قدم دکھایا گیا ہے۔دونوں میدان دائیں جانب ہم قدم رہتے ہوئے حرکت کریں گے۔

اس کے برعکس جس لمحہ دائیں رکن کی برقی رو $0°$ پر ہو اسی لمحہ بائیں رکن کی برقی رو $90°$ پر ہو گی۔اس لمحے پر دائیں رکن کا میدان $0°$ پر ہو گا جبکہ بائیں رکن کا میدان $90°$ پر ہو گا۔اب جتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان بائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان مزید $90°$ آگے بڑھ کر $180°$ پر پہنچ چکا ہو گا۔یوں دائیں رکن کے مقام پر دونوں میدان آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہٰذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔اس طرح دائیں رکن کے دائیں جانب میدان صفر ہی پایا جائے گا۔شکل 14.19 میں صفر اور پائے ریڈیئن زاویوں پر دگنا اور صفر میدان دکھایا گیا ہے۔

دونوں رکن کے درمیان عمودی لکیر پر پہنچنے کے لئے دونوں میدان کو برابر دورانیے کی ضرورت ہے لہٰذا اس لکیر پر دونوں میدان آپس میں عمودی رہیں گے۔یوں اس لکیر پر کل میدان مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{E^2+E^2} = 1.4142E$ حاصل ہو گا۔شکل 14.19-ب میں اسی طرح مختلف مقامات پر میدان حاصل کرتے ہوئے حاصل کردہ نقش دکھایا گیا ہے۔

مندرجہ بالا مثال کے نقش سے ظاہر ہے کہ یہ اینٹینا بائیں جانب اخراج نہیں کرتا لہٰذا اس کے بائیں جانب دوسرا اینٹینا نسب کیا جا سکتا ہے جس کی اخراجی سمت بائیں رکھی جائے گی تا کہ دونوں علیحدہ علیحدہ نشریات کر سکیں۔

14.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا

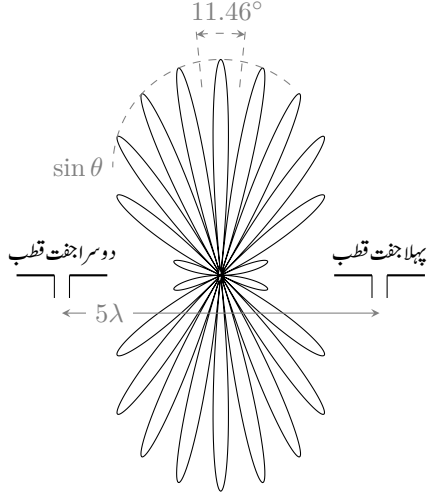
مساوات 14.125

$$\theta_{\text{بلند تر طاقت}} = \cos^{-1}\left(-\frac{\delta}{\beta d}\right) \tag{14.141}$$

یکساں ارکان کے قطار کی مرکزی نقش کا زاویہ دیتی ہے۔چوڑائی جانب اخراجی قطار میں $\theta = 90°$ رکھا جاتا ہے جبکہ لمبائی جانب اخراجی قطار میں $\theta = 0°$ رکھا جاتا ہے۔اگر شعاع کی سمت تبدیل کرنی ہو تو ایسے اینٹینا کو گھمانا ہو گا۔

مساوات 14.125 کے تحت δ کو تبدیل کرتے ہوئے شعاع کی سمت کسی بھی زاویے پر رکھی جا سکتی ہے۔یوں δ کو -1 تا $+1$ مسلسل تبدیل کرتے ہوئے شعاع کی سمت کو $0°$ تا $180°$ مسلسل تبدیل کیا جا سکتا ہے۔یوں **بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا**[45] کو ہلائے بغیر اس کی اخراجی سمت تبدیل کی جا سکتی ہے۔

[45] scanning antenna

11.46°
sin θ
دوسرا جفت قطب
پہلا جفت قطب
5λ

شکل 14.20: دو عدد مختصر جفت قطب جنہیں 5λ فاصلے پر رکھا گیا ہے سے حاصل تداخل پیما کا نقش۔

14.9 تداخُل پیما

فلکیات[46] کے میدان میں اینٹینا کا کلیدی کردار ہے۔ریڈیائی فلکیات[47] میں استعمال ہونے والے اینٹینا کو **تداخل پیما**[48] اینٹینا کہتے ہیں۔

شکل 14.20 میں دو عدد مختصر جفت قطب کے درمیان فاصلہ L ہے۔دونوں کو ہم قدم برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ضرب نقش کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے اس کا نقش

$$E = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} \tag{14.142}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\psi = \beta L \cos\theta$ کے برابر ہے۔ضرب نقش کے تحت E_1 انفرادی رکن کی نقش ہے جبکہ $\cos\frac{\psi}{2}$ دو رکنی قطار کا نقش ہے۔ہمیں میدان بالمقابل زاویہ سے غرض ہے۔مساوات 14.49 مختصر جفت قطب کا نقش دیتا ہے جس میں میدان اور زاویے کا تعلق $\sin\theta$ ہے۔اسی کو استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش

$$E = \sin\theta \cos\frac{\psi}{2} = \sin\theta\cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta\right) \tag{14.143}$$

---

astronomy[46]
radio astronomy[47]
interferometer[48]

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ شکل 14.20 میں $L = 5\lambda$ کے لئے نقش دکھایا گیا ہے۔ زاویہ θ کا زاویہ تکملہ $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ استعمال کرتے ہوئے، پہلا صفر

$$\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta = \frac{\pi L}{\lambda}\sin\gamma_{01} = \frac{\pi}{2}$$

کی صورت میں پایا جائے گا جس سے

$$\gamma_{01} = \sin^{-1}\frac{1}{2L/\lambda} \tag{14.144}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $L \gg \lambda$ ہو تب پہلی صفر چوڑائی

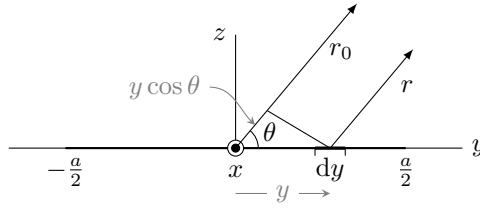
$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\gamma_{01} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3}{L/\lambda}\,\text{deg} \tag{14.145}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ یہ مساوات 14.131 میں دیے، n رکنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کے پہلی صفر چوڑائی کی آدھی قیمت ہے۔ ہلکی سیاہی کے نقطہ دار لکیر سے شکل میں مختصر جفت قطب کے نقش $\sin\theta$ کو واضح کیا گیا ہے۔

پانچ طول موج برابر L کی صورت میں مساوات 14.145 سے پہلی صفر چوڑائی $11.46°$ حاصل ہوتی ہے۔

ریڈیائی فلکیات میں فلکی اخراجی مادے کی شعاع کو تداخل پیما سے وصول کیا جاتا ہے۔ ان کی جسامت کا بہتر سے بہتر تخمینہ لگانے میں چوڑائی نقش کردار ادا کرتی ہے۔

مشق 14.1: $L = 20\lambda$ کی صورت میں تداخل پیما کی پہلی صفر چوڑائی حاصل کریں۔

جواب: $2.865°$

شکل 14.21: مستطیل سطحی اینٹینا

14.10 مستطیل سطحی اینٹینا

ہم متعدد تعداد کے نقطہ منبع پر مبنی مختلف اقسام کے اینٹینا دیکھ چکے ہیں۔اگر نقطہ منبع کے صف در صف اتنے قریب قریب فرضی سطح پر رکھے جائیں کہ یہ علیحدہ علیحدہ منبع کی جگہ ایک مسلسل سطح نظر آئے تو ایسی صورت میں سطحی اینٹینا[49] حاصل ہو گا۔ایسی ہی ایک مستطیلی سطح جس کی x سمت میں لمبائی x_1 اور y سمت میں لمبائی a ہے کو شکل 14.21 میں دکھایا گیا ہے۔تصور کریں کہ اس سطح پر J_x کثافت برقی رو پائی جاتی ہے۔یہ تصور کرتے ہوئے کہ سطح کے نیچے یعنی $z < 0$ خطے میں مقناطیسی میدان نہیں پایا جاتا، ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_y = -J_x \tag{14.146}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_y سطح کے انتہائی قریب بالائی جانب[50] مقناطیسی میدان ہے۔ سطحی اینٹینا کے دور میدان پر تبصرے سے پہلے ایک حقیقت پر غور کرتے ہیں۔

فرض کریں کی خلاء میں سطحی برقناطیسی موج پائی جاتی ہے۔ہائی گن[51] کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ، منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔یوں سطح پر چھوٹے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ پر خطی قطبی برقی میدان E_x بطور منبع کردار ادا کرے گا۔ سطح کے برقی میدان E_x سے یہاں کا مقناطیسی میدان

$$H_y = \frac{E_x}{Z_0} \tag{14.147}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Z_0 خطے کی قدرتی رکاوٹ $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ہے۔

---

[49] continuous aperture

[50] یہاں فرض کیا گیا ہے کہ سطحی اینٹینا نچلی جانب اخراج نہیں کر رہی۔اگر اینٹینا نچلی جانب بھی اخراج کرے تب $H_y = -0.5J_x$ لکھا جائے گا۔

[51] Huygen's principle

مساوات 14.146 اور مساوات 14.147 دو مختلف وجوہات کی بنا پر پیدا مقناطیسی میدان ظاہر کرتے ہیں۔دور سے ان دونوں میں کسی قسم کا کوئی فرق نہیں دیکھا جا سکتا لٰہذا ان دونوں سے پیدا موج میں بھی کوئی فرق نہیں پایا جائے گا۔اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی اینٹینا کا دور میدان اور خلاء میں فرضی سطح پر موج کا دور میدان بالکل یکساں ہوں گے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی سطح پر کثافت برقی رو J_x کو خلاء میں مقناطیسی میدان H_y یا برقی میدان E_x سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$-J_x = H_y = \frac{E_x}{Z_0} \tag{14.148}$$

اس طرح مندرجہ ذیل تبصرہ ان دونوں کے لئے قابل قبول ہے۔

آئیں اب واپس اصل موضوع پر آتے ہیں۔تصور کریں کہ شکل 14.21 کے سطحی اینٹینا پر x سمت میں نہ تبدیل ہوتی جبکہ y سمت میں تبدیل ہوتی کثافت برقی رو $J_x(y)$ پائی جاتی ہے۔پوری سطح پر کثافت برقی رو ہم قدم ہے۔

مساوات 14.25 میں $I_0 = J_x \, \mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}l = \mathrm{d}x$ پر کرنے سے A حاصل کرتے ہوئے، چھوٹے رقبے $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ سے دور تفرق میدان کو $E = -j\omega A$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E &= -j\omega[\mathrm{d}A_x] \\
&= -j\omega \frac{\mu_0 I_0 \, \mathrm{d}l \, e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \\
&= -j\omega \frac{\mu_0 J_x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \\
&= \frac{j\omega\mu_0 E(y)}{4\pi r Z_0} e^{j(\omega t-\beta r)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{14.149}$$

جہاں مساوات 14.148 کا سہارا لیا گیا ہے۔پورے رقبے سے پیدا میدان سطحی تکمل سے حاصل ہو گا۔رقبے کے وسط سے r_0 فاصلے اور θ زاویے پر میدان

$$E(\theta) = \frac{j\omega\mu_0 e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{4\pi r_0 Z_0} \int\limits_{-a/2}^{a/2} \int\limits_{-x_1/2}^{x_1/2} E(y) e^{j\beta y\cos\theta} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{14.150}$$

ہو گا جہاں $r \approx r_0$ لیا[52] گیا ہے۔بیرونی تکمل لیتے اور $\frac{1}{2\lambda} = \frac{\omega\mu_0}{4\pi Z_0}$ پر کرتے ہوئے میدان کی مطلق قیمت $|E|$

$$E(\theta) = \frac{x_1}{2r_0\lambda} \int\limits_{-a/2}^{a/2} E(y) e^{j\beta y\cos\theta} \, \mathrm{d}y \tag{14.151}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\left| je^{(\omega t - \beta r_0)} \right| = 1$ لیا گیا ہے۔پوری سطح پر یکساں میدان $E(y) = E_a$ کی صورت میں

$$E(\theta) = \frac{x_1 E_a}{2r_0\lambda} \int\limits_{-a/2}^{a/2} e^{j\beta y\cos\theta} \, \mathrm{d}y \tag{14.152}$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \frac{x_1 a E_a}{2r_0\lambda} \frac{\sin[(\beta a/2)\cos\theta]}{(\beta a/2)\cos\theta} \\ &= \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda} \frac{\sin[(\beta a/2)\cos\theta]}{(\beta a/2)\cos\theta} \end{aligned} \tag{14.153}$$

حاصل ہو گا جہاں $S_{\text{اخراجی}}$ سطح کا رقبہ ہے۔

زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 90°$ پر

$$E(\theta)_{\text{بلند تر}} = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda} \qquad \text{دو رُخی اخراج} \tag{14.154}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگر $\theta = 270°$ جانب اخراج صفر ہو تب $\theta = 90°$ جانب اخراج دگنا

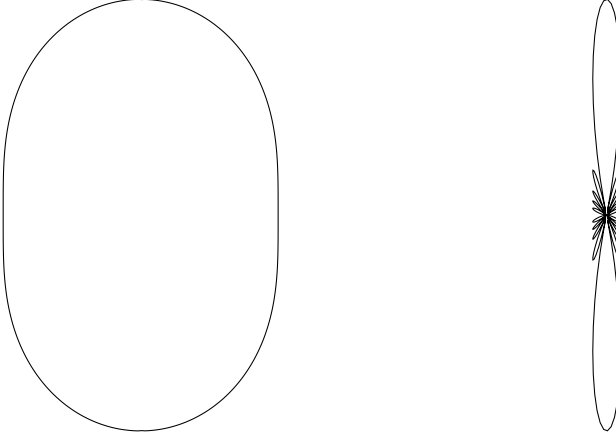
$$E(\theta)_{\text{بلند تر}} = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{r_0\lambda} \qquad \text{یک رُخی اخراج} \tag{14.155}$$

ہو گا۔اس میدان کو $a = 5\lambda$ اور $a = \frac{\lambda}{2}$ کے لئے شکل 14.22 میں دکھایا گیا ہے۔

صفحہ 774 پر مساوات 14.122

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

---

[52] جیسے حصہ 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔

الف: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = 5\lambda$ کی صورت میں نقش

ب: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں نقش

شکل 14.22: مستطیل سطح کے نقش

یکساں غیر سمتی n رکنی قطار کا دور میدان دیتی ہے جہاں $(\psi = \beta d \cos\theta + \delta)$ ہے اور E_0 انفرادی رکن کا میدان ہے۔ چوڑائی جانب اخراجی قطار $\delta = 0$ کی صورت میں حاصل ہوتا ہے جس سے مندرجہ بالا مساوات

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin[(n\beta d/_2)\cos\theta]}{\sin[(\beta d/_2)\cos\theta]} \tag{14.156}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ قطار کی لمبائی a' لکھتے ہوئے، زیادہ قیمت کی n اور a' کی صورت میں $a' = (n-1)d \approx nd$ ہو گا۔ اگر ہم اپنی توجہ $\theta = 90°$ کے قریب رکھیں تب مساوات 14.156 کو

$$E(\theta) = nE_0 \frac{\sin[(\beta a'/_2)\cos\theta]}{(\beta a'/_2)\cos\theta} \tag{14.157}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات کا مساوات 14.153 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ a لمبائی کی سطحی اینٹینا اور n رکنی a' لمبی چوڑائی اخراجی قطار کے مرکزی شعاع ایک جیسے ہیں۔ مزید $nE_0 = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda}$ کی صورت میں دونوں کے میدان بالکل برابر مطلق قیمت رکھتے ہیں۔

14.11 درز کا دور میدان بذریعہ فوریئر بدل

ہم کسی بھی کثافت برقی رو کا پیدا کردہ دور میدان حاصل کرنا دیکھ چکے ہیں۔ بعض اوقات ہمیں کثافت برقی رو معلوم نہیں ہوتی البتہ کسی مخصوص سطح پر میدان معلوم ہوتا ہے۔ اس طرح کے مسئلے کی مثال مستطیل پیپا اینٹینا ہے۔ مستطیل موتیج کا منہ کھول کر مستطیل پیپا اینٹینا حاصل کیا جاتا ہے۔ اس اینٹینا کے منہ پر کسی قسم کی موصل چادر نہیں نسب کی جاتی لہٰذا اس کے کھلے منہ کے کناروں پر برقی رو پائی جاتی ہے جس کی شکل جاننا دشوار ہے۔ البتہ پیپے کی منہ پر برقی میدان جاننا نسبتاً آسان کام ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں دور میدان قریبی میدان کے فوریئر بدل[53] سے حاصل ہوتا ہے۔ آئیں پہلے فوریئر بدل کی یاد دوبارہ تازہ کریں۔

آپ فوریئر بدل جوڑی سے بخوبی واقف ہوں گے۔ کسی بھی تفاعل $w(x)$ جس کا آزاد متغیرہ x ہو کا فوریئر بدل $W(k_x)$

$$W(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{jk_x x} \, \mathrm{d}x \qquad \text{فوریئر بدل} \tag{14.158}$$

لکھا[54] جاتا ہے جہاں $W(k_x)$ کا آزاد متغیرہ k_x ہے۔ یوں کسی بھی تفاعل کا آزاد متغیرہ تبدیل کرنا ممکن ہے۔ اسی طرح $W(k_x)$ کا الٹ فوریئر بدل $w(x)$

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(k_x) e^{-jk_x x} \, \mathrm{d}k_x \qquad \text{فوریئر الٹ بدل} \tag{14.159}$$

ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات فوریئر بدل جوڑی کہلاتے ہیں۔ مساوات 14.158 کے دونوں اطراف کا k_x کے ساتھ تفرق

$$\frac{\mathrm{d}W(k_x)}{\mathrm{d}k_x} = jk_x \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{jk_x x} \, \mathrm{d}x = jk_x W(k_x) \tag{14.160}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دائیں ہاتھ تفرق لیتے ہوئے دھیان رہے کہ تکمل کے اندر k_x کا کردار بالکل ایک مستقل کا ہے لہٰذا تفرق کو تکمل کے اندر لے جایا جا سکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 14.159 کا تفرق x کے ساتھ لینے سے

$$\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{-jk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(k_x) e^{-jk_x x} \, \mathrm{d}k_x = -jk_x w(x) \tag{14.161}$$

---

[53] Fourier transform pair

[54] عموماً مساوات 14.158 میں تکمل کو $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ سے ضرب دے کر لکھا جاتا ہے۔ اسی طرح مساوات 14.159 میں بھی $\frac{1}{2\pi}$ کی جگہ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ سے تکمل کو ضرب دیا جاتا ہے۔ اس طرح جوڑی کے دونوں مساوات تقریباً یکساں شکل اختیار کر لیتے ہیں۔

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح

$$\frac{\mathrm{d}^2\, W(k_x)}{\mathrm{d}k_x^2} = (jk_x)^2 W(k_x) = -k_x^2 W(k_x) \tag{14.162}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\, w(x)}{\mathrm{d}x^2} = (-jk_x)^2 w(x) = -k_x^2 w(x) \tag{14.163}$$

بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

دو آزاد متغیرات پر مبنی تفاعل $u(x,y)$ کا فوریئر بدل

$$U(k_x,k_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{jk_x x + jk_y y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{14.164}$$

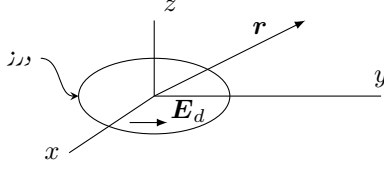
لکھا جاتا ہے۔اس کا واپسی فوریئر بدل

$$u(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(k_x,k_y) e^{-jk_x x - jk_y y}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y \tag{14.165}$$

ہو گا۔مساوات 14.164 کے تفرق لے کر

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial k_x} &= jxU \\
\frac{\partial U}{\partial k_y} &= jyU \\
\frac{\partial^2 U}{\partial k_x^2} &= -x^2 U \\
\frac{\partial^2 U}{\partial k_x \partial k_y} &= -xyU
\end{aligned} \tag{14.166}$$

اور مساوات 14.165 کے تفرق سے

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -jk_x u \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -jk_y u \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -k_x^2 u \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -k_x k_y u
\end{aligned} \tag{14.167}$$

شکل 14.23: سطح z=0 پر درز میں برقی میدان E_a کو دور میدان فوریئر بدل ہے۔

فوریئر بدل کی یاد تازہ کرنے کے بعد اصل موضوع پر واپس آتے ہیں۔ شکل 14.23 میں $z = 0$ سطح پر درز دکھایا گیا ہے جس پر برقی میدان E_d ہے۔ یہ میدان $z < 0$ خطے میں موجود کثافت برقی رو کی وجہ سے پایا جاتا ہے۔ ہمیں اس کثافت برقی رو کی ضرورت نہیں پڑے گی۔ درز کا رقبہ S_d ہے۔ آئیں درز پر موجود میدان سے خلاء میں کہیں دور پیدا میدان دریافت کریں۔

میکس ویل کی مساوات $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ کی گردش کو

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E} &= -j\omega\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{H}\\ &= -j\omega\mu_0(\boldsymbol{J} + j\omega\epsilon_0 \boldsymbol{E})\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ پر کیا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ کے علاوہ $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = j\omega \boldsymbol{E}$ اور $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = j\omega \boldsymbol{H}$ کا بھی استعمال کیا گیا ہے۔ شکل 14.23 میں درز سے دور خلاء میں نہ کوئی کثافت بار پائی جاتی ہے اور نہ ہی کثافت برقی رو۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں دور مقام پر $\boldsymbol{J} = 0$ اور

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{14.168}$$

پر کرتے ہوئے

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k_0^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{14.169}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \tag{14.170}$$

لکھا گیا ہے۔ مساوات 14.168 اور مساوات 14.169 کو کارتیسی محدد میں یوں لکھا جائے گا۔

$$\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z} = 0 \tag{14.171}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right) \boldsymbol{E}(x,y,z) = 0 \tag{14.172}$$

ان دو مساوات کا فوریئر بدل مساوات 14.167 کی مدد سے لکھتے ہیں

$$k_x E_x(k_x, k_y, k_z) + k_y E_y(k_x, k_y, k_z) + j\frac{\partial E_z(k_x, k_y, k_z)}{\partial z} = 0 \tag{14.173}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_0^2 - k_x^2 - k_y^2)\right] \boldsymbol{E}(k_x, k_y, k_z) = 0 \tag{14.174}$$

جہاں $u(x, y, z) = E(x, y, z)$ لیتے ہوئے $U(k_x, k_y, k_z) = E(k_x, k_y, k_z)$ لکھا گیا ہے۔یہاں بہتر ہوتا کہ برقی میدان اور اس کے فوریئر بدل کے لئے میں علیحدہ علیحدہ علامات استعمال کرتا لیکن امید کی جاتی ہے کہ $E(x, y, z)$ کے آزاد متغیرات (x, y, z) سے $E(x, y, z)$ کو اصل تفاعل اور $E(k_x, k_y, k_z)$ کے آزاد متغیرات (k_x, k_y, k_z) سے $E(k_x, k_y, k_z)$ کو فوریئر بدل سمجھا جا سکتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں

$$k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 = k_z^2 \tag{14.175}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(k_x, k_y, k_z)}{\partial z^2} + k_z^2 \boldsymbol{E}(k_x, k_y, k_z) = 0 \tag{14.176}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے حل $e^{\mp jk_z z}$ صورت رکھتے ہیں۔ان میں $e^{-jk_z z}$ کارتیسی نظام میں بڑھتے z جانب حرکت کرتی موج ہے جبکہ $e^{jk_z z}$ گھٹتے z جانب حرکت کرتی موج ہے۔ہم پہلے جواب کو تسلیم کرتے ہیں لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کا حل

$$\boldsymbol{E}(k_x, k_y, k_z) = \boldsymbol{f}(k_x, k_y) e^{-jk_z z} \tag{14.177}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ دریافت کرنا باقی ہے۔

مساوات 14.177 کو مساوات 14.173 میں پر کرنے سے

$$k_x f_x + k_y f_y + k_z f_z = 0 \tag{14.178}$$

یعنی

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{f} = 0 \tag{14.179}$$

ملتا ہے جہاں $\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{a}_{\text{X}} + k_y \boldsymbol{a}_{\text{Y}} + k_z \boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور $\boldsymbol{f} = f_x \boldsymbol{a}_{\text{X}} + f_y \boldsymbol{a}_{\text{Y}} + f_z \boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ لکھے گئے ہیں۔مساوات 14.179 کے تحت f_x ، f_y اور f_z تینوں آزاد متغیرات نہیں ہو سکتے۔ان میں کوئی دو آزاد ہونے کی صورت

میں تیسرے جزو کو ان دو اجزاء سے حاصل کیا جا سکتا ہے لہٰذا تیسرا جزو تابع متغیرہ ہو گا۔یہ حقیقت برقی میدان پر بھی لاگو ہوتی ہے جہاں اس حقیقت کو $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ لکھا جاتا ہے۔

اصل برقی میدان $\boldsymbol{E}(x,y,z)$ حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z)$ کا الٹ فوریئر بدل لیتے ہیں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z)e^{-jk_xx-jk_yy}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y\\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(k_x,k_y)e^{-jk_xx-jk_yy-jk_zz}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y\end{aligned}$$

جہاں مساوات 14.177 استعمال کیا گیا ہے۔کارتیسی محدد میں سمتی فاصلے کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$k_xx + k_yy + k_zz = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$$

لکھتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(k_x,k_y)e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y \qquad \text{میدان کا درز} \tag{14.180}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں تکمل کے اندر $\boldsymbol{f}e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ حرکت کرتی موج کو ظاہر کرتی ہے۔یوں $z > 0$ خطے میں میدان حرکت کرتی موج ہو گی۔ مساوات 14.175 سے واضح ہے کہ $|\boldsymbol{k}| = k_0$ کے برابر ہے۔یوں اگر $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2$ ہو تب k_z خیالی مقدار ہو گا۔ایسی صورت میں موج z سمت میں e^{-k_zz} کی رفتار سے گھٹے گی جو فنا پذیر موج کی نشانی ہے۔ یہ فنا پذیر موج درز کے سامنے قریبی میدان کو ظاہر کرتی ہے۔اگر k_x اور k_y کو کارتیسی محدد پر دکھایا جائے تو جو قیمت k_0 رداس کے دائرے سے باہر ہو، وہ فنا پذیر موج کو ظاہر کریں گے جبکہ اس دائرے کے اندر قیمتیں دور میدان کو ظاہر کرتی ہیں۔

مساوات 14.180 کے حاصل کردہ میدان کی قیمت سطح $z = 0$ پر عین شکل 14.23 کے میدان برابر ہو گی۔اس شکل میں میدان $z = 0$ سطح کے متوازی ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{f}$ کے x اور y اجزاء کو $\boldsymbol{f}_m$ سے ظاہر کیا جائے (یعنی $\boldsymbol{f}_m = f_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + f_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$) تب

$$\boldsymbol{E}_d(x,y) = \boldsymbol{E}_m(x,y,0) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}_m(k_x,k_y)e^{-jk_xx-jk_yy}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y \tag{14.181}$$

ہو گا۔مساوات 14.181 فوریئر بدل کی مساوات ہے لہٰذا اس کا الٹ فوریئر بدل یوں

$$\boldsymbol{f}_m(k_x,k_y) = \iint_{S_d}\boldsymbol{E}_d(x,y)e^{jk_xx+jk_yy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{14.182}$$

لکھنا ممکن ہے۔اس مساوات کے تحت درز پر میدان کا فوریئر بدل دور میدان کو ظاہر کرتی ہے۔مساوات 14.179 سے

$$f_z = \frac{-\boldsymbol{k}_m \cdot \boldsymbol{f}_m}{k_z} = \frac{-k_x f_x - k_y f_y}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}} \tag{14.183}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات مل کر $\boldsymbol{f}$ کے تینوں اجزاء دیتے ہیں۔

مساوات 14.182 اور مساوات 14.182 سے حاصل $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ کو مساوات 14.180 میں پر کرتے ہوئے درز کا میدان حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں اب مساوات 14.180 کا حل حاصل کریں۔

ہمیں دور میدان سے غرض ہے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 14.180 کو صرف دور میدان کے لئے حل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر جو ترکیب بروئے کار لائی جائے گی اس کی بنیاد اس حقیقت پر ہے کہ r کی قیمت زیادہ ہونے کی صورت میں $e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ نہایت تیزی سے ارتعاش کرتا تفاعل ہو گا۔یوں مساوات 14.180 میں $k_x k_y$ سطح کے مختلف نقطوں پر اس تفاعل کی قیمتیں ایک دوسرے کو ختم کریں گی۔اس تفاعل میں r کی قیمت زیادہ ہونے کی وجہ سے $k_x k_y$ سطح پر قریب ترین نقطوں کے درمیان بھی اتنا زاویائی فرق $j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ پایا جاتا ہے کہ تکمل میں ان کا مجموعہ قابل نظر انداز ہوتا ہے۔البتہ ایسے مقام جہاں زاویائی فرق نہ پایا جاتا ہو، دور میدان میں کردار ادا کرتے ہیں۔ان مقام جنہیں ساکن نقطے[55] کہا جاتا ہے کو مندرجہ ذیل مساوات سے حاصل کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial k_x} &= 0 \\ \frac{\partial(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial k_y} &= 0 \end{aligned} \tag{14.184}$$

ساکن نقطوں پر $e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ کی قیمت میں ٹھہراو پایا جاتا ہے لہٰذا تکمل میں ایسے مقام کا مجموعہ دور میدان میں کردار ادا کرتا ہے۔ساکن مقام $k_1 k_2$ سطح پر چھوٹا خطہ ہو گا۔اس چھوٹے خطے میں $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ کی قیمت میں تبدیلی کو رد کرتے ہوئے اسے اٹل تصور کیا جاتا ہے۔اس طرح $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ کو تکمل کے باہر منتقل کیا جاتا ہے۔بقایا تکمل میں صرف $e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ رہ جاتا ہے جسے حاصل کرنا ممکن ہے۔

اگر $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ میں کروی محدد کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے $x = r\sin\theta\cos\phi$، $y = r\sin\theta\sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ پر کئے جائیں تو

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = r(k_x \sin\theta\cos\phi + k_y \sin\theta\sin\phi + \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}\cos\theta) \tag{14.185}$$

---

[55] stationary points

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.184 استعمال کرتے ہوئے ساکن نقطہ

$$k_x = k_1 = k_0 \sin\theta \cos\phi \tag{14.186}$$
$$k_y = k_2 = k_0 \sin\theta \sin\phi \tag{14.187}$$

حاصل ہوتا ہے۔ساکن نقطے کے قریب ٹیلر تسلسل[56] کے استعمال سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} &= k_0 r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{\partial k_x^2}(k_x-k_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{\partial k_y^2}(k_y-k_2)^2 \\ &\qquad + \frac{\partial^2 \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{\partial k_x \partial k_y}(k_x-k_1)(k_y-k_2) \\ &= k_0 r - (Au^2 + Bv^2 + Cuv)\end{aligned}$$

جہاں $u = k_x - k_1$ ، $v = k_y - k_2$ ہیں جبکہ

$$\begin{aligned}A &= \frac{r}{2}\left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_1^2}{k_0^3\cos^2\theta}\right) \\ B &= \frac{r}{2}\left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_2^2}{k_0^3\cos^2\theta}\right) \\ C &= \frac{k_1 k_2 r}{k_0^3\cos^2\theta}\end{aligned} \tag{14.188}$$

ہیں۔چونکہ $\frac{\partial}{\partial k_x} = 0$ اور $\frac{\partial}{\partial k_y} = 0$ ہیں لہٰذا انہیں بالا ٹیلر تسلسل میں شامل نہیں کیا گیا۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.180 کو مندرجہ ذیل صورت میں لکھنا ممکن ہے

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi^2}\boldsymbol{f}(k_0\sin\theta\cos\phi, k_0\sin\theta\sin\phi)\iint\limits_{\Delta s} e^{j(Au^2+Bv^2+Cuv)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{14.189}$$

جہاں تکمل ساکن نقطے پر چھوٹی سطح Δs پر حاصل کیا جاتا ہے اور جہاں $\boldsymbol{f}$ کی قیمت اٹل تصور کرتے ہوئے ساکن نقطے پر $\boldsymbol{f}$ کی قیمت لی گئی ہے۔یہاں ایک مرتبہ دوبارہ اس حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں کہ چونکہ A ، B اور C کی قیمتیں r کے مماثل ہیں لہٰذا یہ قیمتیں بھی بہت بڑی ہوں گی۔ یوں u اور v کی تبدیلی سے مندرجہ بالا تکمل میں A ، B اور C پر منحصر تفاعل بھی تیزی سے ارتعاش کرے گی جس کی وجہ

[56] Taylor series

سے مختلف نقطوں پر تفاعل آپس میں جمع نہ ہو پائے گا۔اس حقیقت کی بنا پر اگر تکمل کو لامحدود سطح پر لیا جائے تو حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں پڑنا چاہیے۔ایسا ہی کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات میں

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^{j(Au^2+Bv^2+Cuv)} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{14.190}$$

کا حل حاصل کرتے ہیں۔ہم

$$Au^2 + Bv^2 + Cuv = \left(\sqrt{A}u + \frac{Cv}{2\sqrt{A}}\right)^2 - \frac{C^2v^2}{4A} + Bv^2$$

لکھ کر $\sqrt{A}u + \frac{Cv}{2\sqrt{A}} = w$ پر کرتے ہوئے

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^{jw^2} e^{\frac{j(4AB-C^2)v^2}{4A}} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{A}} \, \mathrm{d}v \tag{14.191}$$

لکھ سکتے ہیں۔ہم یہاں پہلے سے معلوم تکمل

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\gamma(x-x_0)^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}} \tag{14.192}$$

کا استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{jw^2} e^{\frac{j(4AB-C^2)v^2}{4A}} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{A}} \, \mathrm{d}v &= \frac{j2\pi}{\sqrt{4AB-C^2}} \\ &= j2\pi \frac{k_0}{r} \cos\theta\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔مساوات 14.188 میں دئے مستقل پر کرتے ہوئے یوں مساوات 14.180 کا حل

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{jk_0 \cos\theta}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \boldsymbol{f}(k_0 \sin\theta\cos\phi, k_0 \sin\theta\sin\phi) \tag{14.193}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\boldsymbol{f}_m(k_x, k_y) = \iint_{S_a} \boldsymbol{E}_d(x, y) e^{jk_x x + jk_y y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{14.194}$$

کے برابر ہے۔

مساوات 14.193 کہتی ہے دور میدان، درز پر میدان کا فوریئر بدل ہے جہاں فوریئر بدل میں k_x اور k_y کی جگہ

$$k_x = k_0 \sin\theta\cos\phi$$
$$k_y = k_0 \sin\theta\sin\phi$$

پر کیے جاتے ہیں۔

چونکہ $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f} = 0$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{k}$ کی سمت میں $\boldsymbol{f}$ کی قیمت صفر کے برابر ہے یعنی z محدد پر صرف f_x اور f_x پایا جائے گا۔ کروی محدد میں یوں

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = jk_0\frac{e^{-jk_0r}}{2\pi r}\left[\boldsymbol{a}_\theta(f_x\cos\phi + f_y\sin\phi) + \boldsymbol{a}_\phi\cos\theta(f_y\cos\phi - f_x\sin\phi)\right] \tag{14.195}$$

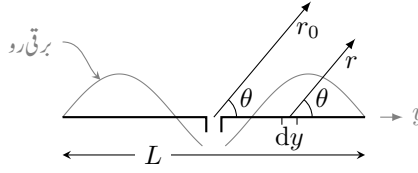
لکھا جا سکتا ہے۔ مقناطیسی میدان $\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}} = Z_0$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 14.10: مستطیل درز کی x سمت میں لمبائی $2a$ ہے جبکہ y سمت میں اس کی لمبائی $2b$ ہے۔ درز $z = 0$ پر پایا جاتا ہے جبکہ اس پر میدان $\boldsymbol{E}_d = E_0\boldsymbol{a}_\text{x}$ ہے۔ دور میدان حاصل کریں۔

حل: پہلے $\boldsymbol{f}_m$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_m &= E_0\boldsymbol{a}_\text{x}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} e^{jk_xx+jk_yy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= 4abE_0\boldsymbol{a}_\text{x}\frac{\sin k_xa}{k_xa}\frac{\sin k_yb}{k_yb}\\
&= 4abE_0\boldsymbol{a}_\text{x}\frac{\sin k_0a\sin\theta\cos\phi}{k_0a\sin\theta\cos\phi}\frac{\sin k_0b\sin\theta\sin\phi}{k_0b\sin\theta\sin\phi}\\
&= 4abE_0\boldsymbol{a}_\text{x}\frac{\sin u}{u}\frac{\sin v}{v}
\end{aligned}$$

اب دور میدان مساوات 14.195 سے لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{jk_04abE_0}{2\pi r}e^{-jk_0r}\frac{\sin u}{u}\frac{\sin v}{v}(\boldsymbol{a}_\theta\cos\phi - \boldsymbol{a}_\phi\sin\phi\cos\theta)$$

شکل 14.24: خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو پائی جاتی ہے۔

14.12 خطی اینٹینا

مختصر جفت قطب ہم دیکھ چکے ہیں جہاں جفت قطب کی لمبائی طول موج سے بہت کم $\lambda \gg l$ تھی۔ متعدد تعداد کے نقطہ منبع کو سیدھ میں قریب قریب رکھنے سے کسی بھی لمبائی کا اینٹینا حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آئیں ایسے لمبے اینٹینا پر غور کریں۔ اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کی جائے گی۔

شکل 14.24 میں L لمبائی کا اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بالکل درمیان سے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ اینٹینا کے دونوں بالکل یکساں نصف اطراف میں برقی رو بھی ہم شکل ہے۔ ہم L کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $\mathrm{d}y$ کو انفرادی جفت قطب تصور کرتے ہوئے ان سب کے میدان کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے اس اینٹینا کا دور میدان حاصل کریں گے۔

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ ایسی اینٹینا میں برقی رو

$$I = \begin{cases} I_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}+y\right)\right] & y<0 \\ I_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}-y\right)\right] & y>0 \end{cases} \tag{14.196}$$

صورت رکھتی ہے۔ مختصر جفت قطب کی لمبائی کو $\mathrm{d}y$ اور اس کے دور میدان کو $\mathrm{d}E_\theta$ لکھتے ہوئے مساوات 14.38

$$\mathrm{d}E_\theta = j\frac{30I\beta\,\mathrm{d}y}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.197}$$

یعنی

$$\mathrm{d}E_\theta = \frac{j60\pi e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{r_0\lambda}\sin\theta I e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{14.198}$$

دیتی ہے۔یوں L لمبے اینٹینا کا میدان

$$E_{\theta}=k\sin\theta\int_{-L/2}^{L/2} Ie^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{14.199}$$

ہو گا جہاں

$$k=\frac{j60\pi e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{r_0\lambda} \tag{14.200}$$

لکھا گیا ہے۔مساوات 14.196 استعمال کرتے اور تکمل لیتے ہوئے

$$E_{\theta}=\frac{j60[I_0]}{r_0}\left\{\frac{\cos[(\beta L\cos\theta)/2]-\cos(\beta L/2)}{\sin\theta}\right\} \quad \text{خطی اینٹینا کی عمومی مساوات} \tag{14.201}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $[I_0]=I_0e^{j(\omega t-\beta r_0)}$ تاخیری برقی رو ہے۔ $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں اسے

$$E_{\theta}=\frac{j60[I_0]}{r_0}\frac{\cos[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \quad \frac{\lambda}{2}\ \text{جفت قطب} \tag{14.202}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

میدان کی شکل مساوات 14.201 کے دائیں جانب قوسین میں بند جزو پر منحصر ہے جسے $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں

$$E_{\theta}=\frac{\cos[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \qquad \frac{\lambda}{2}\ \text{جفت قطب} \tag{14.203}$$

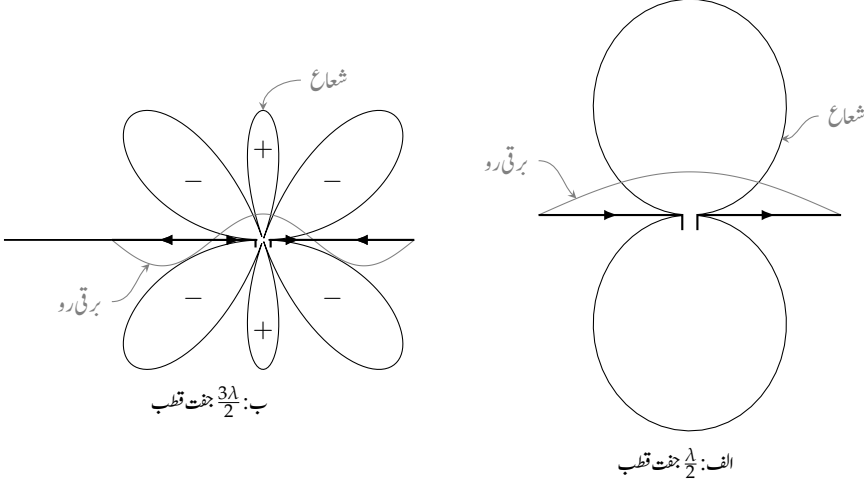
اور 1.5λ جفت قطب کی صورت میں

$$E_{\theta}=\frac{\cos[\frac{3\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \qquad \frac{3\lambda}{2}\ \text{جفت قطب} \tag{14.204}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 14.25 میں $\frac{\lambda}{2}$ اور $\frac{3\lambda}{2}$ جفت قطب اور ان کے شعاع نکی محدد پر دکھائے گئے ہیں۔جفت قطب پر برقی رو کی سمتیں تیر کے نشان سے دکھائے گئے ہیں۔

ب: $\frac{3\lambda}{2}$ جفت قطب

الف: $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب

شکل 14.25: 0.5λ اور 1.5λ جفت قطب کے دور میدان۔

شکل-ب میں میدان کے شعاعوں میں $180°$ کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

جفت قطب کو محور لیتے ہوئے دئے گئے نقش کو اس کے گرد گمانے سے تین رُخی نقش حاصل ہو گا۔

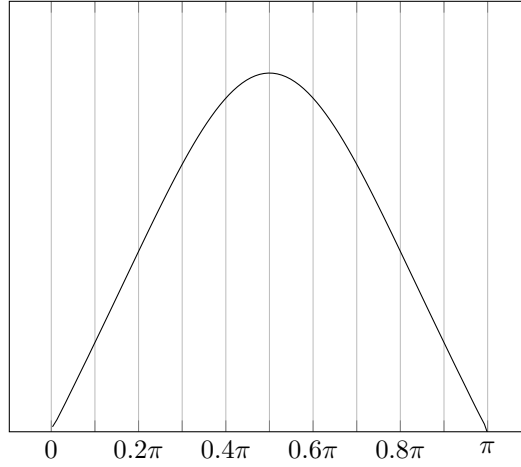
اوسط پوئنٹنگ سمتیہ کا بڑا رداس کے کرہ پر سطحی تکمل

$$P=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|E_\theta\right|^2}{2Z}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{14.205}$$

عددی طریقے سے حاصل کرتے ہوئے کل اخراجی مزاحمت R حاصل کی جاتی ہے۔اس مساوات میں $|E_\theta|$ کو مساوات 14.202 سے پر کرتے ہوئے

$$P=\frac{15I_0^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $Z_0=120\pi$ اور $r=r_0$ لکھے گئے ہیں۔بیرونی تکمل پہلے لیتے ہوئے

$$P=30I_0^2\int_0^{\pi}\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{14.206}$$

شکل 14.26: اخراجی مزاحمت کا اعدادی حل۔

ملتا ہے۔اس مساوات کو اعدادی طریقے سے حل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر اسے مجموعے

$$P = \sum_{i=0}^{n} 30 I_0^2 \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \Delta\theta = \sum_{i=0}^{n} p(\theta)\Delta\theta \tag{14.207}$$

کی شکل میں لکھتے ہیں جہاں

$$p(\theta) = 30 I_0^2 \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \tag{14.208}$$

لکھا گیا ہے۔ شکل 14.26 میں کارتیسی محدد پر تفاعل $p(\theta)$ کو دکھایا گیا ہے۔افقی محدد پر $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ ہے جبکہ عمودی محدد پر $p(\theta)$ ہے۔اگر $\theta = 0$ تا π کو n برابر ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر ٹکڑے کی چوڑائی $\frac{\pi}{n}$ ہو گی۔ گراف کے ایسے ہر ٹکڑے کو مستطیل تصور کیا جا سکتا ہے۔ان تمام مستطیل کے رقبے جمع کرتے ہوئے تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔اسے کہتے ہیں اعدادی طریقہ۔

شکل میں $n = 10$ لیا گیا ہے۔یوں ہمیں دس مستطیل کے رقبے حاصل کرنے ہیں۔ہر مستطیل کے دونوں اطراف کے قد کی اوسط قیمت کو مستطیل کا قد تصور کیا جائے گا۔بائیں بازو سے شروع کرتے ہوئے پہلے مستطیل کے بائیں طرف کا قد 0 ہے جبکہ اس کے دائیں طرف کا قد $\theta = 0.1\pi$ پر مساوات 14.208 سے

$$p_1(\theta) = 30 I_0^2 \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos(0.1\pi)]}{\sin(0.1\pi)} = 0.573 I_0^2 \tag{14.209}$$

جدول 14.2: برابر زاویائی فاصلوں پر تفاعل کے قیمت۔

$30I_0^2\,\frac{\cos^2[\pi/2\cos\theta]}{\sin\theta}$	θ
0	0.0π
$00.573I_0^2$	0.1π
$04.457I_0^2$	0.2π
$13.492I_0^2$	0.3π
$24.677I_0^2$	0.4π
$30I_0^2$	0.5π
$24.677I_0^2$	0.6π
$13.492I_0^2$	0.7π
$04.457I_0^2$	0.8π
$00.573I_0^2$	0.9π
0	1.0π

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح بقایا تمام نقطوں پر بھی قد حاصل کرتے ہوئے جدول 14.2 میں دیے گیے ہیں۔

شکل 14.26 میں بائیں سے دوسرے مستطیل ($\theta = 0.1\pi$ تا $\theta = 0.2\pi$) کا رقبہ

$$
\begin{aligned}
\text{رقبہ} &= \text{چوڑائی} \times \text{اوسط قد}\\
&= 0.1\pi \times \left(\frac{0.573I_0^2 + 4.457I_0^2}{2}\right)\\
&= 0.79I_0^2
\end{aligned}
$$

ہے۔

جدول 14.2 کی مدد سے کل رقبہ

$$
\begin{aligned}
P = 0.1\pi I_0^2 \bigg(&\frac{0}{2} + 0.573 + 4.457 + 13.492 + 24.677 + 30\\
&+24.677 + +13.492 + 4.457 + 0.573 + \frac{0}{2}\bigg)
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
P = 36.5675I_0^2 \tag{14.210}
$$

حاصل ہوتا ہے۔سائن نما برقی رو کی چوٹی I_0 ہونے کی صورت میں مزاحمت R میں طاقت کا ضیاع $\frac{1}{2}I_0^2R$ ہوتا ہے لہٰذا ان دونوں کو برابر لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{2}I_0^2R_{\text{اخراجی}} = 36.5675I_0^2$$

$\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$\frac{\lambda}{2} \text{ جفت قطب} \qquad R_{\text{اخراجی}} = 73.13\,\Omega \tag{14.211}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ وہ مزاحمت ہے جو اینٹینا کو طاقت مہیا کرنے یا اس سے طاقت وصول کرنے والے ترسیلی تار کو نظر آتی ہے۔$\frac{\lambda}{2}$ اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کا موازنہ مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت $(0.63\,\Omega)$ کے ساتھ کریں جسے صفحہ 754 پر مثال 14.1 میں حاصل کیا گیا ہے۔

اینٹینا کی رکاوٹ میں $j42.5$ اوہم کا خیالی جزو $(Z = 73.1 + j42.5)$ بھی پایا جاتا ہے۔اینٹینا کی لمبائی چند فی صد کم کرنے سے خیالی جزو صفر کیا جا سکتا ہے، البتہ اس سے حقیقی جزو قدر کم ہو کر $70\,\Omega$ رہ جاتا ہے۔زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے ضروری ہے کہ ایسے اینٹینا کو $70\,\Omega$ قدرتی رکاوٹ کے ترسیلی تار کے ساتھ جوڑا جائے۔$\frac{3\lambda}{2}$ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت $100\,\Omega$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.11: $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے خطی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل:مساوات 14.78 میں مساوات 14.203 پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} D &= \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{2\pi\int_0^{\pi}\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin^2\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta} \end{aligned} \tag{14.212}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مساوات 14.206 سے موازنہ کرتے ہوئے، مساوات 14.210 میں حاصل قیمت $36.5675I_0^2$ استعمال کرتے ہوئے

$$D = \frac{4\pi}{2\pi\left(\frac{36.5675I_0^2}{30I_0^2}\right)} = 1.64 \tag{14.213}$$

حاصل ہوتا ہے۔

14.13 چلتی موج اینٹینا

گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کیا گیا۔ایسی دبلی موصل تار، جس کا قطر d طول موج λ سے بہت کم ہو $d < \frac{\lambda}{100}$ اور جس کا آخری سرا کھلے سرے ہو، کے برقی رو کی شکل تقریباً ایسی ہی ہوتی ہے۔

کئی طول موج لمبی خطی اینٹینا موصل زمین کے متوازی h اونچائی پر پائی جاتی ہے۔ جیسے شکل 14.27-الف میں دکھایا گیا ہے، اس کو بائیں جانب سے ٹرانسمٹر[57] طاقت مہیا کرتی ہے۔ خطی اینٹینا اور موصل زمین مل کر کھلے سرے ترسیلی تار کا کردار ادا کرتے ہیں۔یوں کھلے سر پر آمدی برقی رو اور یہاں سے انعکاسی برقی رو مل کر ساکن موج کو جنم دیتے ہیں جسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے۔تار کے کھلے سر پر برقی رو کی ساکن موج کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یہی برقی رو گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر فرض کی گئی تھی۔

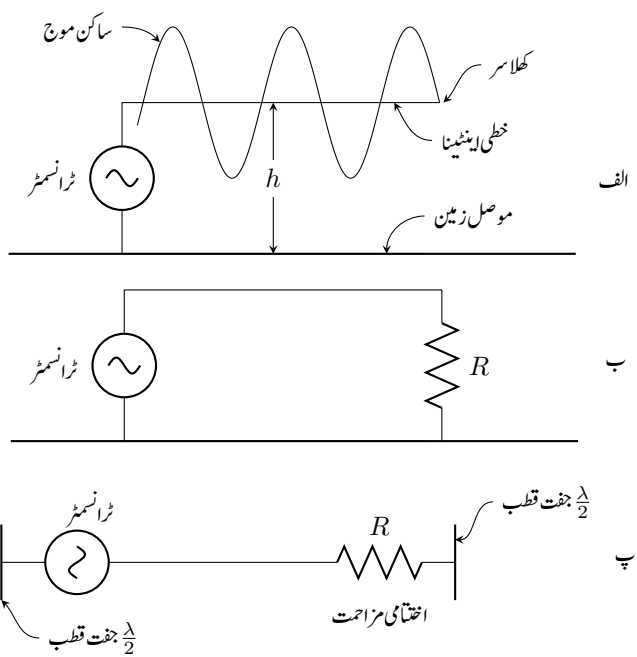
آئیں اب ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت R، تار کے کھلے سرے اور زمین کے درمیان جوڑیں۔ایسا کرنے کے بعد اینٹینا پر انعکاسی موج پیدا نہیں ہو گی۔تار میں قابل نظرانداز ضیاع کی صورت میں پوری لمبائی پر برقی رو کی قیمت یکساں ہو گی جبکہ لمبائی جانب بڑھتا زاویائی فرق پایا جائے گا۔اس طرح قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت سے اختتام کردہ اینٹینا کو شکل 14.27-ب میں دکھایا گیا ہے۔زمین سے دور خطی اینٹینا پر ایسی ہی مسلسل موج پیدا کرنے کی ترکیب شکل 14.27-پ میں دکھائی گئی ہے جہاں $\frac{\lambda}{2}$ اینٹینا کے وسطی نقطے کو زمین تصور کیا گیا ہے۔

مسلسل موج کے اس خطی اینٹینا کو چھوٹے چھوٹے، سلسلہ وار جڑے، لمبائی جانب اخراجی جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ایسا شکل میں دکھایا گیا ہے۔مساوات 14.128 غیر سمتی ارکان کے قطار کا تقابل پذیر نقش

$$E_n = \frac{1}{n}\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

---

[57] transmitter

ساکن موج
کھلا سر
خطی اینٹینا
ٹرانسمٹر
h
الف
موصل زمین
ٹرانسمٹر
R
ب
ٹرانسمٹر
$\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب
R
پ
اختتامی مزاحمت
$\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب

شکل 14.27: مسلسل موج اینٹینا۔

الف: خطی اختتام کردہ مسلسل موج اینٹینا۔

(ا)ب: دو مسلسل موج اینٹینا کو $44°$ پر رکھ کر بہتر سمتیت حاصل کی جاتی ہے۔

شکل 14.28

دیتی ہے جہاں لمبائی جانب اخراج کی صورت میں $\psi = \beta d(\cos\theta - 1)$ کے برابر ہے۔اگر انفرادی رکن کا نقش E_0 ہو تب ضرب نقش کی ترکیب سے قطار کا نقش

$$E(\theta) = \frac{E_0}{n}\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔انتہائی چھوٹے جفت قطب کا نقش $E_0 = \sin\theta$ ہے لہٰذا لمبے اینٹینا $L = d(n-1) \approx nd$ کے لئے

$$E(\theta) = \frac{\sin\theta}{n}\frac{\sin[\frac{\beta L}{2}(\cos\theta - 1)]}{\sin[\frac{\beta L}{2n}(\cos\theta - 1)]} \tag{14.214}$$

لکھا جائے گا۔یہ اینٹینا لمبائی جانب اخراج کرتا ہے لہٰذا θ کی قیمت زیادہ نہیں ہو گی۔ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات کو

$$E(\theta) = \sin\theta\frac{\sin[\beta L/2(\cos\theta - 1)]}{\beta L/2(\cos\theta - 1)} \tag{14.215}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 14.28-الف میں $n = 20$ اور $d = \frac{\lambda}{4}$ کی صورت میں حاصل 4.75λ لمبائی کے اینٹینا کی شعاع دکھائی گئی ہے۔مرکزی شعاع $\theta = 22°$ پر پائی جاتی ہے۔جیسا شکل-ب میں دکھایا گیا ہے، دو عدد ایسے اینٹینا کو آپس میں $44°$ کے میکانی زاویے پر رکھنے سے یک رخی اینٹینا حاصل ہو گا جسے دو تار کے ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔دونوں کے قریبی شعاع مل کر بہتر سمتیت دیتی ہے۔

زمین کے متوازی اینٹینا کا عمودی شعاع حاصل کرنے کی خاطر زمین میں اینٹینا کے عکس کو بھی مد نظر رکھا جائے گا۔

14.14 چھوٹا گھیرا اینٹینا

شکل 14.29-الف میں d قطر کا گھیرا اینٹینا[58] دکھایا گیا ہے جس میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ دائرے کا قطر طول موج سے بہت کم $\lambda \ll d$ ہے لہٰذا پورے گول دائرے پر یک قیمت اور ہم قدم برقی رو تصور کی جا سکتی ہے۔اس چھوٹے گول دائرے کو شکل-ب کا چکور تصور کرتے ہوئے، دور میدان حاصل کرتے ہیں۔چکور اور گول دائرے کے رقبے برابر

$$S = s^2 = \frac{\pi d^2}{4} \tag{14.216}$$

لئے جاتے ہیں۔ چکور کے چار اطراف کو چار جفت قطب تصور کرتے ہوئے دور میدان حاصل کیا جائے گا۔چکور کو کارتیسی محدد کے مبدا پر $z = 0$ سطح پر رکھتے ہوئے $x = 0$ سطح پر دور میدان حاصل کیا جائے گا۔ سطح $x = 0$ پر چکور کے اطراف الف اور پ برابر مگر الٹ سمت میں میدان پیدا کرتے ہیں لہٰذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہے۔اطراف ب اور ت بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں جن کا نقش $x = 0$ سطح پر غیر سمتی ہے لہٰذا انہیں دو غیر سمتی جفت قطب تصور کیا جا سکتا ہے۔ایسا ہی شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے دور میدان

$$E(\theta) = E_2 e^{-j\frac{\psi}{2}} - E_4 e^{j\frac{\psi}{2}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $E_2 = E_4$ اور $\psi = \beta s \sin\theta$ ہیں۔یوں

$$E(\theta) = -j2E_2 \sin\left(\frac{\beta s}{2}\sin\theta\right)$$

لکھا جا سکتا ہے جسے $\lambda \gg s$ کی صورت میں

$$E(\theta) = -jE_2 \beta s \sin\theta \tag{14.217}$$

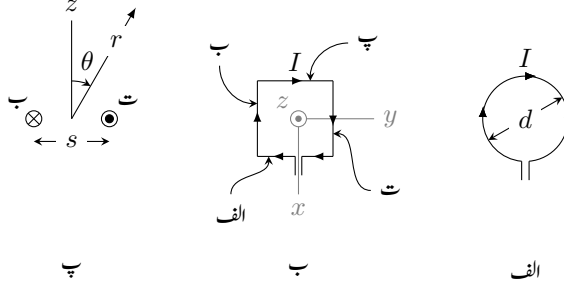
لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 750 پر دیے گئے جدول 14.1 سے مختصر جفت قطب کے دور میدان E_θ کے حیطے کو E_2 کی جگہ پر کرتے ہوئے

$$E(\theta) = \frac{60\pi Il}{r\lambda}\beta s \sin\theta \tag{14.218}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 14.29-پ میں جفت قطب کی لمبائی $l = s$ ہے جبکہ چکور کا رقبہ $S = s^2$ ہے لہٰذا

$$E(\theta) = \frac{120\pi^2 I}{r}\frac{S}{\lambda^2}\sin\theta \tag{14.219}$$

---

[58] loop antenna

شکل 14.29: دائرہ اور چکور اینٹینا

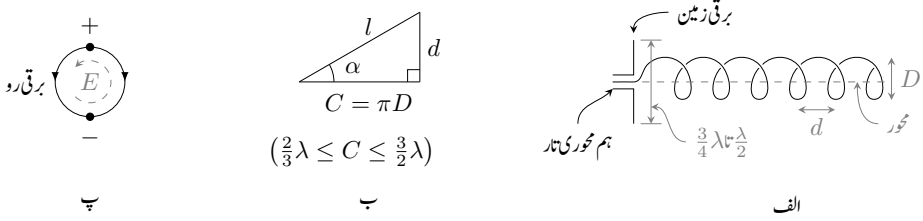
لکھا جا سکتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات S رقبے کے چھوٹے دائرے یا چکور کا دور میدان دیتی ہے۔چکور کا قطر جتنا کم ہو یہ مساوات اتنی ہی زیادہ درست میدان دیتا ہے۔حقیقت میں S رقبے کے کسی بھی شکل کے چھوٹے بند دائرے کا دور میدان یہی مساوات دیتی ہے۔

14.15 پیچ دار اینٹینا

طول موج برابر محیط کا پیچ دار لچھا لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کا کام کرتا ہے۔ایسے اینٹینا کی شعاع، دائری قطبیت رکھتی ہے۔لچھے کی لمبائی اور اینٹینا کی سمتیت راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔پیچ دار اینٹینا[59] کا قطر D،اس کا محیط C، چکر کے مابین فاصلہ d، چکر کی لمبائی l اور پیچ دار زاویہ α، اس کے اہم ناپ ہیں۔ان تمام کو شکل 14.30 میں دکھایا گیا ہے۔ایسا لچھے جس کا محیط $C = \pi D$ تقریباً ایک طول موج (1λ) لمبا ہو پر ایک مکمل موج پائی جائے گی۔یوں نصف چکر پر برقی موج کا مثبت حصہ اور بقایا پر موج کا منفی حصہ پایا جائے گا۔ لچھے کے ایک چکر کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں اس پر برقی رو اور برقی بار دکھائے گئے ہیں جو میدان $\boldsymbol{E}$ پیدا کرتے ہیں۔جیسے جیسے برقی رو کی موج اینٹینا پر آگے حرکت کرتی ہے ویسے ویسے میدان $\boldsymbol{E}$ گھومے گا جو اینٹینا کے محور پر دائری قطبیت[60] کو جنم دے گی۔پیچ دار لچھا بطور مسلسل موج اینٹینا کردار ادا کرتا ہے اور اس کی خاصیت یہ ہے کہ اسے کسی مزاحمت سے اختتام پذیر کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔اس پر برقی رو بالکل مسلسل موج اینٹینا کی مانند ہوتی ہے۔اینٹینا کے کھلے سر سے انعکاسی موج قابل نظرانداز ہونے کے ناطے، اس پر یکساں حیطے کی برقی رو کی موج خارجی جانب حرکت کرتی پائی جاتی ہے۔

[59] helical-beam antenna
[60] circular polarization

الف ب پ

شکل 14.30: پیچ دار اینٹینا۔

پیچ دار اینٹینا کو لمبائی جانب اخراجی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں ہر چکر کو انفرادی منبع فرض کیا جاتا ہے۔ضرب نقش کے اصول سے، انفرادی منبع کا نقش ضرب غیر سمتی ارکان کے قطار کا نقش،

$$E(\theta)=\cos\theta\frac{\sin(n\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \tag{14.220}$$

اینٹینے کا نقش دیتا ہے۔اس مساوات میں انفرادی چکر کے نقش کو $\cos\theta$ کے لگ بھگ تصور کیا گیا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں

$$\psi=\beta d\cos\theta-\frac{c\beta L}{v} \tag{14.221}$$

کے برابر ہے جہاں دو قریبی چکر کے مابین زاویائی فرق $\frac{c\beta L}{v}$ ہو گا جو ایک چکر گولائی L پر v رفتار سے حرکت کرتی موج کا زاویائی فرق ہے۔

مساوات 14.220 اور مساوات 14.215 کے موازنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ قدر مختلف ہیں۔مساوات 14.220 میں $\cos\theta$ پایا جاتا ہے جس کی قیمت $\theta=0$ پر زیادہ سے زیادہ ہے جو اینٹینا کا محور یعنی شعاعی اخراج کی سمت ہے۔اس کے برعکس مساوات 14.215 میں $\sin\theta$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے جو اینٹینا کے محور پر صفر کے برابر ہے لہٰذا اس اینٹینا کی شعاع دو شاخی ہے اور اس کی سمتیت قدر کم ہے۔

چونکہ میدان دائری قطبی اور محور کے گرد یکساں ہے لہٰذا یہی مساوات $E_\theta(\theta)$ کے علاوہ $E_\phi(\theta)$ کا نقش بھی دیتی ہے۔

کسی بھی لمبائی جانب اخراجی قطار میں تمام منبع کے میدان اینٹینا کے محور پر ہم قدم ہوتے ہیں جو

$$\psi=0,\mp2\pi,\mp4\pi,\cdots \tag{14.222}$$

کی صورت میں ممکن ہوتا ہے۔پیچ دار اینٹینا میں $\psi = -2\pi$ کے برابر ہے۔ارکان کے مابین $\psi = -2\pi$ زاویائی فرق کی بنیاد پر حاصل نقش اور اصل پیچ دار اینٹینا کے ناپے گئے نقش میں خاصہ فرق پایا جاتا ہے۔پیچ دار اینٹینا کی ناپی گئی سمتیت زیادہ ہے۔ہنسن اور ووڈیارڈ[61] یہ ثابت کر چکے ہیں کہ n رکنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی زیادہ سے زیادہ سمتیت اس صورت حاصل ہوتی ہے جب اس کے ارکان کے مابین $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔مساوات 14.220 میں ارکان کے مابین زاویائی فرق $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ پر کرنے سے حقیقی اینٹینا کے ناپے نقش جیسا نقش حاصل ہوتا ہے۔اس سے ثابت ہوتا ہے کہ حقیقی اینٹینا پر دو قریبی چکر کے مابین یہی زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔اس نتیجے کو تسلیم کرتے ہوئے مساوات 14.221 سے

$$\psi = \beta d\cos\theta - \frac{c\beta L}{v} = -2\pi - \frac{\pi}{n} \tag{14.223}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{d}{\lambda} + \frac{2n+1}{2n}} \tag{14.224}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں $C = \lambda$ ، $\alpha = 12^\circ$ اور $n = 20$ کی صورت میں $\frac{v}{c} = 0.82$ ہو گی۔حقیقی پیچ دار اینٹینا پر موج کی رفتار یہی ناپی جاتی ہے۔ایسا معلوم ہوتا ہے کہ پیچ دار اینٹینا خود بخود موج کی رفتار کو اس قیمت پر رکھتی ہے جس پر اینٹینا کی سمتیت زیادہ سے زیادہ حاصل ہو۔تین سے زیادہ چکر پر مبنی پیچ دار اینٹینا یہ عمل $(5^\circ < \alpha < 20^\circ)$ اور $(\frac{3}{4}\lambda < C < \frac{3}{2}\lambda)$ تک حاصل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔چکر کی تعداد بڑھا کر سمتیت بڑھائی جا سکتی ہے۔

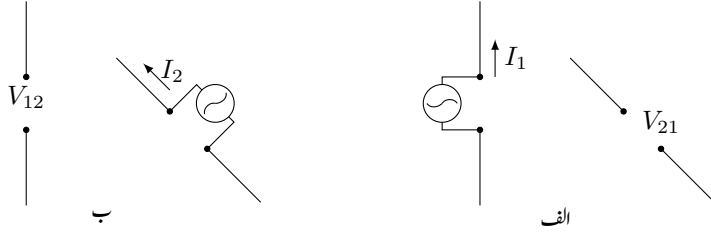
پیچ دار اینٹینا کی سمتیت تقریباً

$$D = 15\left(\frac{C}{\lambda}\right)^2 \frac{nd}{\lambda} \tag{14.225}$$

کے برابر ہے۔یوں $C = \lambda$ اور $\alpha = 12^\circ$ کی صورت میں $D = 64$ ہو گی۔

پیچ دار زاویہ $\alpha = 12^\circ$ اور $d = 0.213\lambda$ کی صورت میں طول موج میں تقریباً پانچ چکر پائیں جائیں گے لہٰذا 20 چکر کا اینٹینا $20 \times 0.213\lambda = 4.3\lambda$ لمبائی کا ہو گا۔اتنی لمبائی کے عام لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کی سمتیت چار گنا سے بھی قدر کم ہوتی ہے۔

---

[61] Hansen and Woodyard

شکل 14.31: دو اینٹینا کے مابین باہمیت۔

پیچ دار اینٹینا کی سمتیت زیادہ ہونے کا مطلب ہے کہ اس کی اخراجی سطح حقیقی سطح سے بہت زیادہ ہوتی ہے۔مصنوعی سیاروں پر مبنی ذرائع ابلاغ میں پیچ دار اینٹینا کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

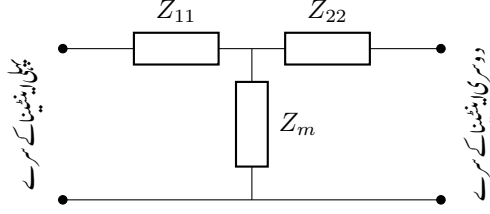
14.16 دوطرفہ کردار

اینٹینا شعاع خارج کرتی ہے اور یا اسے وصول کرتی ہے۔اینٹینا کے تمام خاصیت دو طرفہ ہیں۔یوں اس کی سمتیت، اخراجی رقبہ، نقش اور اخراجی مزاحمت دونوں (اخراجی اور وصولی) صورتوں میں برابر پائے جاتے ہیں۔البتہ اینٹینا پر برقی رو اخراجی اور وصولی صورت میں مختلف صورت رکھتی ہے۔

اینٹینا کی **دوطرفہ خاصیت**[62] پر شکل 14.31 کی مدد سے غور کرتے ہیں۔دونوں اینٹینا کے درمیان غیر متحرک، خطی اور غیر سمتی خطہ پایا جاتا ہے۔شکل-الف میں پہلے اینٹینا کو صفر رکاوٹ اور f تعدد کے منبع سے طاقت مہیا کی جاتی ہے جس سے پہلے اینٹینا کے داخلی سروں پر I_1 برقی رو اور دوسرے اینٹینا کے کھلے برقی سروں پر برقی دباو V_{21} پیدا ہوتا ہے۔اگر منبع طاقت کو دوسرے اینٹینا کے ساتھ جوڑا جائے تب دوسرے اینٹینا میں I_2 برقی رو اور پہلے اینٹینا کے کھلے برقی سروں پر V_{12} برقی دباو پیدا ہو گا۔شکل-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔چونکہ کسی بھی چار سروں والے برقی دور کا مساوی T دور بنانا ممکن ہے لہٰذا ان اینٹینا کے چار برقی سروں کے مابین بھی ایسا کرنا ممکن ہو گا۔شکل 14.32 میں یہ مساوی دور دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$V_{21} = I_1 Z_m$$
$$V_{12} = I_2 Z_m$$

---

[62] reciprocity

شکل 14.32: مساوی T دور۔

یا

$$\frac{V_{21}}{I_1} = \frac{V_{12}}{I_2} = Z_m \tag{14.226}$$

لکھا جا سکتا ہے۔دونوں اینٹینا کو برابر برقی رو $(I_1 = I_2)$ مہیا کرنے کی صورت میں

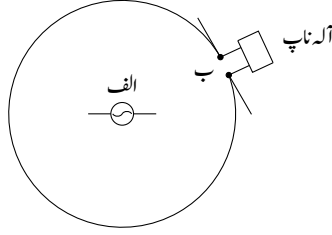
$$V_{21} = V_{12} \tag{14.227}$$

ہو گا۔

اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت کے تحت اگر کسی ایک اینٹینا کو برقی رو I مہیا کی جائے جس سے کسی دوسرے اینٹینا میں برقی دباو V پیدا ہو تب دوسرے اینٹینا کو برقی رو I فراہم کرنے سے پہلے اینٹینا میں برقی دباو V پیدا ہو گا۔

دونوں اینٹینا کے مابین مشترکہ رکاوٹ Z_m دونوں اطراف سے برابر ہے۔

نقش

شکل 14.33 میں اینٹینا-الف شعاع خارج کر رہی ہے جبکہ اینٹینا-ب اس شعاع کو وصول کر رہی ہے۔اینٹینا-الف ساکن ہے جبکہ اینٹینا-ب اس کے گرد گول دائرے پر گھوم رہی ہے۔اینٹینا-ب پر پیدا برقی دباو، اینٹینا-الف کی نقش دے گی۔اب اگر دائرے پر گھومتا اینٹینا شعاع خارج کرے اور ساکن اینٹینا اس شعاع کو وصول کرے تو اینٹینا کے دو طرفہ خاصیت کے تحت وہی نقش دوبارہ حاصل ہو گا۔یوں کسی بھی اینٹینا کا اخراجی نقش اور وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت اس کے نقش کے لئے بھی درست ثابت ہوتی ہے۔

شکل 14.33: نقش کی ناپ۔

سمتیت اور اخراجی رقبہ

مساوات 14.78

$$D = \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta, \phi) \,\mathrm{d}\Omega} \tag{14.228}$$

کے تحت سمتیت صرف اور صرف نقش پر منحصر ہے اور ہم دیکھ چکے ہیں کہ اینٹینا کا اخراجی نقش اور اس کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں لہٰذا اس کی اخراجی سمتیت اور وصولی سمتیت بھی بالکل یکساں ہوں گے۔

اگر اخراجی سمتیت اور وصولی سمتیت برابر ہوں تب مساوات 14.102

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}} \tag{14.229}$$

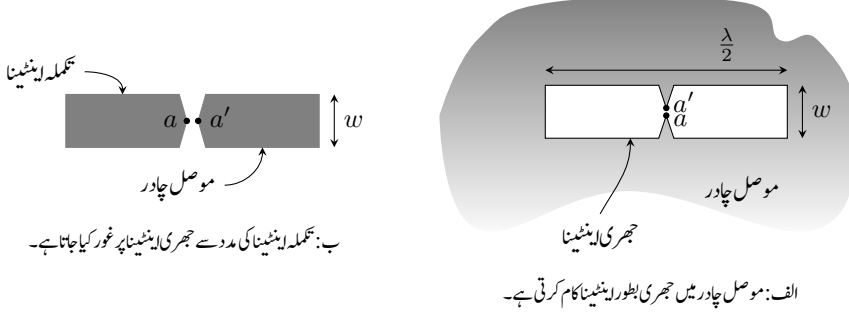
کے تحت اخراجی رقبہ اور وصولی رقبہ بھی برابر ہوں گے۔اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت سمتیت اور رقبے کے لئے بھی درست ثابت ہوتی ہے۔

اخراجی مزاحمت اور وصولی مزاحمت

اخراجی اینٹینا کو صرف داخلی برقی سروں سے برقی رو مہیا کی جا سکتی ہے جبکہ وصولی اینٹینا کے تمام جسامت پر برقی دباو پیدا ہوتا ہے جس سے اینٹینا کی برقی رو عموماً اخراجی صورت سے مختلف ہو گی۔

اگر اینٹینا کو مختلف برقی رکاوٹوں کا مجموعہ تصور کیا جائے تب اگرچہ اس کے مختلف حصوں پر برقی رو مختلف ممکن ہے لیکن کسی بھی دو سروں کے مابین رکاوٹ تبدیل نہیں ہوتی۔یوں اینٹینا کے برقی سروں کے مابین برقی رکاوٹ

ب: تکملہ اینٹینا کی مدد سے جھری اینٹینا پر غور کیا جاتا ہے۔

الف: موصل چادر میں جھری بطور اینٹینا کام کرتی ہے۔

شکل 14.34: جھری اینٹینا اور اس کا تکملہ اینٹینا۔

کا دارومدار اینٹینا میں برقی رو کی صورت پر نہیں ہوتا۔اس کا اخراجی رکاوٹ اور وصولی رکاوٹ بالکل برابر ہوتے ہیں۔اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت یہاں بھی قابل استعمال ہے۔

14.17 جھری اینٹینا

وسیع موصل چادر میں $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کی جھری شکل 14.34-الف میں دکھائی گئی ہے۔ اگر aa' کو ترسیلی تار سے جوڑا جائے تو جھری کے گرد موصل چادر میں برقی رو کی وجہ سے شعاعی اخراج پیدا ہو گا۔ جھری کو از خود موصل چادر فرض کرتے اینٹینا تصور کیا جا سکتا ہے جس کی مدد سے **جھری اینٹینا**[63] کا میدان حاصل کیا جاتا ہے۔شکل-ب میں اسی **تکملہ اینٹینا**[64] کو دکھایا گیا ہے۔ جھری اینٹینا کو aa' پر طاقت چوڑائی کے اطراف کے مابین فراہم کی جاتی ہے جبکہ تکملہ اینٹینا کو لمبائی جانب کے اطراف کے مابین طاقت aa' پر مہیا کی جاتی ہے۔یوں ان کے میدان آپس میں 90° پر ہوں[65] گے۔ جھری اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ Z_g اور تکملہ اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ Z_d کا آپس میں تعلق

$$Z_g = \frac{Z_0^2}{4Z_d} \tag{14.230}$$

ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اس طرح جفت قطب کی خصوصیات جانتے ہوئے جھری کی خصوصیات دریافت کی جا سکتی ہیں۔یوں اگر جھری کی چوڑائی $\lambda \ll c$ اور اس کی لمبائی $\frac{\lambda}{2}$ کر دی جائے تو تکملہ اینٹینا (صفحہ 803) کی اخراجی رکاوٹ $Z_d = 73 + j42.5$

---

[63] slot antenna
[64] complementary antenna
[65] Booker's theory

جانتے ہوئے جھری اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ

$$Z_g = \frac{377^2}{4 \times (73 + j42.5)} = 363 - j211\,\Omega \tag{14.231}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

14.18 پیپا اینٹینا

شکل 14.35 میں پیپا اینٹینا[66] دکھایا گیا ہے جسے بائیں جانب سے مستطیلی ترسیلی تار طاقت مہیا کر رہی ہے۔ پیپا اینٹینا کو مستطیل ترسیلی تار کا کھلا منہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ مستطیلی ترسیلی تار کا منہ بڑھانے سے اینٹینا کی اخراجی سطح بڑھانا مقصد ہے جس سے سمتیت بڑھتی ہے۔ اگرچہ پیپا کے منہ پر ہم قدم میدان ہی سے بہتر سمتیت حاصل ہو گی، حقیقت میں ایسا ہم قدم میدان حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ یوں حقیقی اینٹینا میں پیپا کے منہ پر میدان میں فرق کو کسی مخصوص مقدار δ سے کم رکھا جاتا ہے۔ شکل-ب کو دیکھ کر

$$\cos\theta = \frac{l}{l+\delta}$$
$$\sin\theta = \frac{h}{2(l+\delta)}$$
$$\tan\theta = \frac{h}{2l}$$

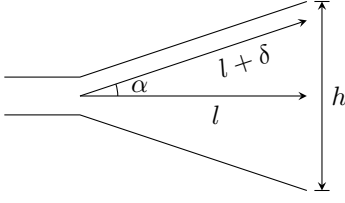
لکھے جا سکتے ہیں۔ کم δ کی صورت میں ان مساوات سے

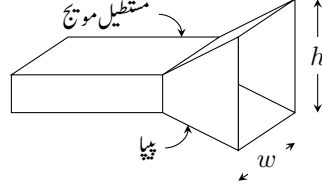
$$l = \frac{h^2}{8\delta} \tag{14.232}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{h}{2l} = \cos^{-1}\frac{l}{l+\delta} \tag{14.233}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ برقی میدان h سمت میں اور مقناطیسی میدان w سمت میں تصور کرتے ہوئے آگے پڑھیں۔ برقی میدان E کی سطح پر اس فرق کو $\delta < \frac{\lambda}{5}$ رکھا جاتا ہے جس سے پیپے کے منہ پر کل فرق $\mp 36^\circ$ تک محدود رہتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان H کی سطح پر فرق $\delta < \frac{3\lambda}{8}$ تک محدود رکھا جاتا ہے۔ مقناطیسی میدان کی سطح پیپے کے اطراف پر برقی میدان سطح کے متوازی ہونے کی وجہ سے صفر ہوتا ہے لہٰذا میدان میں زیادہ زاویائی فرق سے دور میدان زیادہ متاثر نہیں ہوتا۔

---

[66] horn antenna

الف: پیپا اینٹینا۔

ب: پیپا اینٹینا کے اہم ناپ۔

شکل 14.35: پیپا اینٹینا اور اس کے اہم ناپ۔

مثال 14.12: شکل میں $h = 10\lambda$ ہے جبکہ ترسیلی تار میں TE_{10} موج پائی جاتی ہے۔ شکل میں w ، اور نصف زاویے θ اور ϕ حاصل کریں۔

حل: برقی میدان کی سطح پر $\delta < \frac{\lambda}{5}$ لیتے ہوئے

$$l = \frac{h^2}{8\delta} = \frac{100\lambda^2}{8 \times \frac{\lambda}{5}} = 62.5\lambda$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E سطح پر

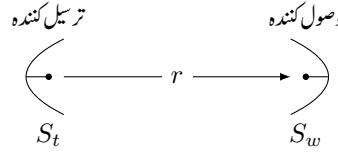
$$\theta = \tan^{-1} \frac{h}{2l} = \tan^{-1} \frac{10\lambda}{2 \times 62.5\lambda} = 4.6^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔ مقناطیسی میدان پر $\delta < \frac{3\lambda}{8}$ لیتے ہوئے

$$\phi = \cos^{-1} \frac{62.5\lambda}{62.5\lambda + \frac{3}{8}\lambda} = 6.26^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔ پیپے کی چوڑائی

$$w = 2l \tan\phi = 2 \times 62.5 \times \lambda \times \tan 6.26^\circ = 13.7\lambda$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل 14.36: وصول کردہ طاقت کا انحصار ترسیلی اور وصولی اینٹینا کے اخراجی رقبوں پر ہے۔

14.19 فرائس ریڈار مساوات

شکل 14.36 میں S_t اخراجی رقبے کا ترسیل کنندہ اور S_w اخراجی رقبے کا وصول کنندہ اینٹینا آپس میں r فاصلے پر دکھائے گئے ہیں۔اگر غیر سمتی ترسیل کنندہ P_t طاقت کی شعاع خارج کرے تب وصول کنندہ کے قریب اکائی رقبے پر

$$P = \frac{P_t}{4\pi r^2} \tag{14.234}$$

کثافت طاقت دستیاب ہو گی جس سے وصول کنندہ

$$P'_w = PS_w \tag{14.235}$$

طاقت حاصل کر پائے گا۔ترسیلی سطح S_t کے سمتی ترسیل کنندہ کی سمتیت $D = \frac{4\pi S_t}{\lambda^2}$ ہے لہٰذا اس کی شعاع سے وصول کنندہ

$$P_w = DP'_w = \frac{4\pi S_t}{\lambda^2}\frac{P_t S_w}{4\pi r^2} \tag{14.236}$$

طاقت حاصل کر پائے گا۔اس مساوات سے

$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_t S_w}{\lambda^2 r^2} \tag{14.237}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کسی بھی دو اینٹینا کے نظام میں مساوات کا دایاں ہاتھ بے بُعد مستقل ہے۔یہ مساوات **فرائس ترسیلی مساوات**[67] کہلاتی ہے۔ آئیں اب شکل 14.37-الف پر غور کریں جہاں ترسیل کنندہ اینٹینا شعاع خارج کرتی ہے۔انعکاسی شعاع کو وصول کنندہ اینٹینا وصول کرتا ہے۔ریڈار میں عموماً ایک ہی اینٹینا دونوں کام سرانجام دیتا ہے۔شعاع کا انعکاس ہوا میں اڑتے جہاز سے ممکن ہے۔شکل 14.37-ب میں عاکس کو دو اینٹینا کی صورت میں

[67] Friis transmission equation

دکھایا گیا ہے جہاں ایک اینٹینا شعاع وصول کرتے ہوئے دوسرے اینٹینا سے واپس خارج کرتا ہے۔یوں مساوات 14.237 کو دو مرتبہ استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_t S_w S_e^2}{\lambda^4 r^4} \tag{14.238}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر ایک ہی اینٹینا بطور ترسیلی اور وصولی اینٹینا استعمال کیا جائے تب

$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_w^2 S_e^2}{\lambda^4 r^4} \tag{14.239}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں عاکس کا اخراجی رقبہ S_e ہے۔

اگر عاکس وسیع جسامت کا ہو اور اس سے انعکاسی موج عین ریڈار کی سمت میں ہو تب عاکس کا اخراجی رقبہ اس کے میکانی رقبے جتنا ہو گا۔عموماً عاکس غیر سمتی اخراج کرتا ہے جس کی وجہ سے اس کا اخراجی رقبہ، اس کے میکانی رقبے سے کم ہوتا ہے۔ایسی صورت میں عاکس کے وصولی رقبے کو σ لکھتے ہوئے مساوات 14.237 سے عاکس کی حاصل کردہ طاقت

$$\frac{P}{P_t} = \frac{S_t \sigma}{\lambda^2 r^2} \tag{14.240}$$

لکھی جائے گی۔یہی طاقت غیر سمتی خارج کی جائے گی۔غیر سمتی اینٹینا کا اخراجی رقبہ $S = \frac{\lambda^2}{4\pi}$ ہوتا ہے۔یہی عاکس کی اخراجی رقبہ لیتے ہوئے مساوات 14.239 میں $S_e^2 = S\sigma$ لکھتے ہوئے

$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_w^2 S \sigma}{\lambda^4 r^4} \tag{14.241}$$

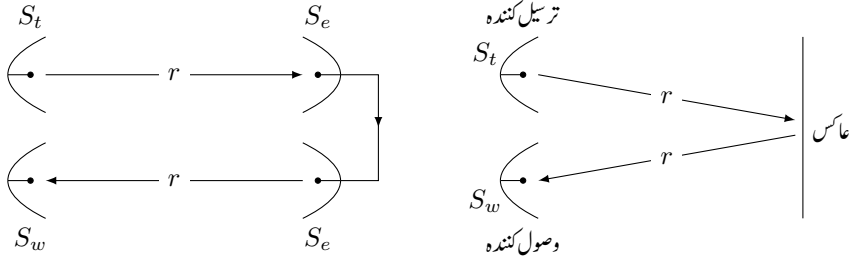
یعنی

$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_w^2 \sigma}{4\pi \lambda^2 r^4} \tag{14.242}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں σ **ریڈار رقبہ تراش**[68] کہلاتا ہے۔یہ **ریڈار مساوات**[69] کہلاتی ہے۔

بڑی جسامت کی موصل کرہ، جس کا رداس a ہو، کی ریڈار رقبہ تراش اس کے میکانی رقبہ تراش πa^2 کے برابر ہوتی ہے۔غیر کامل عاکس کی صورت میں ریڈار رقبہ تراش نسبتاً کم ہو گا، مثلاً ایک میٹر طول موج پر چاند کا ریڈار رقبہ تراش تقریباً $\frac{1}{10}$ گنا حاصل ہوتا ہے۔

---

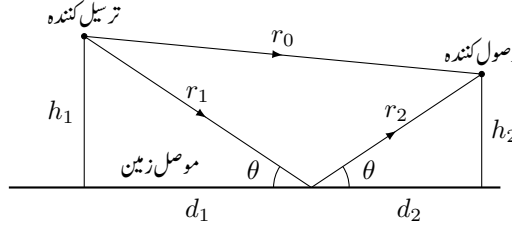
[68] radar cross section
[69] radar equation

شکل 14.37: ریڈار اینٹینا شعاع خارج کر کے انعکاسی موج وصول کرتا ہے۔

مثال 14.13: ایک ٹی وی اسٹیشن موصل زمین پر کھڑے 200 m قد کے اینٹینا سے 1 kW کی طاقت سے نشریات کرتی ہے۔ افقی سطح پر اینٹینا غیر سمتی ہے جبکہ عمودی سمت میں اس کی نصف طاقت چوڑائی $10°$ ہے۔ طول موج 1 m ہونے کی صورت میں 4 km دور کتنی اونچائی پر اینٹینا بہترین وصولی کر پائے گا۔ وصول کردہ طاقت کا بھی تخمینہ لگائیں۔ وصولی اینٹینا مندرجہ ذیل فرض کرتے ہوئے حل کریں۔

- عمودی قطبی اینٹینا جس کی سمتیت 4 کے برابر ہے۔
- افقی قطبی اینٹینا جس کی سمتیت 4 کے برابر ہے۔
- دائری قطبی 6 چکر کا پیچ دار اینٹینا جس کا $\alpha = 12.5°$ اور چکر کے مابین فاصلہ 0.22λ ہے۔

حل: شکل 14.38 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ موصل زمین سے انعکاس پر زمین کے متوازی برقی میدان میں $180°$ کی تبدیلی رونما ہو گی۔ یوں اگر وصولی اینٹینا زمین کے بالکل قریب ہو تب افقی قطبی میدان کی صورت میں یہ صفر طاقت وصول کر پائے گا جبکہ عمودی قطبیت کی صورت میں اسے سیدھی رسائی کے علاوہ زمین سے انعکاسی میدان بھی میسر ہو گا۔ یوں کل میدان دگنا اور طاقت چار گنا ہو گی۔

شکل 14.38 کو دیکھتے ہوئے کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی h پر اگر

$$r_1 + r_2 - r_0 = n\lambda \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{14.243}$$

شکل 14.38: سیدھی آمد موج اور انعکاسی موج کے اثرات۔

ہو تب افقی قطبی میدان صفر پایا جائے گا جبکہ عمودی قطبی میدان دگنا ہو گا۔اسی طرح جب بھی

$$r_1 + r_2 - r_0 = n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots) \tag{14.244}$$

ہو تب افقی قطبی میدان دگنا اور عمودی قطبی میدان صفر پایا جائے گا۔ان حقائق سے ظاہر ہے کہ زیادہ سے زیادہ افقی قطبی میدان کے دو قریبی نقطوں کے درمیانی نقطے پر زیادہ سے زیادہ عمودی قطبی میدان پایا جاتا ہے۔

بایاں دائری قطبی موج انعکاس کے بعد دایاں دائری قطبی ہوتا ہے۔اسی طرح دایاں دائری قطبی موج انعکاس کے بعد بایاں دائری قطبی ہوتا ہے۔یوں اگر ترسیلی اینٹینا دایاں دائری قطبی ہو تب دایاں دائری قطبی اینٹینا صرف سیدھے آمدی میدان کو وصول کر پائے گا جبکہ بایاں دائری قطبی اینٹینا صرف انعکاسی میدان کو وصول کر پائے گا۔یوں دونوں اقسام کے دائری قطبی اینٹینا اکائی میدان حاصل کریں گے۔ترسیلی اینٹینا بایاں قطبی ہونے کی صورت میں بایاں قطبی وصولی اینٹینا سیدھے آمد میدان کو وصول کرے گا جبکہ دایاں قطبی اینٹینا انعکاسی میدان کو وصول کرے گا۔

افقی اور عمودی قطبی اینٹینوں کی صورت میں وصولی اینٹینا کی اونچائی تبدیل کرنے سے میدان صفر تا دگنا حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ دائری قطبی اینٹینا کی صورت میں وصول طاقت کا دارومدار اینٹینا کی اونچائی پر نہیں ہوتا۔دائری اینٹینا ہر صورت اکائی میدان حاصل کرتا ہے۔

چونکہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہوتے ہیں لہٰذا شکل میں آمدی تکون اور انعکاسی تکون یکساں ہیں۔یوں $(r_1 + r_2 - r_0)$ کی قیمت $\frac{2h_1h_2}{d}$ لکھی جا سکتی ہے۔یوں عمودی قطب میدان کی زیادہ سے زیادہ قیمت

$$h_2 = \frac{d\lambda}{2h_1} = \frac{4 \times 10^3 \times 1}{2 \times 200} = 10\,\mathrm{m}$$

کی صورت میں حاصل ہو گی جس سے افقی قطبی میدان کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی اونچائی 5، 15، 25، ... میٹر لکھی جا سکتی ہے۔

فرائس کی مساوات سے، ایک راہ سے موصول طاقت

$$P_w = \frac{P_t A_t A_w}{r^2 \lambda^2} = \frac{10^3 \times 0.32 \times 0.91}{16 \times 10^6 \times 1} = 18\,\mu\text{W}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں ترسیلی اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\theta_{HP}\phi_{HP}} = \frac{4\pi}{\frac{360\times\pi}{180} \times \frac{10\times\pi}{180}} = 11.459$$

لیتے ہوئے اس کا اخراجی رقبہ

$$A_t = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = 0.91\,\text{m}^2$$

اور وصولی اینٹینا کا وصولی رقبہ

$$A_w = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = \frac{1^2 \times 4}{4\pi} = 0.32\,\text{m}^2$$

لئے گئے ہیں۔سیدھی آمد اور انعکاسی آمد میدان مل کر زیادہ سے زیادہ طاقت 4 گنا کر دیتی ہیں۔یوں افقی قطبی اور عمودی قطبی اینٹینا کی صورت میں زیادہ سے زیادہ وصول کردہ طاقت $72\,\mu\text{W}$ ہو گی جبکہ دونوں صورتوں میں کم سے کم حاصل کردہ طاقت صفر ہو گی۔

دائری قطبی صورت میں وصولی اینٹینا کی سمتیت

$$D = 15 \left(\frac{C}{\lambda}\right)^2 \frac{nd}{\lambda} = 15 \left(\frac{\frac{0.22}{\tan 12.5^\circ}}{1}\right)^2 \times \frac{6 \times 0.22}{1} = 19.5$$

اور وصولی رقبہ

$$A_w = \frac{\lambda^2 D}{4\pi} = 1.55\,\text{m}^2$$

ہیں لہٰذا ہر اونچائی پر وصول کردہ طاقت

$$P_w = \frac{1.55}{0.32} \times 18 = 87\,\mu\text{W}$$

ہو گی۔

وصول کردہ طاقت کا تخمینہ لگاتے ہوئے ہم نے اینٹینوں کے درمیان فاصلے کو چار کلو میٹر ہی تصور کیا اگرچہ حقیقی فاصلے قدر مختلف ہیں۔چار کلو میٹر کے فاصلے پر چند میٹر کم یا زیادہ سے حاصل جواب میں کوئی خاص تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔

14.20 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی

کسی بھی برقی مزاحمت R میں حرارت T کی وجہ سے آزاد بار حرکت کرتے ہیں جس سے مزاحمت میں **حراری شور**[70] پیدا ہوتا ہے۔ایسی مزاحمت کے برقی سروں پر B تعددی پٹی پر

$$W = kBT \tag{14.245}$$

طاقت شور[71] پایا جاتا ہے۔اکائی تعددی پٹی پر یوں

$$w = kT \tag{14.246}$$

طاقت شور پایا جائے گا جہاں

w اکائی تعددی پٹی پر شور کی طاقت، $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}$

k بولٹزمن کا مستقل، $1.38 \times 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

B تعددی پٹی، Hz

T مزاحمت کی مطلق حرارت، K

---

[70] thermal noise
[71] noise power

ہیں۔ T کو حرارتِ شور[72] کہا جاتا ہے۔ برابر تعددی پٹی پر برابر طاقت شور پایا جاتا ہے۔

اگر برقی مزاحمت R کے برابر اخراجی مزاحمت $(R_{\text{اخراجی}} = R)$ کے اینٹینا کے برقی سروں پر طاقت شور ناپی جائے تو یہ مزاحمت پر ناپی گئی طاقت شور سے مختلف ہو گی۔ اینٹینا کے سروں پر طاقت شور، خلاء کے اس خطے کی حرارت T سے پیدا شور ہو گا جہاں سے اینٹینا طاقت وصول کر رہا ہو۔ اس طاقت شور کا اینٹینا کی حرارت سے کوئی تعلق نہیں۔ یوں اینٹینا کو بطور بعید پیما حرارت[73] استعمال کیا جا سکتا ہے۔

ایک سنٹی میٹر طول موج کے ریڈیائی دوربین کی مرکز نگاہ آسمان کے ایسے خطوں پر رکھی جا سکتی ہے جہاں مطلق حرارت 0 K کے قریب قریب ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں طاقت شور آسمان کی حرارت سے پیدا ہو گا نا کہ اینٹینا کے حرارت سے جو 300 K کے لگ بھگ ہو گی۔ ریڈیائی دوربین کی طاقت شور فی تعدد

$$w = kT_A \qquad (\frac{\text{W}}{\text{Hz}}) \tag{14.247}$$

لکھی جاتی ہے جہاں T_A اینٹینا کی حراری شور ہے جسے عموماً حرارتِ اینٹینا[74] یا اخراجی مزاحمت کی حرارت کہا جاتا ہے۔ حرارت اینٹینا وہ خطہ کرتی ہے جس پر اینٹینا کے نقش کی نظر ہو۔ یوں اینٹینا کی مدد سے دور آسمان کے خطوں کی حرارت ناپنا ممکن ہے۔ ہم نے اس پورے بحث میں یہ فرض کر رکھا ہے کہ اینٹینا بے ضیاع ہے اور یہ آسمان کی طرف نظر رکھے ہوئے ہے۔ یوں انعکاسی شعاع اور ثانوی شعاع کو رد کیا گیا ہے۔

ریڈیائی دوربین کو استعمال کرتے ہوئے کثافت طاقت شور فی تعدد

$$p = \frac{w}{S_e} = \frac{kT_A}{S_e} \qquad (\frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{Hz}}) \tag{14.248}$$

کا استعمال زیادہ سودمند ثابت ہوتا ہے جسے پوئنٹنگ سمتیہ فی تعدد تصور کیا جا سکتا ہے۔

اگر ہمیں منبع شور کی زاویائی وسعت Ω_M معلوم ہو اور یہ Ω_A کی نسبت سے کم ہو تب منبع کی حرارت

$$\frac{T_A}{T_M} = \frac{\Omega_M}{\Omega_A} \tag{14.249}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یاد رہے کہ T_A کا اینٹینا کی حرارت سے کوئی تعلق نہیں۔

---

[72] noise temperature
[73] remote temperature sensor
[74] antenna temperature

مثال 14.14: مریخ[75] پر مرکز نگاہ رکھتے ہوئے 15 m لمبی ریڈیائی دوربین کی اینٹینا حرارت 31.5 mm طول موج پر 0.24 K ناپی جاتی ہے۔اینٹینا پر مریخ $0.005°$ زاویہ بناتا ہے اور اینٹینا کا نصف طاقت زاویہ $0.116°$ ہے۔ مریخ کی حرارت دریافت کریں۔

حل: مساوات 14.249 سے مریخ کی حرارت

$$T_M = \frac{\Omega_A}{\Omega_M} T_A \approx \frac{0.116^2}{\pi(0.005^2/4)} 0.24 = 164\,\text{K}$$

حاصل ہوتی ہے۔

14.21 حرارت نظام اور حرارت بعید

حرارت اینٹینا سے اس خطے کی حرارت حاصل کی جا سکتی ہے جس پر اینٹینا کا مرکز نگاہ ہو۔یوں اینٹینا کو بعید پیما حرارت استعمال کیا جا سکتا ہے۔ایک سنٹی میٹر طول موج کے ریڈیائی دوربین کی نگاہ، ستاروں سے خالی آسمان کے خطے پر رکھتے ہوئے انتہائی کم حرارت اینٹینا حاصل کی جا سکتی ہے۔آسمان کو دیکھتے ہوئے کم تر حرارت 3 K حاصل ہوتی جو کائنات کی ابتدائی دھماکے[76] کی بقیہ حرارت[77] ہے۔اگر اینٹینا کے سامنے ستارہ موجود ہو تب بقیہ حرارت سے زیادہ حرارت ناپی جائے گی۔ایک میٹر طول موج پر ہماری کہکشاں کی حرارت کئی ہزار کیلون ناپی جاتی ہے۔ہم حراری[78] شور کی حرارت ناپنے کی بات کر رہے ہیں۔یہ کامل اخراجی-وصولی خاصیت کے جسم کی حرارت ہے۔ایسے جسم کو سیاہ جسم[79] کہا جاتا ہے۔یوں اگر اینٹینا کی پوری وصولی نقش کے خطے میں گرم کوئلے یا سیاہ دھات کا کرہ پایا جائے، تو اینٹینا سے کرہ کی ناپی گئی حرارت وہی ہو گی جو تھرمامیٹر[80] سے ناپی جائے گی۔اس کے برعکس ترسیلی اینٹینا کی ناپی گئی اینٹینا حرارت غیر یقینی طور پر زیادہ حاصل ہوتی ہے۔

---

[75] Mars
[76] big bang
[77] residual temperature
[78] thermal
[79] blackbody
[80] thermometer

مثال کے طور پر اگر قریب ریڈیو اسٹیشن کی نشریات، $10\,\mathrm{m^2}$ وصولی رقبے اور $10\,\mathrm{kHz}$ تعددی پٹی کے وصولی اینٹینا کے قریب $10\,\frac{\mathrm{\mu V}}{\mathrm{m}}$ کا میدان پیدا کرے تو وصولی اینٹینا کی کل وصول کردہ طاقت

$$W=\frac{E^2}{Z_0}S_e=\frac{10^{-10}}{377}\times 10=2.65\,\mathrm{pW}$$

ہو گی جسے مساوات 14.245 میں پر کرتے ہوئے

$$T=\frac{W}{kB}=\frac{2.65\times 10^{-12}}{1.38\times 10^{-23}\times 10^4}=1.9\times 10^7\,\mathrm{K}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ صرف $10\,\frac{\mathrm{\mu V}}{\mathrm{m}}$ کا میدان $1.9\times 10^7\,\mathrm{K}$ کی اینٹینا حرارت پیدا کر سکتا ہے۔یہ اتنی بڑی مقدار ہے کہ اس کی موجودگی میں بقایا نظام کی حرارت، جسے **حرارتِ نظام**[81] پکارا جاتا ہے، کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔البتہ، ریڈیائی دوربین اتنی کم طاقت کے اشارات پر کام کرتی ہیں کہ ان میں حرارت نظام انتہائی اہم ہوتا ہے۔اس کا اندازہ آپ یوں کر سکتے ہیں کہ ریڈیائی دوربین کے استعمال میں کثافت طاقت فی ہرٹز کی اکائی **جانسکی**[82] ہے جہاں $1\,\mathrm{Ja}=10^{-26}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,Hz}}$ کے برابر ہے۔

[81] system temperature
[82] Jansky

سوالات

سوال 14.1: غیر سمتی اینٹینا $E = \frac{25I}{r}$ میدان پیدا کرتی ہے جہاں اینٹینا کا داخلی موثر برقی رو I اور اینٹینا سے فاصلہ r ہے۔اس اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔

جواب: $20.8\,\Omega$

سوال 14.2: اینٹینا کی شعاع $0 < \theta < 30^\circ$ ، $0 < \phi < 2\pi$ خطے میں یکساں میدان پیدا کرتی ہے جبکہ $30^\circ < \theta < 180^\circ$ خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔ الف) اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A حاصل کریں۔ ب) شعاع کی سمتیت D دریافت کریں۔

جوابات: $0.842\,\mathrm{sr}$ ، 14.9

سوال 14.3: اینٹینا کی شعاع $0 < \theta < 60^\circ$ ، $0 < \phi < 2\pi$ خطے میں یکساں میدان پیدا کرتی ہے جبکہ $60^\circ < \theta < 180^\circ$ خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔ الف) اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A حاصل کریں۔ ب) شعاع کی سمتیت D دریافت کریں۔ پ) اینٹینا کا اخراجی رقبہ A_e حاصل کریں۔ ت) اینٹینا کا داخلی موثر برقی رو $12\,\mathrm{A}$ ہونے کی صورت میں اینٹینا سے $164\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر موثر برقی میدان $7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ اینٹینا کا اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جوابات: $3.142\,\mathrm{sr}$ ، 4 ، $0.318\lambda^2$ ، $76.3\,\Omega$

سوال 14.4: اینٹینا کی شعاع $45^\circ < \theta < 60^\circ$ ، $0^\circ < \phi < 120^\circ$ خطے میں یکساں ہے۔بقایا خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔اینٹینا سے $1000\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر اس خطے میں $2\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ برقی میدان حاصل کرنے کی خاطر $4\,\mathrm{A}$ موثر داخلی برقی رو درکار ہے۔ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جواب: $288\,\Omega$

سوال 14.5: اینٹینا کی مرکزی شعاع $0^\circ < \theta < 45^\circ$ خطے میں یکساں پائی جاتی ہے جبکہ اس کی ثانوی شعاع $120^\circ < \theta < 180^\circ$ خطے میں یکساں پائی جاتی ہے۔میدان ϕ کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا۔مرکزی شعاع میں میدان ثانوی شعاع کے میدان کے چار گنا ہے۔ الف) اینٹینا کی سمتیت D دریافت کریں۔ب) مرکزی شعاع میں اینٹینا سے $350\,\mathrm{m}$ فاصلے پر $E_{\text{موثر}} = 6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ برقی میدان کے حصول کے لئے اینٹینا کو $6\,\mathrm{A}$ موثر داخلی برقی رو مہیا کیا جاتی ہے۔اینٹینا کی اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جوابات: $D = 6.17$ ، $662\,\Omega$

سوال 14.6: دو عدد غیر سمتی، ہم قدم منبع کے درمیان فاصل 2λ ہے۔ الف) نقش کے صفر حاصل کریں۔ ب) نقش کی چوٹیاں حاصل کریں۔

جوابات: الف) $\mp 41.4^\circ$ ، $\mp 75.5^\circ$ ، $\mp 104.5^\circ$ ، $\mp 138.6^\circ$ ؛ ب) 0° ، $\mp 60^\circ$ ، $\mp 90^\circ$ ، $\mp 120^\circ$ ، 180°

سوال 14.7: دو عدد غیر سمتی، منبع کے درمیان فاصل $\frac{3\lambda}{2}$ ہے جبکہ ان میں زاویائی فرق 180° ہے۔ الف) نقش کے صفر حاصل کریں۔ ب) نقش کی چوٹیاں حاصل کریں۔

جوابات: الف) $\mp 90^\circ$ ، $\mp 48.2^\circ$ ، $\mp 131.8^\circ$ ؛ ب) 0° ، $\mp 70.5^\circ$ ، $\mp 109.5^\circ$

سوال 14.8: چار رکنی قطار میں غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع پائے جاتے ہیں۔ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ منبع کے درمیان فاصلہ نصف طول موج سے کم $d < \frac{\lambda}{2}$ ہے۔ زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 90^\circ$ پر اور نقش کا صفر $\theta = 45^\circ$ پر حاصل کرنے کے لئے درکار δ اور d حاصل کریں۔

جوابات: $\delta = -90^\circ$ ، $d = 0.354\lambda$

سوال 14.9: گھریلو ریڈیو سے $585\,\text{kHz}$ تعدد کی نشریات سنی جا رہی ہے۔ الف) ریڈیو اینٹینا کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے اس کا اخراجی رقبہ دریافت کریں۔ ب) گھر سے ریڈیو اسٹیشن کا فاصلہ $10\,\text{km}$ جبکہ اسٹیشن کی اخراجی طاقت $5\,\text{kW}$ کی صورت میں ریڈیو کتنی طاقت وصول کر پاتا ہے۔ اسٹیشن کا اخراج غیر سمتی تصور کریں۔ پ) ریڈیو کی داخلی مزاحمت $300\,\Omega$ ہے۔ ریڈیو کو صرف $1\,\mu\text{V}$ موثر داخلی اشارہ درکار ہے۔ درکار داخلی طاقت کی قیمت حاصل کریں۔

جوابات: $20\,928\,\text{m}^2$ ، $83.3\,\text{mW}$ ، $3.33\,\text{fW}$

سوال 14.10: 1.5λ لمبے خطی اینٹینا کا اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ کو صفحہ 802 پر دیے جدول 14.2 کے طرز کا جدول حاصل کرنا ہو گا۔

جواب: $100\,\Omega$

سوال 14.11: یکساں غیر سمتی منبع پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان $d = \frac{\lambda}{4}$ ہے۔ مرکزی شعاع $\theta = 30^\circ$ پر حاصل کرنے کی خاطر ارکان کے مابین زاویائی فرق δ حاصل کریں۔

جواب: $1.36\,\text{rad}$

سوال 14.12: تداخل پیما میں جفت قطب کے مابین فاصلہ 10λ ہونے کی صورت میں پہلے صفر چوڑائی حاصل کریں۔

جواب: $5.7°$

سوال 14.13: خلاء میں دو مصنوعی سیاروں کے درمیان 2×10^8 m کا فاصلہ ہے۔ یہ آپس میں 2.5 GHz تعدد پر اشارات کا تبادلہ کرتے ہیں۔ دونوں سیارے $D = 1500$ سمتیت کے اینٹینا استعمال کرتے ہیں۔ اطلاعات صحیح موصول ہونے کے لئے ضروری ہے کہ حاصل کردہ اشارے کی طاقت برقی شور سے قدر زیادہ ہو۔ یوں ضروری ہے کہ حاصل کردہ برقی اشارے کی طاقت کم از کم 1 pW ہو۔ اخراجی اینٹینا کی درکار طاقت حاصل کریں۔

جواب: 195 W

ضمیمہ: طبعی مستقل

موصلیت: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	مقطر پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹز (سنگ مردہ)	10^{-17}

جزوی برقی مستقل اور مماس ضیاع: $\sigma / \omega\epsilon$ and ϵ_R

چیز	ϵ_R	$\sigma / \omega\epsilon$
خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹز (سنگ مردہ)	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جزوی مقناطیسی مستقل: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میومیٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 14.3: اہم طبعی مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران بار	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

ضمیمہ: ڈھلوان، پھیلاو، گردش اور لاپلاسی

کارتیسی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\text{X}} & \boldsymbol{a}_{\text{Y}} & az \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

نلکی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
\end{aligned}
$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho & \boldsymbol{a}_\phi & \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

کروی محدد

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{a}_\phi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

عمومی محدد

$$\nabla f = \frac{1}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{a}_v + \frac{1}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\boldsymbol{a}_w$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{k_1k_2k_3}\left(\frac{\partial(k_2k_3A_u)}{\partial u} + \frac{\partial(k_3k_1A_v)}{\partial v} + \frac{\partial(k_1k_2A_w)}{\partial w}\right)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{k_2k_3}\left[\frac{\partial(k_3A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(k_2A_v)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_3k_1}\left[\frac{\partial(k_1A_u)}{\partial w} - \frac{\partial(k_3A_w)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v$$

$$+\frac{1}{k_1k_2}\left[\frac{\partial(k_2A_v)}{\partial u}-\frac{\partial(k_1A_u)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w$$

$$\nabla^2 f=\frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2k_3}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_3k_1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1k_2}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

سطحی اور حجمی تکمل کے تعلق

مندرجہ ذیل تین مساوات میں دائیں جانب حجمی تکمل کے حجم کو بائیں جانب سطحی تکمل کی سطح گھیرتی ہے۔

$$\oint_S f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_h \nabla f\,\mathrm{d}h$$

$$\oint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_h \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}h \qquad \text{مسئلہ پھیلاو}$$

$$\oint_S \boldsymbol{a}_N\times\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}S=\int_h \nabla\times\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}h$$

خطی اور سطحی تکمل کے تعلق

مندرجہ ذیل دو مساوات میں دائیں جانب سطحی تکمل کی سطح کو بائیں جانب خطی تکمل کی بند راہ گھیرتی ہے۔

$$\oint_l f\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S \boldsymbol{a}_N\times\nabla f\,\mathrm{d}S$$

$$\oint_l \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{مسئلہ سٹوکس}$$

خطی الجبرائی مماثل

غیر سمتی (نقطہ) ضرب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G} &= FG\cos\theta\\
&= F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z\\
\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}}{FG}\right)
\end{aligned}$$

سمتی (صلیبی) ضرب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G} &= FG\sin\theta\boldsymbol{a}_N\\
&= \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{\text{X}} & \boldsymbol{a}_{\text{y}} & \boldsymbol{a}_{\text{Z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\\
\theta &= \sin^{-1}\left[\frac{(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{a}_N}{FG}\right]
\end{aligned}$$

مماثل

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) &= 0\\
\nabla\cdot\nabla f &= \nabla^2 f\\
\nabla\times\nabla f &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \nabla f+\nabla g\\
\nabla\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\cdot\boldsymbol{F}+\nabla\cdot\boldsymbol{G}\\
\nabla\times(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\times\boldsymbol{F}+\nabla\times\boldsymbol{G}
\end{aligned}$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$
$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{G}) = f(\nabla \cdot \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \cdot (\nabla f)$$
$$\nabla \times (f\boldsymbol{G}) = f(\nabla \times \boldsymbol{G}) + (\nabla f) \times \boldsymbol{G}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$$

جہاں $\nabla^2 \boldsymbol{F}$ سے مراد

$$\nabla^2 \boldsymbol{F} = \nabla^2 F_x \boldsymbol{a}_{\text{X}} + \nabla^2 F_y \boldsymbol{a}_{\text{Y}} + \nabla^2 F_z \boldsymbol{a}_{\text{Z}}$$

ہے۔

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G})$$
$$\boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G})$$
$$\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{F}(\nabla \cdot \boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G}(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G}$$
$$\nabla(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \times (\nabla \times \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \times (\nabla \times \boldsymbol{F})$$

محدد کے باہمی تعلق

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos\phi \\
y &= \rho \sin\phi \\
z &= z
\end{aligned}
$$

نلکی سے کارتیسی

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2+y^2} \qquad (\rho \geq 0) \\
\phi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\
z &= z
\end{aligned}
$$

کارتیسی سے نلکی

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

کروی سے کارتیسی

نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$	
0	$\sin\phi$	$\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_\rho$
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	$\boldsymbol{a}_\phi$
1	0	0	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$	$\sin\theta\cos\phi$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta$
$\boldsymbol{a}_{\theta}$	$\cos\theta\cos\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$-\sin\theta$
$\boldsymbol{a}_{\phi}$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0

کروی اکائی سمتیات کا نلکی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

	$\boldsymbol{a}_{\rho}$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$	$\sin\theta$	0	$\cos\theta$
$\boldsymbol{a}_{\theta}$	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$
$\boldsymbol{a}_{\phi}$	0	1	0

کارتیسی سے کروی

$$
\begin{aligned}
r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
\theta &= \cos^{-1}\frac{z}{r} \\
&= \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\phi &= \tan^{-1}\frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

فرہنگ

سمتیت، 759
غیر سمتی، 759
گھیرا، 807
متکافیت، 767
محوری، 708
وصولی، 762
وصولی رقبہ، 763

بار، 58
برقی، 35
مقید، 200
بازو
قوت، 360
بایوٹ-سیوارٹ، 277
بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا، 782
برق، 35
برقی
اثر پذیری، 205
سرحدی شرائط، 207
برقرار یکساں حال، 574
برق گیر، 77، 177، 214
ابرق، 215
برق نا طیسی، 437
برقی بار، 35، 58
برقی بہاو، 99
برقی چال، 204
برقی دباو، 140
پیما، 402
برقی رو
روایتی، 576
کثافت، 178
مقید، 368
برقی زمین، 141
برقی سکون، 190
برقی گنجائش، 213
برقی مستقل، 58
خلاء، 205
برقی میدان
سرحدی شرائط، 418
شدت، 64
بریوسٹر زاویہ، 616

بصری
زیریں، 705
بصریات، 608
بعید پیما حرارت، 823
بقائی میدان، 149
بقیہ حرارت، 824
بلاجوڑ، 208، 374
بلند رتبی انداز
غالب، 686
بند
سطح، 399
بند تکملہ، 102
بیسل
تفاعل، 683
صفر، 683
بیسل تفاعل، 540
بیسل مساوات، 681
بیضوی قطبیت، 510
بے بعد، 444
بے بُعد، 758
بے پردہ، 354، 540
بے تار، 59، 450
بے ضیاع، 443
بے معنی، 775

تابع تفاعل، 439
تاخیر
مجموعی، 635
تاخیری
برقی رو، 735
تاخیری دباو، 425، 430
تانبا، 184
تبادلہ رکاوٹ، 507
تجاذب، 57
تجاذبی مستقل، 57
تجاذبی میدان، 63
تداخل پیما، 783
ترخیم، 511
ترسیلی
سطح مستوی، 544
ترسیلی موج، 481